THM TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN | CAMPUS FRIEDBERG | IEM Informationstechnik-Elektrotechnik-Mechatronik

Vorlesungsskript zu

Elektrische Maschinen

Wolf-Rainer Novender*

© 2021-2023, alle Rechte vorbehalten

†Aus dem Inhalt [1]:

Physikalische Grundlagen
Gleichstrommaschine
Transformator
Drehfelder
Asynchronmaschine
Synchronmaschine
Bewertung elektrischer Maschinen

mit GNUPLOT Beispielen/Demonstrationen

*Wolf-Rainer.Novender@lem.thm.de

†überarbeitete Version `em.pdf` vom 23. November 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen **2**
- 1.1 Zu diesem Skript … 2
- 1.2 Ersatzschaltbilder (ESB) 3
- 1.3 Zählpfeile 3
- 1.4 Welches Zählpfeilsystem wählt man? 3
- 1.5 Schreibweisen 4

2 Elektrische Maschinen – Grundlagen **5**
- 2.1 Physikalische Grundlagen 5
  - 2.1.1 Magnetischer Kreis 5
  - 2.1.2 Induktionsgesetz 10
  - 2.1.3 Kräfte 13
  - 2.1.4 Rückwirkung (Lenzsche Regel) 15
  - 2.1.5 Konstruktive Entwicklung 15
  - 2.1.6 Energiewandlung 19
- 2.2 Gleichstrommaschine-Grundlagen 25
  - 2.2.1 Aufbau und Wirkungsweise 25
  - 2.2.2 Kommutierung 29
  - 2.2.3 Ankerrückwirkung 29
  - 2.2.4 Klemmenbezeichnungen und Schaltungen 31
  - 2.2.5 Drehrichtung 31
  - 2.2.6 Betriebsverhalten 32
- 2.3 Transformator 41
  - 2.3.1 Funktionsprinzip 41
  - 2.3.2 Idealer Transformator 42
  - 2.3.3 Aufbau 43
  - 2.3.4 Ersatzschaltbild des realen Transformators 44
  - 2.3.5 Bestimmung der ESB-Parameter 46
  - 2.3.6 Wirkungsgrad 48
  - 2.3.7 Spannungsänderung bei Belastung 49
  - 2.3.8 Drehstromtransformatoren 50
  - 2.3.9 Anschlussbezeichnungen 52
  - 2.3.10 Schaltsymbole 52
  - 2.3.11 Einsatzgebiete 53
- 2.4 Drehfelder 54
  - 2.4.1 Erzeugung einer einphasigen Wechselspannung 54
  - 2.4.2 Wechselfeld 54
  - 2.4.3 Erzeugung einer dreiphasigen Wechselspannung — Drehstromnetz 55
  - 2.4.4 Drehfeld 55
  - 2.4.5 Linearfeld (Wanderfeld) 57
  - 2.4.6 Drehstromwicklung 58

2.5 Asynchronmaschine . . . 60
2.5.1 Wirkungsweise . . . 60
2.5.2 Aufbau . . . 62
2.5.3 Läuferspannung, -frequenz . . . 63
2.5.4 Ersatzschaltbild . . . 65
2.5.5 Leistungsbilanz . . . 65
2.5.6 Bestimmung der ESB-Parameter . . . 67
2.5.7 Betriebsverhalten . . . 70
2.5.8 Anlassverfahren . . . 72
2.5.9 Drehzahlsteuerung . . . 76
2.5.10 Bremsen . . . 79
2.5.11 Linearmotor . . . 81
2.6 Synchronmaschine . . . 82
2.6.1 Aufbau . . . 82
2.6.2 Betriebsverhalten . . . 83

3 Elektrische Maschinen – Vertiefung **94**
3.1 Magnetischer Kreis . . . 94
3.1.1 Anwendungen des Durchflutungssatzes . . . 94
3.1.2 Feldverlauf an Grenzflächen . . . 96
3.1.3 Berechnung linearer magnetischer Kreise . . . 97
3.1.4 Nichtlinearer magnetischer Kreis . . . 97
3.1.5 Einfluss der Sättigung . . . 99
3.1.6 Weitere Einflussgrößen . . . 101
3.1.7 Einfluss des Luftspaltes . . . 102
3.1.8 Elektrisches Ersatzschaltbild . . . 104
3.1.9 Numerische Feldberechnung . . . 105
3.1.10 Konstruktive Ausführungen . . . 107
3.1.11 Streufelder . . . 110
3.2 Gleichstrommaschine – Teil 2 . . . 112
3.2.1 Ankerwicklungen . . . 112
3.2.2 Magnetische Felder . . . 115
3.2.3 Kommutierung . . . 119
3.2.4 Kennlinienfeld einer GM . . . 120
3.2.5 Dynamisches Verhalten . . . 121
3.3 Transformator – Teil 2 . . . 124
3.3.1 Wicklungssinn . . . 124
3.3.2 T-Ersatzschaltbild . . . 124
3.3.3 Gegeninduktivitäten . . . 126
3.3.4 Vergleich Gegeninduktivitäten und T-Ersatzschaltbild . . . 128
3.3.5 Differentialgleichungssystem . . . 129
3.3.6 Zeigerdiagramm . . . 130
3.3.7 Drehstromtransformatoren . . . 135
3.3.8 Schaltgruppe . . . 138
3.3.9 Aufbau und Bauformen . . . 141
3.3.10 Entwurfsgleichungen . . . 144
3.3.11 Magnetisierungsstrom und magnetischer Fluss . . . 149
3.3.12 Spartransformator . . . 151
3.3.13 Einschaltstrom (Rush) . . . 153

3.3.14 Strom- und Spannungswandler . . . 154
3.4 Drehfelder – Teil 2 . . . 157
3.4.1 Läuferdrehfeld . . . 157
3.4.2 Ständerdrehfeld . . . 157
3.4.3 Raumzeiger . . . 161
3.4.4 Drehstromwicklung: Wicklungsfaktoren . . . 162
3.4.5 Drehstromwicklungen: Ausführungen . . . 166
3.4.6 Aufbau einer Ständerwicklung für eine Synchronmaschine . . . 168
3.5 Asynchronmaschine – Teil 2 . . . 172
3.5.1 Herleitung des Ersatzschaltbildes . . . 172
3.5.2 Kreisdiagramm . . . 173
3.5.3 Numerische Berechnung . . . 175
3.5.4 Weitere Einflußgrößen . . . 177
3.5.5 Abschätzung – Kloßsche Gleichung . . . 181
3.5.6 Generatorbetrieb . . . 182
3.5.7 Schleifringläufer mit Anlasswiderständen . . . 182
3.5.8 Schlupfwiderstände . . . 184
3.5.9 Änderung der Klemmenspannung . . . 184
3.5.10 Läuferrückspeisung . . . 185
3.5.11 Polumschaltung . . . 185
3.5.12 Frequenzsteuerung . . . 186
3.5.13 Gleichstrombremsen . . . 188
3.5.14 Linearmotor . . . 189
3.5.15 Asynchrongenerator . . . 190
3.5.16 Einphasige Asynchronmaschinen . . . 191
3.5.17 Normen, Vorschriften . . . 193
3.6 Synchronmaschine – Teil 2 . . . 194
3.6.1 Magnetfelder eines Turbogenerators . . . 194
3.6.2 Leerlauf . . . 194
3.6.3 Lastfall . . . 200
3.6.4 Kurzschluss . . . 203
3.6.5 Schenkelpolmaschine . . . 206
3.6.6 Normen und Vorschriften . . . 207

4 EM-Labor **209**
4.1 Bewertung elektrischer Maschinen . . . 209
4.1.1 Fremderregte Gleichstrommaschine . . . 209
4.1.2 Transformator . . . 214
4.1.3 Asynchronmaschine . . . 217
4.1.4 Synchronmaschine . . . 222

A Anhang **235**
A.1 Numerische Feldberechnung . . . 235
A.1.1 Feldbegriffe . . . 235
A.1.2 Koordinatensystem . . . 236
A.1.3 Felddarstellung . . . 236
A.1.4 Rechenoperationen mit Feldern . . . 238
A.1.5 Maxwellsche Gleichungen . . . 242
A.1.6 Feldberechnung . . . 242

A.2 Auslegung von Spulen . . . 256
A.3 Das Drehmoment in elektrischen Maschinen . . . 259
A.3.1 Einleitung . . . 259
A.3.2 Kraftwirkung auf bewegte Ladungen . . . 259
A.3.3 Kräfte auf ferromagnetisches Material . . . 260
A.3.4 Anwendungsbeispiel . . . 263
A.3.5 Entwurfsgleichung . . . 263
A.3.6 Formelzusammenstellung . . . 263
A.4 Feldberechnung einer Gleichstrommaschine . . . 266
A.5 Simulation der Transformatorersatzschaltungen . . . 269
A.5.1 Wechselstromanalyse (Frequenzbereich) . . . 269
A.5.2 Transientanalyse (Zeitbereich) . . . 271
A.6 Betriebsverhalten der ASM . . . 274
A.6.1 Läufer . . . 274
A.6.2 Hauptinduktivität X_h . . . 276
A.6.3 Eisenverlustwiderstand R_{Fe} . . . 277
A.7 Mathematisches Modell einer Synchronmaschine . . . 278
A.7.1 Grundlagen . . . 278
A.7.2 Drehstromsynchronmaschine als Motor . . . 279
A.8 GNUPLOT Simulationen und Demonstrationen . . . 283
A.8.1 Simulation eines Drehfeldes . . . 283
A.8.2 Simulation der ASM — Betriebsverhalten, Kreisdiagramm . . . 285
A.8.3 Auswerten externer Daten, Fitfunktion . . . 286
A.9 Wärmeableitung . . . 288
A.9.1 Grundlagen, Definitionen . . . 288
A.9.2 Wärmedurchgang . . . 289
A.9.3 Wärmeleitung . . . 289
A.9.4 Konvektion . . . 290
A.9.5 Wärmestrahlung . . . 290
A.9.6 Analogien zum elektrischen Strömungsfeld . . . 291
A.9.7 Beispiele . . . 292
A.10 Ähnlichkeitsgesetze . . . 295
A.10.1 Geometrische Ähnlichkeit . . . 295
A.10.2 Zeitliche Ähnlichkeit . . . 296
A.10.3 Dynamische Ähnlichkeit . . . 296
A.10.4 Ähnlichkeit bei gleicher Beanspruchung . . . 297
A.10.5 Thermische Ähnlichkeit . . . 298
A.11 Wachstumsgesetze . . . 299
A.12 Normzahlen . . . 302

Abbildungsverzeichnis

1.1 Zählpfeilsysteme . . . 3
1.2 Zeigerdiagramm im VZS und EZS . . . 3

2.1 Feldlinienverlauf in einfachen Strukturen . . . 6
2.2 Magnetisierungskennlinien . . . 8
2.3 Messschaltung . . . 8
2.4 Beispiele zum Induktionsgesetz . . . 10
2.5 Wirbelströme in massiven und lamellierten leitfähigen Werkstoffen . . . 11
2.6 Rückwirkung eines stromführenden Leiters . . . 13
2.7 Feld in einer Gleichstrommaschine . . . 14
2.8 Rückwirkungen bei Motor- und Generatorbetrieb . . . 15
2.9 Leiterschleife im homogenen Magnetfeld . . . 15
2.10 …mit Eisen gefüllt und Polschuhen . . . 15
2.11 …in Nuten versenkt . . . 15
2.12 Unsymmetrischer und … . . . 16
2.13 …symmetrischer Magnetkreis . . . 16
2.14 Außenpolmaschine . . . 17
2.15 Innenpolmaschine . . . 17
2.16 $P_{\mathrm{F+R}} = f(\Omega, B)$ . . . 22
2.17 $P_{\mathrm{F+R}} = f(B)$ . . . 22
2.18 $P_{\mathrm{F+R}} = f(B^2)$ . . . 22
2.19 Indirektes Verfahren . . . 23
2.20 $\eta = f(P_2)$ . . . 23
2.21 Leiterschleife im Magnetfeld . . . 25
2.22 Stromwendung . . . 25
2.23 Stromwendung . . . 26
2.24 Bauformen permanent erregter Gleichstrommaschinen . . . 26
2.25 Anordnung der Ankerleiter und Erregerpole einer 4-poligen Maschine . . . 27
2.26 Stromwendung an einem Ringanker . . . 27
2.27 Querschnitt eines Trommelankers, Schleifenwicklung, Wellenwicklung . . . 28
2.28 Trommelanker eines Kleinmotors (Serienfertigung) mit Kommutator . . . 28
2.29 Kommutator einer 4-poligen Maschine mit vier Bürsten . . . 28
2.30 Kommutierungsvorgang bei einer Schleifenwicklung . . . 29
2.31 Induktionsverlauf am Ankerumfang (Ankerrückwirkung) . . . 30
2.32 Wende- und Kompensationswicklung . . . 30
2.33 Klemmenbezeichnungen . . . 31
2.34 Schaltungen der Gleichstrommaschine . . . 32
2.35 Ersatzschaltbild einer Gleichstrommaschine . . . 32
2.36 Ergebnisse der Versuche 2.2.1 und 2.2.2 . . . 34
2.37 Leistungsbilanz der Gleichstrommaschine . . . 35
2.38 Kennlinienfeld einer Gleichstrommaschine . . . 38

2.39 Kennlinien einer Reihenschlussmaschine . . . 39
2.40 Doppelschlussmaschine . . . 40
2.41 Prinzip der induktiven Kopplung . . . 41
2.42 Kernausführungen . . . 43
2.43 Wicklungen . . . 44
2.44 Ersatzschaltbild eines realen Transformators . . . 44
2.45 T-Ersatzschaltbild eines realen Transformators . . . 45
2.46 Leerlaufversuch: Messschaltung und Ersatzschaltbild . . . 46
2.47 Kurzschlussversuch: Messschaltung und Ersatzschaltbild . . . 47
2.48 Verluste und Wirkungsgrad eines 167 kVA Transformators . . . 49
2.49 Spannungsänderung infolge der Belastung . . . 49
2.50 Übersicht der wichtigsten Schaltgruppen (Quelle: Kampschulte) . . . 52
2.51 Anschlussbezeichnungen ein- und dreiphasiger Transformatoren . . . 52
2.52 Verschiedene Schaltsymbole für Transformatoren und Drosseln . . . 53
2.53 Erzeugung einer einphasigen Wechselspannung . . . 54
2.54 Entstehung eines Wechselfelds, Feldverlauf, Ströme (blau) . . . 54
2.55 Erzeugung einer dreiphasigen Wechselspannung (Drehstromgenerator) . . . 55
2.56 Nachweis eines Drehfeldes mit Hilfe einer Magnetnadel . . . 56
2.57 Erzeugung eines Drehfeldes aus drei Wechselfeldern . . . 57
2.58 Unterschiedliche Spulenanordnungen einer Drehstromwicklung . . . 58
2.59 Einfachste Drehstromwicklung im Querschnitt und in der Abwicklung . . . 58
2.60 Schleifringläufer (links) und aufgeschnittenes Modell eines Käfigläufers . . . 62
2.61 Betriebsbereiche der Asynchronmaschine . . . 63
2.62 Frequenzumformer . . . 64
2.63 Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine . . . 65
2.64 Leistungsbilanz der Asynchronmaschine . . . 67
2.65 Einphasige Ersatzschaltbilder für den Leerlaufversuch . . . 68
2.66 Trennung der Eisen- und Reibungsverluste . . . 69
2.67 Einphasiges Ersatzschaltbild beim Kurzschlussversuch . . . 70
2.68 Anlaufstrom und -moment einer ASM (Doppelkäfig) . . . 71
2.69 Betriebskennlinien einer ASM (einfacher Käfigläufer) . . . 71
2.70 Anlasswiderstand . . . 73
2.71 Stromverdrängung . . . 73
2.72 Anlasstransformator . . . 74
2.73 Drehstromsteller . . . 74
2.74 Stern-Dreieck . . . 75
2.75 Kusa . . . 75
2.76 Momentenkennlinien bei reduzierter Klemmenspannung . . . 77
2.77 Läuferrückspeisung mittels untersynchroner Stromrichterkaskade . . . 78
2.78 Polumschaltbare ASM . . . 78
2.79 U/f-Steuerung (normierte Darstellung) . . . 79
2.80 Gleichstrombremsung . . . 80
2.81 Gegenstrombremsung . . . 80
2.82 Bremsmotor . . . 81
2.83 Linearmotor . . . 81
2.84 Außenpolmaschine, $p = 2$ . . . 82
2.85 Turboläufer, $p = 1$ . . . 82
2.86 Schenkelpolmaschine, $p = 3$ . . . 82
2.87 Ersatzschaltbild der Vollpolmaschine . . . 84

2.88 Zeigerdiagramm . . . 85
2.89 Leerlauf- und Kurzschlusskennlinie . . . 85
2.90 Zeigerdiagramm . . . 87
2.91 Belastungskennlinien . . . 87
2.92 Schaltung zur Synchronisation einer SM an ein Drehstromnetz . . . 88
2.93 Wirklastbetrieb der Synchronmaschine am Netz . . . 89
2.94 Blindlastbetrieb der Synchronmaschine am Netz . . . 89
2.95 Vierquadrantenbetrieb der Synchronmaschine am Netz . . . 90
2.96 Stromortskurve der Synchronmaschine . . . 91
2.97 V-Kurven . . . 92
2.98 Drehmoment . . . 92

3.1 Anwendung des Durchflutungssatzes . . . 94
3.2 Magnetische Feldstärke innerhalb und außerhalb eines Linienleiters . . . 95
3.3 Zylinderspule (Solenoid) . . . 95
3.4 Ringspule (Toroid) . . . 95
3.5 Feldverlauf an Grenzflächen . . . 96
3.6 C-Magnet . . . 97
3.7 UI-Kern . . . 97
3.8 Nichtlinearer Magnetkreis mit Magnetisierungskennlinie . . . 98
3.9 Flussdichte und Permeabilität von Weicheisen . . . 99
3.10 Einschaltstrom . . . 99
3.11 Stromverlauf und Aussteuerung der Magnetisierungskennlinie . . . 101
3.12 Magnetkreis mit Luftspalt . . . 103
3.13 Hystereseschleife mit Scherung . . . 103
3.14 Luftspaltgerade und Magnetisierungskennlinie . . . 104
3.15 Ersatzschaltbild und Durchflutungsbedarf für den Magnetkreis in Abb. 3.12 . . . 104
3.16 Gesamter Feldverlauf und Luftspaltfeld . . . 106
3.17 Verteilung der Flussdichte $|B|$ am Luftspalt (Werte in T) . . . 107
3.18 Innen-, Außenpolmaschine . . . 108
3.19 Innen-, Außenpole . . . 108
3.20 Hammerkopfklaue . . . 108
3.21 Blechschnitt einer GM, eckige Ausfuhrung . . . 108
3.22 Ständerblechschnitt einer ASM . . . 108
3.23 Nutformen . . . 108
3.24 Zweiebenen-Einschichtwicklung . . . 109
3.25 Zweischichtwicklung . . . 109
3.26 Gesehnte Einschichtwicklung . . . 109
3.27 Einschichtwicklung . . . 109
3.28 Streufeld bei einem ausgeprägten Erregerpol . . . 110
3.29 Wickelkopfstreuung . . . 110
3.30 Luftspalt- und Streufeld . . . 110
3.31 Streufeld im Nut- und Zahnkopfraum . . . 110
3.32 2-polige Gleichstrommaschine mit abgewickelter Trommelwicklung . . . 112
3.33 Spulenweite . . . 113
3.34 Ankernutquerschnitt . . . 113
3.35 Schleifenwicklung . . . 114
3.36 Wellenwicklung . . . 115
3.37 Feldverlauf bei glattem und genutetem Anker . . . 116

3.38 Flussdichte im Luftspalt bei glattem und genutetem Anker . . . 116
3.39 Ankerquerfeld . . . 117
3.40 Luftspaltindukion des Ankerquerfeldes . . . 117
3.41 Stomverläufe in einer kurzgeschlossenen Ankerspule . . . 119
3.42 Belastungskennlinien einer fremderregten Gleichstrommaschine . . . 120
3.43 Dynamisches Ersatzschaltbild einer fremderregten Gleichstrommaschine . . . 122
3.44 Simuliertes Lastspiel einer fremderregten Gleichstrommaschine . . . 122
3.45 Wicklungssinn . . . 124
3.46 Ersatzschaltbild mit getrennter Primär- und Sekundärseite . . . 125
3.47 Vollständiges T-Ersatzschaltbild . . . 125
3.48 Ersatzschaltbild mit Gegeninduktivitäten . . . 127
3.49 Vergleich T-Ersatzschaltbild und Gegeninduktivitäten . . . 128
3.50 Zeigerdiagramm von Fluss und Spannung . . . 131
3.51 Zeigerdiagramm im Leerlauf . . . 132
3.52 …und im Lastfall . . . 132
3.53 Vereinfachtes Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm . . . 133
3.54 Konstruktion des Zeigerdiagrammes . . . 134
3.55 Zeigerdiagramm mit $U_1 \parallel U_2'$ . . . 135
3.56 $U_2(\cos\varphi_2)$ . . . 136
3.57 Klemmenbezeichnung einer offenen Wicklung . . . 137
3.58 Schaltungsarten bei Drehstromtransformatoren . . . 137
3.59 Zickzack-Schaltung . . . 137
3.60 Zickzack-Schaltung . . . 138
3.61 Schaltgruppe Dzn6 . . . 138
3.62 Schaltgruppen Dreieck (D) und Stern (Y) nach DIN 57 532 T4 . . . 139
3.63 Schaltgruppen Dz6 uind Yz11 nach DIN 57 532 T4 . . . 139
3.64 Yyn, zweisträngig . . . 140
3.65 Yyn, einsträngig . . . 140
3.66 Dyn-Schaltung . . . 140
3.67 Ausgleichswicklung . . . 140
3.68 Yzn, einsträngig . . . 140
3.69 Eisenkernquerschnitte mit unterschiedlichen Ausnutzungsfaktoren . . . 142
3.70 Kern- und Manteltyp . . . 143
3.71 Zylinder- und Scheibenwicklung . . . 143
3.72 Verschiedene Wicklungsanordnungen . . . 144
3.73 Magnetischer Fluss und induzierte Spannung . . . 145
3.74 Zum Wachstumsgesetz . . . 145
3.75 MKL mit Hysterese . . . 150
3.76 Stromverlauf mit Hysterese . . . 150
3.77 Sparschaltung . . . 151
3.78 Vollschaltung . . . 151
3.79 $i(t)$ bei *eisenloser* Spule . . . 153
3.80 $i(t)$ bei einer Spule *mit Eisenkern* . . . 153
3.81 Spannungswandler . . . 155
3.82 Stromwandler . . . 155
3.83 $\hat{i} = 1.5\, I_N$ . . . 156
3.84 $\hat{i} = 15\, I_N$ . . . 156
3.85 Entstehung der Felderregerkurve . . . 158
3.86 Felderregerkurve mit $p = 1$ und $q = 4$ . . . 159

3.87 Räumliche Induktionsverteilung der Grund-, 3. und 5. Oberschwingung 161
3.88 Zeitliche Induktionsverteilung der Grund- und 11. Oberschwingung 161
3.89 Konzentrierte und verteilte Wicklungen 162
3.90 Teilspannungen und Gesamtspannungen einer verteilten Wicklung 163
3.91 Einschwichtwicklung mit Spulen gleicher Weite 166
3.92 Einschichtwicklung mit Spulen ungleicher Weite 167
3.93 Ständerwicklungsanordnung und Zonenplan 168
3.94 Evolventenwicklung eines Turbogenerators 170
3.95 Gesamtdurchflutung bei Belastung 171
3.96 Flussverkettung der Asynchronmaschine 173
3.97 Herleitung des Kreisdiagramms 173
3.98 Heylandkreis 174
3.99 Betriebsverhalten der Asynchronmaschine 176
3.100 Kreisdiagramm der Asynchronmaschine 176
3.101 Oberfeldmomente für die Ordnungszahlen $\nu = 1, -5, 7, -11$ 178
3.102 Nutquerfeld bei Gleichstrom 179
3.103 Nutquerfeld bei Wechselstrom 180
3.104 Stromverdrängungsfaktoren 180
3.105 Verschiedene Käfigläufer 180
3.106 Ersatzschaltbild eines Doppelkäfigläufers 181
3.107 Kloßsche Gleichung 182
3.108 Ermittlung der Anlasswiderstände 183
3.109 Prinzip der Pulssteuerung 184
3.110 Drehmomentenverlauf als $f(U_{d2})$ 185
3.111 Polumschaltbare ASM 185
3.112 Dahlanderschaltung am Beispiel einer Einschichtwicklung 187
3.113 Schaltungsmöglichkeiten der Spulengruppen bei der Dahlanderschaltung 187
3.114 Bremsmoment als Funktion der Drehzahl 189
3.115 Asynchrongenerator im Inselbetrieb 190
3.116 Einphasige Asynchronmaschinen 191
3.117 Querschnitt des untersuchten Turbogenerators 194
3.118 Zonenplan der Ständerwicklung und Erregerwicklung 194
3.119 Felderregerkurven $I_{f0} \cdot N(\alpha)$ und $V_1(\alpha)$ im Leerlauf 195
3.120 Flussverlauf im Leerlauf 196
3.121 Flussdichte in Luftspaltmitte im Leerlauf 196
3.122 Auswertung des Vektorproduktes für einen beliebigen Punkt 199
3.123 Induzierte Teilspannung in einem Elementarbereich 199
3.124 Nutenspannungsstern 200
3.125 Gleichung (3.72) 201
3.126 Bestimmung von U_p 201
3.127 Ständerdurchflutung des belasteten Generators 202
3.128 Feldverteilung bei belastetem Generator 203
3.129 Flussdichte in Luftspaltmitte bei belastetem Generator 204
3.130 Kurzschlussarten beim Synchrongenerator 204
3.131 Dreipoliger Stoßkurzschluss eines Synchrongenerators 205
3.132 Aufbau 206
3.133 Zeigerdiagramm 206
3.134 Stromortskurve 207
3.135 Momentenverlauf 207

4.1 Bestimmung von R_A und U_B . . . 210
4.2 Grafische Ermittlung von R_A und $2\,U_B$ . . . 210
4.3 Eisen- und Reibungsverluste $P_{\mathrm{F+R}}$ als Funktion der Drehzahl . . . 211
4.4 Wirkungsgrad als Funktion des Wellenmomentes . . . 213
4.5 Wirkungsgrad als Funktion des Lastfaktors I/I_N . . . 216
4.6 Vereinfachtes Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine . . . 217
4.7 ESB mit Spannungsabfall der Ständerwicklung . . . 219
4.8 Messung und Auswertung zur Trennen der Eisen- und Reibungsverluste . . . 220
4.9 Ersatzschaltbild mit getrennten Eisen- und Reibungsverlusten . . . 221
4.10 Charakteristische Größen der ASM in Abhängigkeit von n und P_m . . . 222
4.11 Leerlaufkennlinie . . . 225
4.12 Kurzschlusskennlinie . . . 225
4.13 Ermittlung von Kenngrößen aus dem Leerlauf- und Dauerkurzschlussversuch . . . 226
4.14 Bestimmung des Erregerbedarfs bei Belastung . . . 228
4.15 Zeigerdiagramm für V-Kurven . . . 229
4.16 V-Kurven (Generator) . . . 229
4.17 Motorbetrieb bei konstantem Lastmoment . . . 231
4.18 Motormomente bei konstanter Erregung . . . 232
4.19 Synchrongenerator im Inselbetrieb bei ohmsch-induktiver Belastung . . . 232
4.20 Belastungskennlinien . . . 233
4.21 Regulierkennlinien . . . 233
4.22 Stromortskurven bei verschiedenen Leerlaufspannungen . . . 234

A.1 Skalarfeld . . . 237
A.2 Niveaufläche . . . 237
A.3 Vektorfeld . . . 237
A.4 Feldlinien . . . 237
A.5 Quellenfeld . . . 238
A.6 Wirbelfeld . . . 238
A.7 Linienintegral . . . 239
A.8 Beispiel 1 . . . 239
A.9 Beispiel 2 . . . 239
A.10 Äquipotentiallinien . . . 240
A.11 Definition der Divergenz . . . 240
A.12 Divergenz im Magnetfeld . . . 241
A.13 Divergenz im elektrostatischen Feld . . . 241
A.14 Definition der Rotation . . . 242
A.15 Rotationsvektor im Magnetfeld . . . 242
A.16 Elementarfiguren in einem dreidimensionalen Gitternetz . . . 245
A.17 2D-Beispiel: μ-Verteilung . . . 248
A.18 Auswertung $\oint_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0$ . . . 248
A.19 Durchflutungssatz beim Vektorpotential . . . 249
A.20 Durchflutungssatz beim Skalarpotential . . . 249
A.21 Quellenfreiheit beim skalaren Potential . . . 250
A.22 Iterationsablauf . . . 250
A.23 Abmessungen der im Beispiel verwendeten Spule . . . 256
A.24 Durchflutungen und Spannungen für Drahtdurchmesser $0.2 < d < 1.0\,\mathrm{mm}$ . . . 258
A.25 Stromführender Leiter . . . 259
A.26 Leiterschleife . . . 259

A.27 Verlauf von I radial . . . 260
A.28 …oder axial . . . 260
A.29 Ersatzströme . . . 261
A.30 Ersatzladungen . . . 261
A.31 Energiesatz . . . 261
A.32 Feldlinienverlauf und Kraftverteilung in einem Rotorzahn . . . 265
A.33 Schnitt durch die berechnete Maschine . . . 266
A.34 Verlauf des Ankerquerfeldes (AF) . . . 267
A.35 Luftspaltinduktion (nur AF) . . . 267
A.36 Erregerlängsfeld (EF) . . . 267
A.37 Luftspaltinduktionen . . . 267
A.38 Anker- und Erregerfeld (AF+EF) . . . 268
A.39 …mit Wendepolen (AF+EF+WF) . . . 268
A.40 Vergleich der Ergebnisse zwischen linearer und nicht-linearer Berechnung . . . 268
A.41 Schaltung und SCEPTRE-Eingabe zum Leerlaufversuch . . . 269
A.42 Ergebnisse der Leerlaufsimulation mit Tabelle der Namenszuordnung . . . 270
A.43 T-ESB, Lastfall . . . 270
A.44 ESB mit Gegeninduktivität . . . 270
A.45 Lastfall T-ESB und Ergebnisse . . . 271
A.46 ESB mit Gegeninduktivität, Übersetzungsverhältnis 1:1 und 1:25 . . . 271
A.47 Simulationen bei unterschiedlichen Formen der Primärspannungen . . . 273
A.48 Variation des Läuferwiderstandes R_2' . . . 274
A.49 Variation des Läuferreaktanz $X_{2\sigma}'$ . . . 275
A.50 Variation der Hauptinduktivität X_h . . . 276
A.51 Spannungen und Ströme . . . 278
A.52 Koordinatensysteme . . . 278
A.53 Koordinatensysteme und Feldkomponenten der Synchronmaschine . . . 281
A.54 Sinusförmige Ströme . . . 284
A.55 Rechteckförmige Ströme . . . 284
A.56 Wärmeleitung . . . 290
A.57 Konvektion . . . 290
A.58 Wärmestrahlung . . . 291
A.59 Stationäre Erwärmung eines Transistors . . . 292
A.60 Instationäre Erwärmung eines Transistors . . . 293
A.61 Sperrschicht- und Gehäusetemperatur . . . 294

Tabellenverzeichnis

2.1 Vergleich zwischen magnetischem und elektrischem Kreis 9

3.1 Berechnungsschema für den nichtlinearen Magnetkreis in Abb. 3.8 98
3.2 Schnittbandkern SM, kornorientiertes Transformatorenblech 148
3.3 M-Kernbleche, 0.35 mm, 1.3 W/kg bei 1 T, $k_{\mathrm{Fe}} = 0.94$ 148
3.4 Nutenspannungen in V/m 200

A.1 Analogien zwischen thermischen und elektrischen Größen 291
A.2 Grundgrößen 295
A.3 Änderungen bei geometrischer Ähnlichkeit *und* gleicher Beanspruchung 297

1 Vorbemerkungen

1.1 Zu diesem Skript ...

Dieser Umdruck ist als begleitendes Material zu den Experimental-Vorlesungen *Elektrische Maschinen* gedacht. Er gliedert sich in drei Teile:

- Grundlagen (EM), Kapitel 2.1 – 2.6
- Vertiefung (Teil 2), Kapitel 3.1 – 3.6
- Labor (Bewertung), Kapitel 4.1.

Die Anhänge A.1 bis A.12 enthalten ergänzende und weiterführende Aufsätze.

> Ergänzende Informationen, Herleitungen, Hinweise, Beispiele etc., werden eingerückt und in einer etwas kleineren Schrift gedruckt.

Die wesentlichsten Formeln, die man zur Lösung der Aufgaben braucht, sind eingerahmt.

Dieses Skript benutzt bei einigen Diagrammen noch die alte Darstellungsform für Induktivitäten. Bei Dezimalzahlen wird der Dezimalpunkt statt des Dezimalkommas verwendet.

Soweit wie möglich wurde der Text an die neuen Regeln der Rechtschreibreform (ab 1996) angepasst.

Da Dokumente mittlerweile vorwiegend interaktiv gelesen werden, wurde als Unterscheidungsmerkmal bei den Diagrammen die Farbe gewählt. Der Index enthält nur besondere Begriffe, die im Zusammenhang mit der jeweiligen Thematik auftauchen. Schlagwörter lassen sich mit den Suchfunktionen des Dokumentenlesers finden. Als weitere Lesehilfe sind Querverweise farblich hervorgehoben und können durch Anklicken direkt aufgesucht werden (*Hypertext*).

Die Zeichnungen in diesem Skript wurden als Vektorgrafiken mit dem Programm **XFIG**[1] angefertigt, das ganze Skript wurde mit dem Textsatzsystem LuaLaTeX, Version 1.07.0 (TeXLive 2018)[2] gesetzt.

Bildnachweis: Fotos ohne Quellenangaben stammen vom Autor.

[1] https://sourceforge.net/projects/mcj/
[2] https://www.dante.de/

1.2 Ersatzschaltbilder (ESB)

passiver Zweipol : R, L, C

aktiver Zweipol : U, I, (un)gesteuert

Gegeninduktivität : M, beschreibt die magnetische Kopplung zwischen Induktivitäten.

Diese Elemente können sowohl linear als auch nichtlinear sein.

Schaltungen, die nur aus den o. a. Elementen bestehen, lassen sich analytisch oder numerisch meistens einfach berechnen. Man versucht daher, komplizierte physikalische/elektrische Zusammenhänge mit diesen Elementen zu beschreiben (Modelle).

1.3 Zählpfeile

Sie geben eine angenommene Stromrichtung und Polarität der Spannung an. Unabhängig von der Ladungsart ($\oplus, \ominus$) ist allgemein international verbindlich folgendes vereinbart (Abb. 1.1):

	Strompfeil	Spannungspfeil	
Erzeugerzählpfeilsystem (EZS)	$\ominus \Rightarrow \oplus$	$\oplus \Rightarrow \ominus$	gegensinnig
Verbraucherzählpfeilsystem (VZS)	$\oplus \Rightarrow \ominus$	$\oplus \Rightarrow \ominus$	gleichsinnig

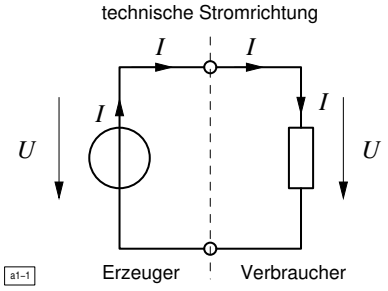


Abb. 1.1: Zählpfeilsysteme

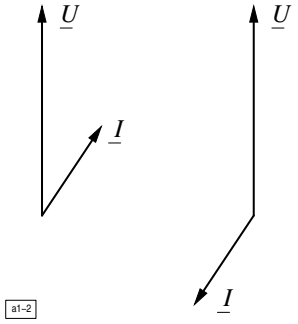


Abb. 1.2: Zeigerdiagramm im VZS und EZS

Bei falsch angenommenen Polaritäten bzw. Stromrichtungen in Ersatzschaltbildern werden die Zahlenwerte negativ und zeigen somit wieder die richtige Richtung an.

1.4 Welches Zählpfeilsystem wählt man?

Prinzipiell wird man das Zählpfeilsystem wählen, bei dem die angenommene Stromrichtung mit der tatsächlichen übereinstimmt, d. h. für das ESB eines Generators wählt man das EZS, entsprechend das VZS für ein Motor-ESB. In beiden Fällen zählt die aufgenommene oder abgegebene Leistung positiv, da Spannung *und* Strom positiv sind. Die einmal vereinbarte Stromrichtung liefert aber auch dann richtige Ergebnisse, wenn die tatsächliche Richtung nicht mit der angenommenen übereinstimmt. Der Strom und die damit verbundenen Spannungsabfälle nehmen dann negative Werte an. Die daraus resultierende negative Leistung entspricht einer Leistungsumkehr.

Genau das passiert aber auch, wenn bei angenommenem VZS ein Motor in den Generatorbetrieb geht und umgekehrt.

Die Wahl des Zählpfeilsystems ist frei und sollte zweckmäßig sein. Die Ergebnisse sind immer richtig, wenn man das Zählpfeilsystem *während* eines Rechnungsganges *nicht* ändert. Zum Zählpfeilsystem passend müssen auch die Zeigerdiagramme gezeichnet werden (Abbildung 1.2). Auch hier ergeben sich unterschiedliche Darstellungen entsprechend der Zählpfeilvereinbarung bei gleichem Sachverhalt.

1.5 Schreibweisen

$i(t)$	zeitabhängige Größen
I, U	Gleichstrom, Effektivwerte
$\boldsymbol{B}, \vec{B}$	Vektorgrößen
$\underline{U}, \underline{I}$	komplexe Größen
$\Re\{...\}, \Im\{...\}$	Real- und Imaginärteil einer komplexen Größe

2 Elektrische Maschinen – Grundlagen

2.1 Physikalische Grundlagen

2.1.1 Magnetischer Kreis

Definitionen und Eigenschaften

Stromdurchflossene Leiter und Werkstoffe, deren atomare Elektronenströme speziell ausgerichtet sind, üben aufeinander Kräfte aus, die durch ein Vektorfeld — das magnetische Feld — beschrieben werden können. Dieses Feld beschreibt die Wirkungslinien der magnetischen Kräfte in Betrag und Richtung. Diese Wirkungslinien lassen sich sichtbar machen (besser: nachweisen) mit Probemagneten (Magnetnadel), Eisenfeilspäne, etc.

Definitionen:

- ☞ Ein Magnet besitzt einen Nordpol und Südpol.
- ☞ Außerhalb des Magneten verlaufen die Feldlinien vom Nordpol zum Südpol (positive Feldrichtung).
- ☞ Gleiche Pole stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an.

Eigenschaften des magnetischen Feldes:

- analog zum elektrischen Feld:
  - ☛ die Tangente an die Feldlinie gibt die Kraftrichtung an;
  - ☛ die Kraftwirkung ist eindeutig, d. h. die Feldlinien schneiden sich nicht;
  - ☛ die Feldliniendichte ist ein Maß für die Stärke der Kraftwirkung;
- im Gegensatz zum elektrischen Feld:
  - ☛ es gibt keine magnetische Ladung (Monopol);
  - ☛ magnetische Feldlinien sind in sich geschlossen; sie haben keinen Anfang und kein Ende.

Magnetische Feldstärke und Durchflutung

Ein stromdurchflossener gerader Leiter erzeugt ein Magnetfeld, dessen Feldlinien konzentrische Kreise in der Ebene senkrecht zum Leiter bilden (Versuch Oersted, 1820).

Definition:

- ☞ Stromstärke I und Magnetfeld bilden ein Rechtssystem.
- ☞ Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Stromrichtung, dann weisen die gekrümmten Finger in Feldrichtung (*Rechte-Hand-Regel*).

Die Stärke des Magnetfeldes entlang der magnetischen Feldlinie bezeichnet man als die *magnetische Feldstärke (Erregung)* $\vec{H}$. Den Zusammenhang zwischen dem Strom I und $\vec{H}$ beschreibt das *Durchflutungsgesetz*:

$$\boxed{\Theta = \oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} I_i \approx \sum H_i\, s_i} \tag{2.1}$$

mit

Θ : Durchflutung (magnetische Spannung), $[\Theta] = 1\,\text{Ampere}\times$ Windungszahl (AW-Zahl)
$\vec{H}$: magnetische Feldstärke, $[H] = 1\,\text{A/m}$.

Das Durchflutungsgesetz ist allgemein gültig. Die Feldstärke $\vec{H}$ kann für beliebig verlaufende stromführende Leiter berechnet werden. Gleichung (2.1) lässt sich einfach berechnen, wenn man als Integrationsweg eine Feldlinie mit H = const aussucht (Abb. 2.1). Die Feldstärke ist um-

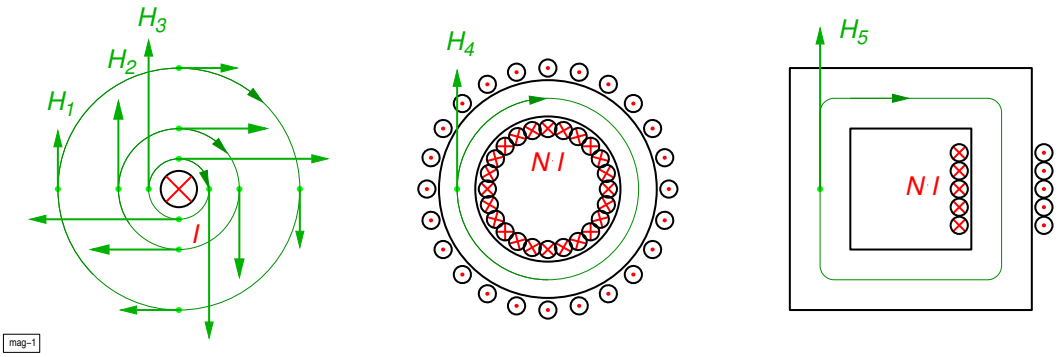


Abb. 2.1: Feldlinienverlauf in einfachen Strukturen

gekehrt proportional zum Abstand benachbarter Feldlinien. Daraus folgt, dass längs parallel verlaufender Feldlinien die Feldstärke konstant sein muss, was für die drei Beispiele zutrifft.

Eine analytische Lösung ist im Prinzip nur für einfache Anordnungen möglich.

Die magnetische Feldstärke ist proportional der Summe der Ströme. Dabei spielt es keine Rolle, woher der Strom kommt. Man kann also den gleichen Strom (Leiter) mehrmals durch die Integrationsfläche führen, um die Durchflutung/magnetische Feldstärke zu erhöhen. Dieses Prinzip führt zur Verwendung von Wicklungen/Spulen.

☞ Zeigen die Finger der rechten Hand in Stromrichtung, dann weist der Daumen zum Nordpol der Spule.

Der Durchflutungssatz verknüpft die magnetische Feldstärke H mit der elektrischen Stromstärke i unabhängig von der elektrischen Spannung u.

Magnetischer Fluss, magnetische Flussdichte

Die Wirkung des magnetischen Feldes ist materialabhängig. Dies wird nicht durch die magnetische Feldstärke berücksichtigt. Deshalb wird als weitere vektorielle Größe die *magnetische Flussdichte* (oder *magnetische Induktion*[1]) $\vec{B}$ eingeführt.

Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ und die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ beschreiben beide Richtung und Stärke einer magnetischen Wirkung. Für das Vakuum (materiefreier Raum) gilt die Proportionalität

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}} \quad \text{als } \textit{Permeabilitätskonstante.}$$

Durch Einbringen von Materie in ein vorhandenes magnetisches Feld kann sich die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ ändern. Die Änderung zwischen $\vec{B}_0$ (ohne Materie) und $\vec{B}_m$ (mit Materie) wird durch die *relative Permeabilität* $\mu_r = \dfrac{|\vec{B}_m|}{|\vec{B}_0|}$ ausgedrückt und ist dimensionslos. Der allgemeine Zusammenhang zwischen der Flussdichte $\vec{B}$ und der Feldstärke $\vec{H}$ lautet dann

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}}\,.$$

μ_r ist abhängig vom Werkstoff:

- $\mu_r < 1$: diamagnetisch, z. B. Bismut, N_2 $(1 - 10^{-4})$
- $\mu_r = 1$: Vakuum
- $\mu_r > 1$: paramagnetisch, z. B. O_2, Platin $(1 + 10^{-4} \ldots 10^{-3})$
- $\mu_r \gg 1$: ferromagnetisch, z. B. Ferrite $(1 + 0.5 \ldots 10^3)$, Mu-Metall $(\approx 10^5)$.

Für den EM-Bau ist der Ferromagnetismus wichtig. Er gestattet die Verstärkung der magnetischen Flussdichte und damit der magnetischen Wirkung um den Faktor 10^3 bis 10^4.

Betrachtet man alle Feldlinien, die durch eine vorgegebene Fläche $\vec{A}$ verlaufen, erhält man den magnetischen Fluss Φ

$$\boxed{\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \quad \text{oder} \quad \vec{B} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\vec{A}}} \tag{2.2}$$

mit den Maßeinheiten

$$[B] = 1 \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{T} \quad \text{(Tesla)}$$

$$[\Phi] = 1\,\mathrm{Vs} = 1\,\mathrm{Wb} \quad \text{(Weber)}.$$

[1] Die magnetische Flussdichte B wird in der Praxis oft auch als »magnetische Induktion« bezeichnet. Der Begriff »Induktion« beschreibt eigentlich einen physikalischen Vorgang, keine physikalische Größe und sollte deshalb vermieden werden.

Magnetisierungskennlinie

Die Funktion $B = f(H)$ für Eisenwerkstoffe bezeichnet man als Magnetisierungskennlinie (MKL). Leider ist der Zusammenhang zwischen B und H nicht-linear (siehe Abb. 2.2). Außerdem ist der Verlauf der Magnetisierung nicht eineindeutig und hängt von der sog. Vorgeschichte des Eisens ab (*Hysterese*). Zur Beurteilung einer MKL dienen die Punkte B_r und H_c. Mit B_r bezeich-

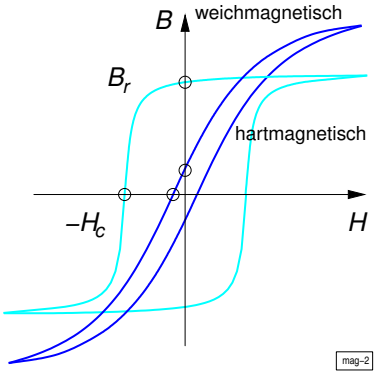


Abb. 2.2: Magnetisierungskennlinien

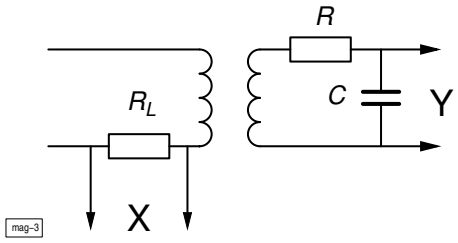


Abb. 2.3: Messschaltung

net man die Restinduktion (*Remanenz*) für $I = H = 0$. Als *Koerzitivfeldstärke* H_c bezeichnet man den Wert, der aufgebracht werden muss, damit $B = 0$ wird. Magnetisch weiche Werkstoffe haben kleine Koerzitivfeldstärken ($0.1 < H_c < 10^3 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$), bei harten Werkstoffen, z. B. Dauermagneten, kann H_c Werte bis $10^7 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ annehmen. Abgesehen von Maschinen mit Dauermagneten (*Permanentmagneten*) werden im EM-Bau vorwiegend weiche Eisenwerkstoffe mit $H_c \approx 100 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ (Silicium) bis $H_c \approx 300 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ (Kobalt) verwendet.

Die durch die Hysterese aufgespannte Fläche ist ein Maß für die Energie, die zur Ummagnetisierung notwendig ist und führt zu den sog. *Eisenverlusten*, sollte also möglichst klein sein. Die Eisenverluste sind abhängig von der Frequenz und der maximalen Flussdichte, typische Werte für Weicheisenbleche sind 0.06–10 W/kg bei 0.2/0.5 mm Dicke, 1 T und 50 Hz.

Bedeutung der ferromagnetischen Werkstoffe für den EM-Bau:

normales Weicheisen: Verstärkung der magnetischen Wirkung; Führung des magnetischen Flusses;

Permanentmagnete: Ersetzen von gleichstromerregten Spulen; kleinere Baugrößen; einfachere Konstruktion; kleinere Zeitkonstanten.

Versuch 2.1.1 *Die dynamische Magnetisierungskennlinie $B = f(H)$ lässt sich mit der Schaltung nach Abb. 2.3 als Oszillogramm darstellen. Die am Widerstand R_L abgegriffene Spannung ist dem Magnetisierungstrom proportional und entspricht der magnetischen Feldstärke H. Integriert man die Ausgangsspannung des Transformators mit einem RC-Glied, erhält man eine Spannung, die dem Fluß Φ und damit der Induktion B proportional ist.*

Nach Gleichungen (2.2) und (2.4) gilt: $B(t) = \frac{1}{A}\Phi(t) \sim \int U(t)\,\mathrm{d}t$.

Berechnung

Die Berechnung eines magnetischen Kreises erfolgt in Analogie zum elektrischen Stromkreis. Tabelle 2.1 stellt die gleichwertigen Größen gegenüber. »Treibende Kraft« ist die Durchflutung Θ [2], die in der magnetischen Anordnung den Fluss[3] Φ erzeugt, der wiederum von den magnetischen Widerständen im Kreis abhängt. Die Berechnung gestaltet sich recht einfach, solange R_m konstant ist (z. B. bei Luft). Im allg. verwendet man im EM-Bau ferromagnetische Werkstoffe, deren magnetischer Widerstand induktionsabhängig ist. Damit verhält sich der magnetische Kreis *nichtlinear*, die Berechnung wird erschwert. Allgemein sucht man zu einem vorgegebenen

Tabelle 2.1: Vergleich zwischen magnetischem und elektrischem Kreis

elektrisch		magnetisch	
Spannung	$[U] = 1\,\mathrm{V}$	Durchflutung	$[\Theta] = 1\,\mathrm{A}$
Strom	$[I] = 1\,\mathrm{A}$	Fluss	$[\Phi] = 1\,\mathrm{Vs}$
Widerstand	$[R] = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 1\,\Omega$	Widerstand	$[R_m] = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}$
Leitwert	$G = R^{-1}$	Leitwert	$\Lambda = R_m^{-1}$
Stromdichte	$[J] = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	Flussdichte	$[B] = 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$
$I = \frac{U}{R} = U \cdot G$		$\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \Theta \cdot \Lambda$	
$R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$		$R_m = \frac{l}{\mu \cdot A}$	
$J = \frac{I}{A}$		$B = \frac{\Phi}{A}$	

Fluss den notwendigen (Erreger-)Strom oder umgekehrt. Die Berechnung läuft in der folgenden Reihenfolge ab:

$$\boxed{I} \Longleftrightarrow \sum I = \oint H \mathrm{d}s \Longleftrightarrow \boxed{H} \Longleftrightarrow H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \Longleftrightarrow \boxed{B} \Longleftrightarrow B = \frac{\Phi}{A} \Longleftrightarrow \boxed{\Phi}$$

Vernachlässigt man die Streuung, muss der Fluss in allen Teilen des magnetischen Kreises, unter Berücksichtigung paralleler Zweige, gleich groß sein.

Soll die Nichtlinearität von ferromagnetischem Material berücksichtigt werden, erhält man den Zusammenhang zwischen B und H direkt aus der Magnetisierungskennlinie.

[2] In der Literatur wird auch der Formelbuchstabe V verwendet.
[3] Man beachte die Sinnverwandschaft zwischen den Wörtern »Strom« und »Fluss«.

2.1.2 Induktionsgesetz

Elektromagnetische Induktion

Faraday, 1831: Jede zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ induziert eine elektrische (Quell-) Spannung u_q:

$$\boxed{u_q = (-)N\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = (-)N\,\frac{\mathrm{d}(\vec{B}\cdot\vec{A})}{\mathrm{d}t} = (-)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}}\,. \tag{2.3}$$

Hierbei stellt Φ den magnetischen Fluss durch *eine* Windung dar. Die Höhe der induzierten Spannung ist proportional der Windungszahl N. Die Größe Ψ beschreibt den Gesamtfluss (*verketteter Fluß*).

Das Minuszeichen in Gleichung (2.3) hat »akademischen Charakter«. Strenggenommen unterscheidet man zwischen der Quellenspannung u_q, die sich aus der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ ergibt, und der sog. EMK e (Elektromotorische Kraft), die man aus der induzierten Feldstärke $\vec{E}_i$ herleitet. Es gilt $\vec{E} = -\vec{E}_i$. Im Prinzip verwendet man den positiven Wert und bezeichnet ihn als die *induzierte Spannung*.

Das Induktionsgesetz verknüpft den magnetischen Fluss Φ mit der Spannung u unabhängig von der elektrischen Stromstärke i.

Schließt man einen Stromkreis, in dem eine Spannung induziert wird, fließt ein *Induktionsstrom*, der selber ein Magnetfeld erzeugt, welches so gerichtet ist, dass es seiner Ursache entgegenwirkt, d. h. das primäre Feld (Ursache) schwächt.

☞ Der Induktionsstrom wirkt seiner Ursache entgegen[4](Lenzsche Regel).

Gleichung (2.3) gilt für alle Anordnungen mit geschlossenen Flächen und besagt, dass Spannungen durch Induktionsänderungen $\mathrm{d}\vec{B}$ und/oder Flächenänderungen $\mathrm{d}\vec{A}$ induziert werden.

Bewegt sich ein Leiterstück der Länge l mit der Geschwindigkeit v in einem Magnetfeld $\vec{B}$ und stehen die drei Größen senkrecht aufeinander, ergibt sich für die induzierte Spannung

$$\boxed{u_i = N\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N\cdot\vec{B}\,\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = N\cdot\vec{B}\cdot l\,\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = N\cdot B\cdot l\cdot v}\,. \tag{2.4}$$

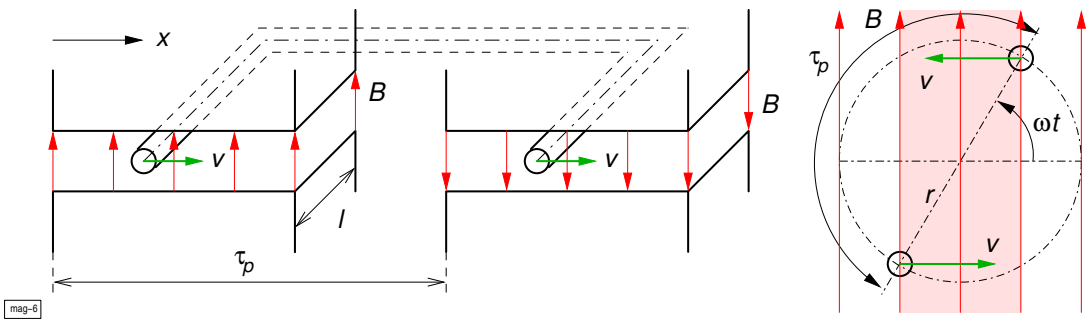


Abb. 2.4: Beispiele zum Induktionsgesetz

[4]Andernfalls hätte man ein »Perpetuum mobile«.

Abbildung 2.4 zeigt zwei Anwendungen des Induktionsgesetzes. Bei der linearen Anordnung (links) wird in jedem Leiterstab, der sich mit der Länge l und der Geschwindigkeit v im Luftspaltfeld B bewegt, die Spannung $U = B \cdot l \cdot v$ induziert. Durch die Reihenschaltung bilden die beiden Leiterstäbe eine Windung. Die induzierten Spannungen addieren sich nur dann zur doppelten Spannung, wenn B am zweiten Leiter seine Richtung wechselt (Vektorcharakter von B und v in Gleichung (2.4) beachten!).

Den Abstand, bei dem sich eine magnetische Anordnung mit entgegengesetzt gerichteter Feldpolarität wiederholt, bezeichnet man als *Polteilung* τ_p. Nach $2\,\tau_p$ wiederholt sich die Feldstruktur.

Die rechte Anordnung in Abb. 2.4 zeigt eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Leiterschleife (Windung) in einem homogenen, konstanten Magnetfeld B. Der durch die Windung durchtretende Fluss ändert sich mit dem Winkel ωt:

$$\Phi(t) = B \cdot 2 \cdot r \cdot l \cdot \cos \omega t \; .$$

Eingesetzt in Gleichung (2.4) ergibt sich für die induzierte Spannung die wichtige Abhängigkeit

$$\boxed{u_i = N \cdot B \cdot D \cdot l \cdot \omega \cdot \sin \omega t \sim \omega} \tag{2.5}$$

mit dem Durchmesser $D = 2 \cdot r$. Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man die Spannung über die Geschwindigkeit der Leiterstäbe berechnet. Jeder Leiterstab bewegt sich mit variabler Geschwindigkeit durch ein konstantes Magnetfeld.

Bei dieser Anordnung beträgt die Polteilung $\tau_p = \pi \cdot D/2$ und entspricht 180°.

Tritt das sich ändernde Magnetfeld durch einen elektrisch leitenden Körper, z. B. Eisen, Kupfer, Aluminium, werden die induzierten Spannungen am Ort ihres Entstehens quasi kurzgeschlossen, es kommt zu *Wirbelströmen*, die Wärme erzeugen (Verlustwärme, induktives Härten, Induktionsherd). Wirbelströme verursachen mit dem sie verursachenden Magnetfeld Kräfte (Wirbelstrombremse). Durch Unterteilung und elektrische Isolation des leitfähigen Werkstoffes (*Lamellierung,*

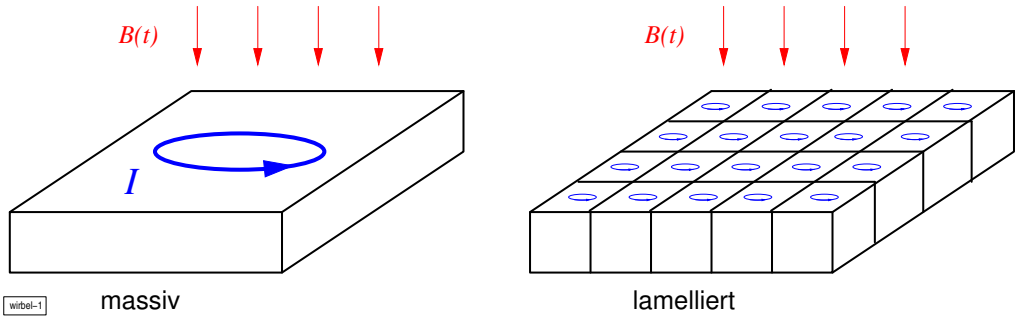


Abb. 2.5: Wirbelströme in massiven und lamellierten leitfähigen Werkstoffen

Blechung) kann man Wirbelströme reduzieren (Abb. 2.5).

Versuch 2.1.2 *Erwärmung eines massiven und eines lamellierten Eisenkerns in einem Wechselfeld.*

Versuch 2.1.3 *(Pendel-)bewegung einer massiven und einer geschlitzten Aluminiumplatte im konstanten Magnetfeld.*

Selbstinduktion, Induktivität

Stammt beim Induktionsvorgang die Feldänderung vom »eigenen« Strom, wird bei Stromänderungen diesem Strom der Induktionsstrom überlagert. Auf Grund der Lenzschen Regel (Vorzeichen) bedeutet das: der Induktionsstrom wirkt seiner Ursache entgegen, er versucht die Änderung zu verhindern, die Stromänderung wird *verzögert*.

Die Höhe der selbstinduzierten Spannung lässt sich aus der Stromänderung herleiten:

$$u_i = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N\,A\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = N\,A\,\mu_0\,\mu_r\,\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\ . \tag{2.6}$$

Den Zusammenhang zwischen H und I liefert das Durchflutungsgesetz (2.1), in dem die Geometrie und die Windungszahl N der Anordnung eingeht. Es gilt $H = f(I)$. Wegen der Linearität zwischen H und I kann man auch schreiben $H = k \cdot I$, wobei k auch die Windungszahl N berücksichtigt.

Damit ergibt sich für die induzierte Spannung in Gleichung (2.6):

$$u_i = \underbrace{N \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot k}_{L}\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

und somit

$$\boxed{u_i = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \qquad \text{mit} \quad [L] = 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{H} \quad \text{(Henry)}\ . \tag{2.7}$$

☞ Die *Induktivität* L ist geometrieabhängig und ändert sich mit N^2.

☞ Falls die Spule/Wicklung ferromagnetisches Material enthält, ist die Induktivität zusätzlich auch stromabhängig, da $\mu_r = f(I)$!

Aus den Gleichungen (2.3) und (2.7) erhält man

$$N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

und daraus folgt

$$\boxed{L = N\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}i}} \tag{2.8}$$

Das bedeutet, dass die Induktivität das Verhältnis von Spulenfluss zum Spulenstrom darstellt.

☞ Ströme durch Induktivitäten können sich nur stetig ändern (wegen Gleichung (2.7)). Anwendung: z. B. Glättungsdrosseln.

Sind zwei oder mehrere Induktivitäten magnetisch gekoppelt (z. B. beim Transformator) wird neben der Selbstinduktionsspannung noch eine Spannung durch die gekoppelten *Gegeninduktivitäten* erzeugt. Die Gegeninduktivität M berücksichtigt den gekoppelten Fluss (Hauptfluss) und besitzt ebenfalls die Maßeinheit H.

Anwendung des Induktionsgesetzes

Die nach den Gleichungen (2.3) und (2.7) induzierten Spannungen ergeben sich aus den mit der Spule verketteten Magnetfeld*änderungen*. Je nach Ursache unterscheidet man zwischen einer

Transformationsspannung: $\vec{A} = \text{const}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \neq \text{const}$
Transformator (ruhender Energiewandler)

Bewegungsspannung: $\vec{B} = \text{const}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \neq \text{const}$
Motoren, Generatoren (rotierende Energiewandler)

Selbstinduktionsspannung: $L = \text{const}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \neq \text{const}$
trifft auf alle ruhende und bewegte magnetische Anordnungen zu.

2.1.3 Kräfte

...auf stromführende Leiter

Für die Kraft auf stromführende Leiter gilt

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\,(\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B})} \tag{2.9}$$

mit der Maßeinheit

$$[F] = 1\,\frac{\mathrm{A\ m\ V\ s}}{\mathrm{m^2}} = 1\,\frac{\mathrm{W\ s}}{\mathrm{m}} = 1\,\frac{\mathrm{N\ m}}{\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{N}\,.$$

Falls $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{l}$ steht, ergibt sich der einfache Zusammenhang

$$\boxed{F = I \cdot l \cdot B}\,. \tag{2.10}$$

Das durch den Leiterstrom (Abb. 2.6) erzeugte Eigenfeld überlagert sich mit dem vorhandenen Magnetfeld. Oberhalb des Leiters tritt eine Feldverstärkung auf, unterhalb eine Feldschwächung.

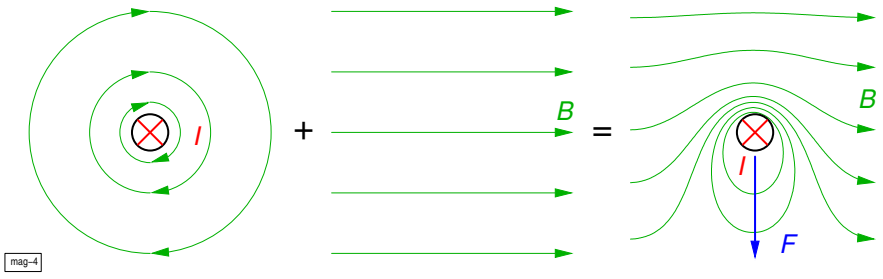


Abb. 2.6: Rückwirkung eines stromführenden Leiters

☞ Daumen → Stromrichtung, Zeigefinger → Feldrichtung, Mittelfinger → Kraftrichtung (Rechte-Hand-Regel).

Kräfte auf stromführende Leiter spielen im EM-Bau eine wichtige Rolle. Die im Fehlerfall auftretenden dynamischen Stromkräfte auf im **Luftraum** befindliche Spulenteile (z. B. Wickelköpfe) können zur Zerstörung einer Maschine führen.

...auf ferromagnetische Stoffe

Jede elektrische, rotierende Maschine besteht aus einem feststehenden Teil (*Stator, Ständer*) und einem rotierenden Teil (*Rotor, Läufer*). Beide Teile trennt ein Luftspalt. Will man den Luftspalt verringern, müssen die Leiter in Nuten gelegt werden (siehe Abschnitt 2.1.5). Da Eisen wegen seiner hohen Permeabilität den magnetischen Fluss besser führt als Luft, wird das Feld in den Nuten geringer (Abb. 2.7). Wendet man die oben hergeleiteten Kraftgleichungen auf diese Anordnungen an, so wird auch die Kraft geringer. Aber in der Praxis zeigt sich der entgegengesetzte Effekt: das Drehmoment nimmt sogar noch etwas zu. Daraus kann man folgern, dass neben den Kräften auf stromführende Leiter auch Kräfte auf Eisenkörper wirken müssen. Die Natur unterscheidet jedoch nicht zwischen Leiter- und Elementarströmen. Alle Kräfte werden hervorgerufen durch atomare Elektronenströme (Kreisströme), die wiederum magnetische Momente erzeugen (Bahnmoment, Spinmoment).

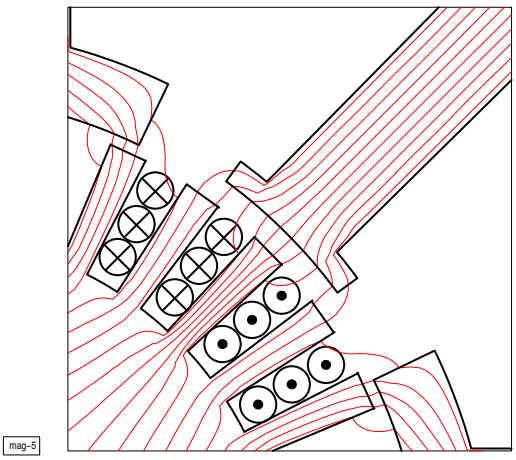


Abb. 2.7: Feld in einer Gleichstrommaschine

Für die Kraftberechnung auf ferromagnetische Materialien sind verschiedene Methoden entwickelt worden [2, 3, 4] (siehe Anhang Das Drehmoment in elektrischen Maschinen). Ein Literaturstudium zeigt, dass sich seit Generationen Wissenschaftler Gedanken über dieses Thema gemacht haben, um zufriedenstellende Erklärungen und Berechnungsmethoden zu finden. Eine analytische Berechnung ist nur für sehr einfache Anordnungen mit konstanter Permeabilität möglich. In der Praxis verwendet man vorwiegend numerische Methoden.

Für kleine Luftspalte δ lässen sich mit guter Näherung die Normal- und Tangentialkräfte auf ferromagnetische Oberflächen mit der sog. *Kranformel* berechnen:

$$\boxed{F = \frac{A}{2\mu_0} B^2} \tag{2.11}$$

mit der Eisenquerschnittsfläche A und der Luftspaltinduktion B.

Anwendung: kurze translatorische Bewegungen; elektromagnetische Antriebe für Hubmagnete, Schalter.

Das Drehmoment elektrischer Maschinen wird vorwiegend durch diese Kräfte hervorgerufen.

2.1.4 Rückwirkung (Lenzsche Regel)

Am Beispiel einer drehbaren Leiterschleife im Magnetfeld kann man die Wirkungsweise elektrischer Maschinen veranschaulichen (Abb. 2.8): auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld wirkt eine Kraft, die zu einem Drehmoment führt (siehe Kapitel ...auf stromführende Leiter). Bewegt sich die Leiterschleife im Magnetfeld und ändert sich dabei der magnetische Fluss durch die Schleife, wird eine Spannung induziert (siehe Kapitel Elektromagnetische Induktion).

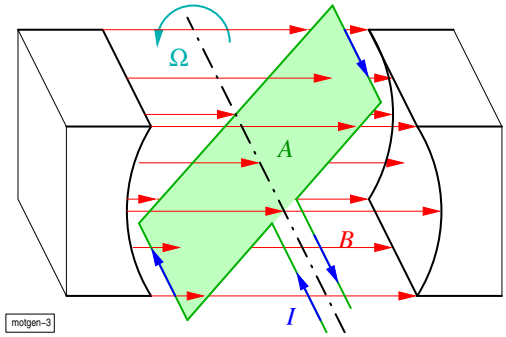


Abb. 2.8: Rückwirkung: Motorbetrieb - Gegenspannung, Generatorbetrieb - Gegenmoment

☞ Beide Vorgänge laufen gleichzeitig ab:

- Ein von außen zugeführter Strom erzeugt ein Drehmoment und bewirkt eine Drehung der Leiterschleife, *gleichzeitig* wird durch die Flussänderung eine *Gegen*-Spannung induziert, die nach der Lenzschen Regel dem Strom ent*gegen*wirkt (Motorbetrieb).
- Dreht man die Leiterschleife durch ein äußeres Moment, entsteht eine Spannung in der Leiterschleife, die bei angeschlossenem Verbraucher wiederum einen Strom zur Folge hat, der *gleichzeitig* nach der Lenzschen Regel ein *Gegen*-Moment erzeugt (Generatorbetrieb).

2.1.5 Konstruktive Entwicklung

Luftspalt

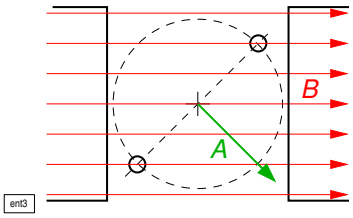


Abb. 2.9

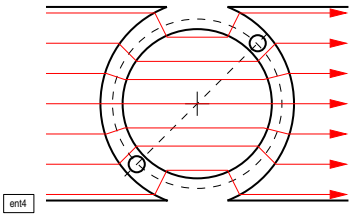


Abb. 2.10

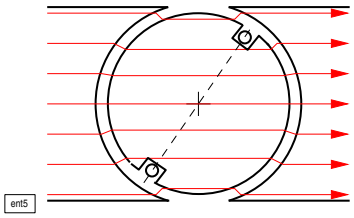


Abb. 2.11

Die in Abb. 2.9 dargestellte Leiterschleife dreht sich in einem Luftspalt, der mindestens so groß sein muß wie der Durchmesser der Schleife.

Beispiel

Bei einer angenommenen Luftspaltinduktion von 1 T und einem Luftspalt von 30 cm ist nur für den Luftspalt eine Durchflutung von etwa 240 000 A erforderlich!

Als ein weiterer Nachteil dieser einfachen Anordnung erweist sich, dass das abgegebene Moment und die induzierte Spannung nicht gleichmäßig sondern sinusförmig verlaufen, da der Feldvektor $\vec{B}$ und der Flächenvektor $\vec{A}$ nicht immer senkrecht aufeinander stehen.

Füllt man das Innere der Leiterschleife mit Eisen und beeinflußt man den Feldverlauf des externen Feldes (*Erregerfeld*) mittels *Polschuhen* entsprechend Abb. 2.10, reduziert sich der Durchflutungsbedarf beträchtlich. Gleichzeitig bleiben die induzierte Spannung und der Momentenverlauf unter den Polschuhen (homogenes Feld) annähernd konstant. Die Luftspaltlänge ergibt sich aus der Leiterhöhe.

Beispiel

Bei einem Gesamtluftspalt von $2 \cdot 1.5\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$ beträgt die erforderliche Durchflutung etwa 24 000 A.

Der Erregerbedarf läßt sich weiter senken, wenn man die Leiter innerhalb des Läufers unterbringt (siehe Abb. 2.11). Der Luftspalt dient jetzt nur noch dazu, die Drehbewegung des Läufers zu ermöglichen. Technologisch sind Werte von einigen Zehntel Millimeter möglich (z. B. Asynchronmaschine).

Beispiel

Geht man von einem Gesamtluftspalt von 0.3 mm aus, werden zur Erzeugung von 1 T nur noch etwa 240 A benötigt.

Magnetischer Kreis

Zur Erzeugung des Erregerfeldes kann man die Polschuhe seitlich mit einem Eisenkern (*Schenkel*), der die Erregerwicklung trägt, schließen (C-Magnet), wie es Abb. 2.12 zeigt. Diese einfache Anordnung wird teilweise bei Kleinmotoren gewählt, z. B. zweipolige Spaltmotoren. Man kann die Erregerwicklung auch auf 2 Schenkel verteilen, die Eisenquerschnitte der Schenkel brauchen dann nur halb so groß zu sein (gestrichelte Ausführung).

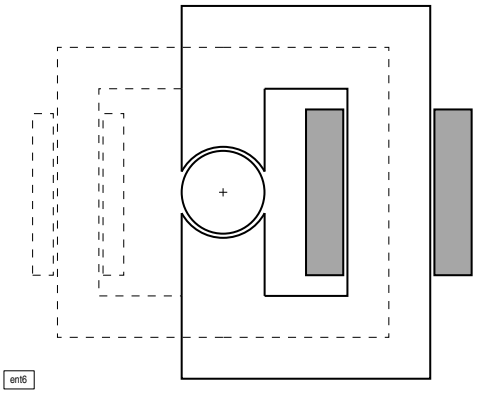


Abb. 2.12: Unsymmetrischer und …

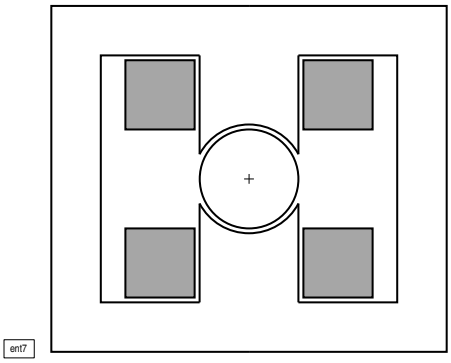


Abb. 2.13: …symmetrischer Magnetkreis

Bringt man die Erregerwicklung auf den Polschuhen unter, erhält man die Anordnung nach Abb. 2.13. Diese Form, die bei den ersten Gleichstrommaschinen verwendet wurde, benutzt man heute für Maschinen, bei denen die äußeren Eisenkerne gleichzeitig als Gehäuse dienen (genietete oder geschweißte Ausführung). Diese Bauweise wird seit Jahren wegen des geringeren Gewichts und der höheren mechanischen Festigkeit (Stahlbauweise) bevorzugt. Je nach Einsatzgebiet werden die massiven Eisenkerne durch Bleche ersetzt, z. B. Universalmotoren.

Die klassische Form einer zweipoligen Maschine zeigt Abb 2.14. Aus fertigungstechnischen Gründen erhält der Eisenkern eine runde Form. Bei Maschinen, bei denen keine Wirbelströme im Erregerkreis auftreten, bildet das Gehäuse den magnetischen Kreis und besteht aus Gusseisen. Ist der Eisenkern geblecht, wird das Blechpaket entweder im massiven Gehäuse befestigt oder erhält Befestigungselemente zum Aufstellen der Maschine.

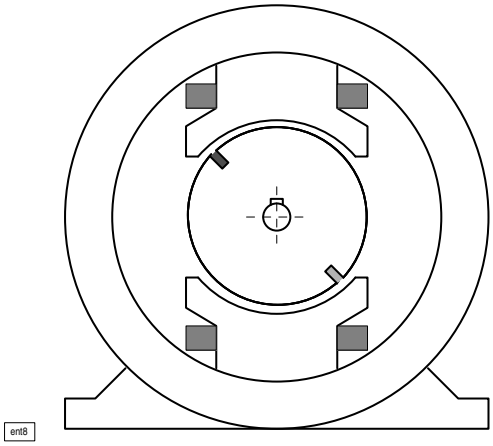


Abb. 2.14: Außenpolmaschine

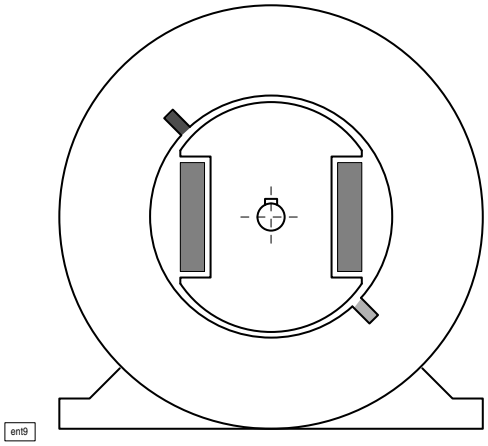


Abb. 2.15: Innenpolmaschine

Bisher wurde davon ausgegegangen, dass die Leiterschleife drehbar war und den Läufer (oder Rotor, Anker) der Maschine darstellte. Die Erregerwicklung war im feststehenden Teil der Maschine (Ständer, Stator, Gehäuse) untergebracht (*Außenpolmaschine*).

Für das Induktions- und Kraftgesetz ist es unerheblich, welches Teil der Maschine sich bewegt oder feststeht. Es kommt nur auf die relative Bewegung von Erregerfeld und Leiterschleife zueinander an.

Lässt man dagegen die Erregerpole rotieren, spricht man von einer *Innenpolmaschine*. Die Leiterschleife wird dabei im Ständer untergebracht, wie es Abb. 2.15 für eine zweipolige Maschine zeigt.

Aufgabe

Zeichnen Sie in die Abbildungen 2.14 und 2.15 den Feldlinienverlauf ein.

Baugröße

Nach Gleichung (2.10) wird das Drehmoment der Maschine bestimmt durch den Leiterstrom, das Erregerfeld, die wirksame Leiterlänge und den Abstand des stromführenden Leiters vom Drehpunkt. Der Strombelastbarkeit des Leiters sind thermische Grenzen gesetzt, ebenso kann man das Erregerfeld wegen der Eisensättigung nicht beliebig vergrößern. Im allg. wird man zur Erzielung hoher Drehmomente die Abmessungen der Maschine vergrößern. Langsamlaufende

Maschinen führt man mit großem Durchmesser aus (Walzwerkantriebe, Fördermaschinen, Wasserkraftgeneratoren). Höhere Drehzahlen bei gleichem Drehmoment bedeuten höhere Leistung und führen zu »schlanken« Maschinen (Turbogeneratoren).

Zum Teil sind die Abmessungen elektrischer Maschinen genormt. Im allg. stimmt das Maß für die sog. *Wellenhöhe* (*Achshöhe*) mit der Zahlenangabe für die *Baugröße* überein [5, Anbaumaße]. Die *Auswahlreihe* enthält folgende empfohlene Achshöhen: **56, 63, 71, 80, 90, 100, 112, 132, 160, 180, 200, 225, 250, 280, 315, 355, 400, 450, 500, 560, 630, 710, 800, 900 und 1000**.

Im Prinzip haben Maschinen gleicher Baugröße das gleiche Nenndrehmoment. Da die Leistung definiert ist als das Produkt aus Drehmoment und Drehzahl ($P = \omega \cdot M$), folgt daraus auch, dass Motoren mit hohen Drehzahlen kleinere Abmessungen besitzen und leichter sind als leistungsgleiche Motoren mit niedrigeren Drehzahlen.

Bei den bisherigen Betrachtungsweisen wurde das Erregerfeld von 2 Polen (1 Polpaar) aufgebracht. Maschinen mit großem Durchmesser lassen sich räumlich und magnetisch besser ausnutzen, wenn man sie mit einer höheren Polpaarzahl baut. Dazu werden längs des Umfangs mehrere Erregerpole mit abwechselnder Polarität angebracht. Im gleichen Maß ordnet man zusätzliche Leiterschleifen an (siehe dazu Abbildungen 2.25, 2.84 bis 2.86).

Bei einer Maschine mit dem Bohrungsdurchmesser D des Stators und p Polpaaren ($2\,p$ polig) beträgt die *Polteilung*

$$\boxed{\tau_p = \frac{\pi \cdot D}{2\,p}}$$

Nach 2 Polteilungen liegen die gleichen magnetischen Verhältnisse vor. Ordnet man dem Feldverlauf längs der 2 Polteilungen den elektrischen Winkel α_{el} zu, besteht zwischen dem räumlichen Winkel α_{mech} die Beziehung

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{el}} = p \cdot \alpha_{\mathrm{mech}}}$$

d. h. bei einer 2-poligen Maschine stimmen elektrischer und räumlicher Winkel überein.

Verwendung von Permanentmagneten

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Erregung des Feldes durch stromduchflossene Spulen angenommen und gezeichnet. Dem Vorteil der einfachen Feldsteuerung mittels externer Stromversorgung steht der Nachteil der sogenannten Erregerverluste gegenüber.

Ersetzt man den bewickelten Schenkel durch einen oder mehrere Permanentmagnete, ändert sich die Funktionsweise der Maschine nicht. Die genannten Vor- und Nachteile sind jetzt vertauscht: es treten keine Erregerverluste auf, das Erregerfeld läßt sich nicht ändern — und auch nicht abschalten. Einen Kompromiss erhält man, wenn man beide Systeme kombiniert. Die Permanentmagneten liefern die Grunderregerung, die zusätzliche Erregerwicklungen können das Feld verstärken oder schwächen.

Permanentmagnete können in verschiedenen Formen (Stab, Scheibe, Platte, Ring, Topf, Hufeisen, etc.) und mit unterschiedlichen Magnetisierungsrichtungen (axial, radial, diametral, streifenförmig, mehrpolig) hergestellt werden. Dies erlaubt eine optimale Anpassung an die Maschinenkonstruktion.

2.1.6 Energiewandlung

Elektromechanische Wandler

Die nachfolgende Einteilung erfolgt nach dem Energiewandlungs*prinzip* [6]:

- **elektromagnetisch:**
  - Eine stromdurchflossene Spule erzeugt ein Magnetfeld, welches an den Grenzflächen von ferromagnetischen Stoffen ($\mu_r > 0$) Flächenkräfte erzeugt, $F \sim B^2$.
    Beispiele: Motor/Generator (siehe auch 'elektrodynamisch'), Elektromagnet, Relais.
  - Beim Auf-/Abmagnetisieren eines ferromagnetischen Stoffes erfährt der Stoff eine Längenänderung, die durch *Magnetostriktion* hervorgerufen wird. Die Längenänderung ist sehr klein $\Delta l/l \leq 10^{-4}$ und materialabhängig.
    Beispiele: Ultraschallerzeugung, mechanische Filter, Brummgeräusch bei (Netz-) Transformatoren.
- **permanentmagnetisch:**
  Das magnetische Feld wird durch einen Permanentmagneten erzeugt. Eine Kombination von stromdurchflossenen Spulen und Permanentmagneten ist möglich.
  Beispiel: (Klein-) Motoren.
- **elektrostatisch:**
  - Ein elektrisches Feld übt auf die Grenzflächen von Isolierstoffen ($\varepsilon_r > 0$) eine Kraft aus analog zum elektromagnetischen Feld jedoch wesentlich geringer ($F \sim \varepsilon, E^2$).
  - Durch den *piezoelektrischen* Effekt verformen sich bestimmte Stoffe, analog zur Magnetostriktion, beim Anlegen einer elektrischen Spannung. Die Längenänderung beträgt etwa $\Delta l/l \leq 10^{-3}$.
    Beispiele: Schwinger, mechanische Filter, Biegeelemente (*Bimorphe*), Motoren, Ultraschallerzeuger, Piezoaktoren.
- **elektrodynamisch:**
  Auf stromdurchflossene Leiter (bewegte Ladungen) wirkt eine Kraft, $F \sim B, i, l$.
  Beispiele: Gleichstrommaschine, Synchronmaschine, Asynchronmaschine.
- **elektrothermisch:**
  Die Kraft entsteht durch Wärmeausdehnung eines Körpers. Der Hub ist relativ klein und materialabhängig $\Delta l/l \approx 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$.
  Beispiel: Bimetallschalter.

Arten

Elektrische Maschinen wandeln im allgemeinen elektrische Energie in mechanische um (Motor) und umgekehrt (Generator). Man spricht von *rotierenden* Energiewandlern. Im Gegensatz dazu formen *ruhende* Energiewandler die elektrische Energie auf eine andere elektrische Größe (Spannung, Strom, Stromart) um. Im weitesten Sinne geschieht dies durch elektronische Schaltungen (Stromrichter). Man rechnet diese Energiewandler der Leistungselektronik zu. Für den Sonderfall der reinen Wechselstrom- und Wechselspannungsumformung verwendet man Transformatoren, die man zu den elektrischen Maschinen zählt, obwohl die Energiewandlung magnetisch, also ohne bewegte Teile erfolgt.

Leistungsbilanz

Für stationäre Betriebszustände rechnet man statt mit Energien mit Leistungen. Bei der Umwandlung der Leistung P_1 in die Leistung P_2 entstehen Umwandlungsverluste P_v:

$$P_1 = P_2 + P_v \; . \tag{2.12}$$

Das Verhältnis von abgegebener zu aufgenommener Leistung bezeichnet man als Wirkungsgrad η:

$$\boxed{\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_v} = \left(1 - \frac{P_v}{P_1}\right)} \; . \tag{2.13}$$

Da bei ruhenden Energiewandlern keine mechanischen Verluste auftreten, ist bei gleicher Leistung ihr Wirkungsgrad größer als der der rotierenden Energiewandler.

Grundsätzlich nimmt der Wirkungsgrad mit wachsender *Bemessungsleistung*[5] (früher »Nennleistung«) zu.

Je nach Art der Energiewandlung sind für P_1 und P_2 die mechanische Leistung P_{mech}

$$\boxed{P_{\text{mech}} = \Omega \cdot M = 2\pi \cdot n \cdot M}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit Ω bzw. der Drehzahl n und dem Drehmoment M und/oder die elektrische Leistung P_{el}

$$\begin{aligned} P_{\text{DC}} &= U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \\ P_{\text{AC}} &= U \cdot I \cdot \cos\varphi \\ P_{\text{3AC}} &= \sqrt{3}\, U \cdot I \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

einzusetzen mit der Umrechnung

$$\boxed{1\,\text{Nm} = 1\,\text{Ws}} \; .$$

Damit ergeben sich folgende Leistungsbilanzen:

Motorbetrieb: $P_{\text{mech}} = P_{\text{el}} - P_v$

Generatorbetrieb: $P_{\text{el}} = P_{\text{mech}} - P_v$

Transformator: $P_{\text{el2}} = P_{\text{el1}} - P_v$

[5] Nach DIN VDE 0530 Teil 1 bedeuten:

Bemessungsbetrieb: die Gesamtheit aller elektrischen und mechanischen Größen in Dauer und zeitlicher Folge, wie sie für die Maschine vom Hersteller festgelegt und auf dem Leistungsschild angegeben sind. Die Maschine erfüllt dabei die vereinbarten Bedingungen.

Bemessungsgröße: Größe zur Kennzeichnung des Bemessungsbetriebes.

Bemessungsleistung: Leistung zur Kennzeichnung des Bemessungsbetriebes.

Verlustarten

Wicklungsverluste

Der Wicklungswiderstand R eines Leiters ergibt sich aus der *temperaturabhängigen* Leitfähigkeit κ des Leitermaterials, dem Leiterquerschnitt A und der Leiterlänge l zu

$$\boxed{R = \frac{l}{\kappa \cdot A}}\,.$$

Man erhält die Verluste aus den allgemeinen Leistungsformeln

$$\boxed{P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}}\,. \tag{2.14}$$

Für den Bemessungsbetrieb müssen Widerstandswerte auf unterschiedliche Temperaturen umgerechnet werden. Für Kupferleiter kann man folgende Umrechnungsformeln benutzen:

$$\boxed{R_w = \frac{235 + \vartheta_w}{235 + \vartheta_k} R_k} \tag{2.15}$$

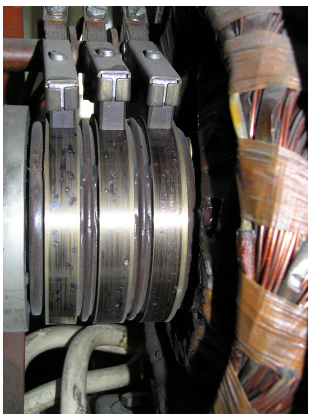
mit R_w bei der Temperatur ϑ_w und R_k bei ϑ_k (in °C).

Diese Verluste werden oft auch als *Kupferverluste* bezeichnet, da Kupfer im EM-Bau vorwiegend als Leitermaterial eingesetzt wird.

Erregerverluste

Dazu zählen alle Verluste, die zur Erzeugung eines Erregerfeldes auftreten. In erster Linie sind dies die Wicklungsverluste der Erregerwicklung, die ebenfalls nach Gleichung (2.14) berechnet werden und auch temperaturabhängig sind. Evtl. vorhandene Vorwiderstände sowie die Verluste der Schleifringübertragung (s. u.) müssen gegebenenfalls berücksichtigt werden.

Bürstenübergangsverluste



Die mechanische Übertragung elektrischer Energie erfolgt entweder über Schleifringe oder Bürsten. Der Übergangswiderstand ist von vielen Einflussfaktoren abhängig (Querschnitt, Material, Druck, Stromdichte). Vorteilhaft berechnet man diese Verluste aus der Bürstenübergangsspannung U_B und dem Strom durch die Bürsten I_a

$$\boxed{P_B = U_B \cdot I_a} \qquad \text{(pro Bürste!)}$$

Die Spannung U_B ist *nicht* stromproportional und wird je nach Bürstensorte mit $U_B \approx 0.5 \ldots 1.5\,\mathrm{V}$ angenommen. Diese Spannung tritt an jeder Bürste auf, bei Gleichstrommaschinen muss man mit $2\,U_B$ rechnen.

Reibungsverluste

Die *Reibungsverluste* sind mechanische Verluste und treten nur bei laufender Maschine auf. Sie enthalten die *Lagerreibung*, *Gasreibung* der rotierenden Zylindermantelfläche und Lüfter und eventuell die *Bürstenreibung*. Die Lager- und Gasreibung sind schwer berechenbar, ihre Verluste sind etwa proportional Ω, bei höheren Drehzahlen macht sich die Gasreibung mit $\Omega^q, q > 1$ bemerkbar. Die Bürstenreibung ist proportional Ω. Da diese Verluste lastunabhängig sind, treten sie auch im Leerlauf auf (Leerlaufversuch).

> Genaugenommen nimmt die Lagerreibung bei sehr geringen Drehzahlen wieder zu, beim Stillstand geht die *Gleitreibung* in *Haftreibung* über. Zum Anfahren wird ein *Losbrechmoment* benötigt.

Eisenverluste

Die *Eisenverluste* setzen sich aus den *Hystereseverlusten* durch die drehzahl-/frequenzabhängige Ummagnetisierung des Eisens und den dadurch verursachten *Wirbelstromverlusten* zusammen. Beide Verlustarten hängen etwa quadratisch von der Induktion B ab, die Hysteresverluste sind außerdem proportional zur Frequenz (Drehzahl), die Wirbelstromverluste sogar quadratisch.[6]

Vereinfacht nimmt man an:

$$P_{\mathrm{Fe}} \sim (\hat{B}^2, \Omega, \Omega^2), \qquad P_{\mathrm{Rbg}} \sim (\Omega, \Omega^q) \quad \text{mit} \quad q > 1 \; .$$

Messtechnisch erfasst man im allg. die Eisen- und Reibungsverluste zusammen:

$$P_{\mathrm{F+R}} \sim (B^2, \Omega, \Omega^2) \; .$$

Abbildung 2.16 zeigt die Eisen- und Reibungsverluste in Abhängigkeit von der Drehzahl bei verschiedenen Induktionen. Für $B = 0$ treten nur Reibungsverluste auf.

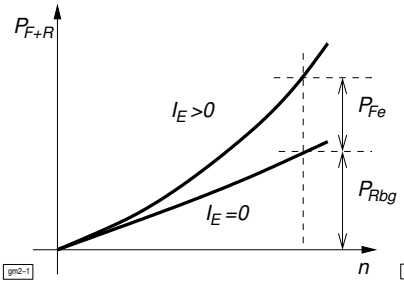


Abb. 2.16: $P_{\mathrm{F+R}} = f(\Omega, B)$

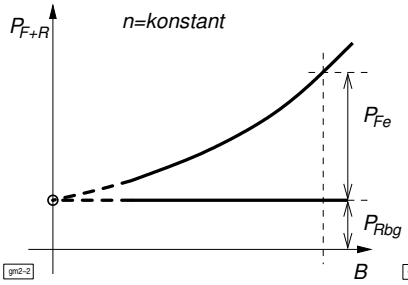


Abb. 2.17: $P_{\mathrm{F+R}} = f(B)$

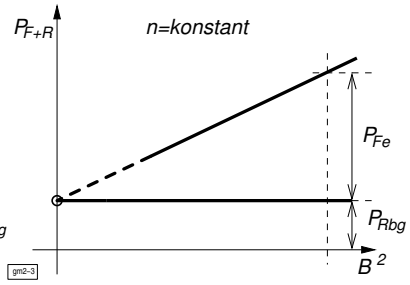


Abb. 2.18: $P_{\mathrm{F+R}} = f(B^2)$

Die Eisen- und Reibungsverluste nimmt man normalerweise beim Leerlaufversuch auf. Zur Trennung der Verluste wird die Maschine bei *konstanter Drehzahl* mit verschiedenen Induktionen betrieben. Die Reibungsverluste bleiben dabei konstant, man erhält sie aus dem Schnittpunkt der Kurve $P_{\mathrm{Fe}}(B)$ mit der Ordinatenachse ($B = 0$). Da die Maschine im allg. ohne oder bei geringer Induktion nicht betrieben werden kann, lässt sich dieser Punkt nicht exakt ermitteln (Abb. 2.17). Trägt man statt dessen die Verluste $P_{\mathrm{F+R}}$ als Funktion von B^2 (quadratisch!) auf, kann man auf grafischem Weg die Eisen- und Reibungsverluste trennen, da jetzt die Funktion $P_{\mathrm{Fe}}(B)$ geradlinig verläuft und besser extrapoliert werden kann (Abbildung 2.18).

Je nach Art der Maschine lässt sich die Induktion entweder durch den Erregerstrom (Gleichstrommaschine) oder durch die Ständerspannung (z. B. Asynchronmaschine) verändern.

[6] Der Zuammenhang ist wesentlich komplizierter.

Zusatzverluste

Zu den Zusatzverlusten zählt man solche Verluste, die sich weder rechnerisch noch messtechnisch erfassen lassen. Verursacht werden sie u. a. durch Wirbelströme in den Konstruktionsteilen und Oberwellenfelder. Sie betragen je nach Maschinentyp zwischen 0.5 bis 2 % der Bezugsleistung[7].

Bestimmung des Wirkungsgrades

Direkte Methode

Dabei wird der Wirkungsgrad *direkt* aus dem Verhältnis abgegebener zur zugeführter Leistung ermittelt. Gemessen werden die elektrische Leistung (Strom, Spannung), Drehzahl und Drehmoment. Wegen der Messgenauigkeit verwendet man dieses Verfahren nur bei Maschinen bis zu einem Gesamtwirkungsgrad von 80 – 90 %. Bei Einzelmaschinen muss eine Prüffeldmaschine mit mindestens der gleichen Leistung zur Verfügung stehen.

Einzelverlustverfahren

Bei diesem Verfahren ermittelt man die Verluste einzeln durch geeignete Versuchsanordnungen (Leerlaufversuch, Kurzschlußversuch) und berechnet daraus den Gesamtwirkungsgrad. Dabei teilt man die Gesamtverluste in 2 Gruppen ein:

Leerlaufverluste: diese Verluste treten bereits beim Leerlauf der Maschine auf und sind weitgehend von der Belastung unabhängig. Dazu gehören die Eisen- und Reibungsverluste, Erregerverluste (falls vorhanden) sowie ein Teil der Zusatzverluste, der durch Streufelder hervorgerufen wird.

Lastverluste: dazu zählen alle stromabhängigen Verluste wie Wicklungs- und Übergangsverluste sowie die damit verbundenen Zusatzverluste.

Indirektes Verfahren

Bei vielen Maschinen lassen sich die Einzelverluste überhaupt nicht oder nur mit großem Aufwand bestimmen. Lässt man statt dessen den Prüfling auf eine Prüffeldmaschine arbeiten, bei der die Verluste bekannt sind, kann man »rückwärts« auf den Wirkungsgrad des Prüflings schließen.

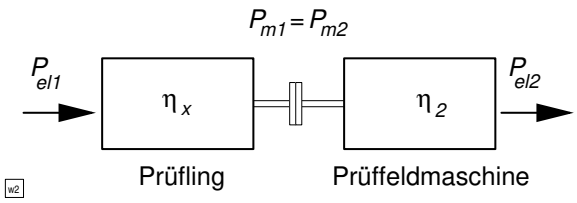


Abb. 2.19: Indirektes Verfahren

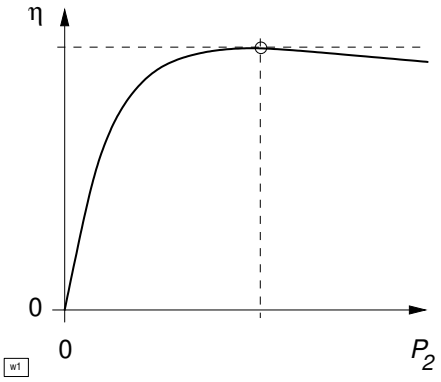


Abb. 2.20: $\eta = f(P_2)$

[7] Nach DIN VDE 0530 Teil 2 wird als **Bezugsleistung** die Leistungsaufnahme bzw. -abgabe bezeichnet, die sich bei dem größten der Nennströme und der größten der Nennspannungen ergibt.

Die Verluste der Prüffeldmaschine, die i. a. eine fremderregte Gleichstrommaschine darstellt, ermittelt man einmalig mit den bekannten Verfahren. Für die mechansiche Leistung an der Kupplung erhält man (siehe Abb. 2.19)

$$P_{\mathrm{m2}} = P_{\mathrm{m1}} = \frac{P_{\mathrm{el2}}}{\eta_2}$$

und daraus den gesuchten Wirkungsgrad des Prüflings

$$\eta_x = \frac{P_{\mathrm{m1}}}{P_{\mathrm{el1}}} = \frac{P_{\mathrm{el2}}}{\eta_2\, P_{\mathrm{el1}}} \,.$$

Pendelmaschine

Die Pendelmaschine ist eine Prüffeldmaschine, die gleichzeitig als Belastungs- bzw. Antriebsmaschine das übertragende Drehmoment liefert. Ihr Gehäuse ist drehbar gelagert. Das Reaktionsmoment, das normalerweise auf das Fundament wirkt, wird auf einen am Gehäuse befestigten Hebelarm übertragen, der direkt mit einer Kraftmesseinrichtung verbunden ist. Unter Berücksichtigung des Hebelarmes kann aus der Kraft direkt das Drehmoment abgeleitet werden. Bei dem angezeigten Drehmoment muss noch ein Korrekturmoment berücksichtigt werden, dessen Wert drehzahlabhängig ist, von der Ausführung der Maschine abhängt und einmalig bei der Kalibrierung der Maschine bestimmt wird (Korrekturkurve, -tabelle).

Rückarbeitsverfahren

Soll ein Prüfling unter Nennbedingungen geprüft werden, z. B. Erwärmungsprobe, Dauerlauf, muss die entsprechende Leistung bereitgestellt und nach Abzug der Verluste wieder abgeführt werden. Bei kleinen Leistungen nimmt man die abgegebene Leistung als Verlustleistung in Kauf und wandelt sie in Wärme um (Belastungswiderstände, Wasserbremse).

Bei großen Leistungen bereitet das Bereitstellen der erforderlichen Leistung evtl. Schwierigkeiten, abgesehen von der Unwirtschaftlichkeit dieses Verfahrens. Bei dem Rückarbeitsverfahren wandelt man die mechanische Energie wieder in elektrische Energie um und speist sie in das Versorgungsnetz zurück. Die tatsächlich aus dem Netz bezogene Leistung entspricht dann nur der Verlustleistung von Prüfling und Prüffeldmaschine. Dieses Verfahren lässt sich auch bei Transformatoren anwenden.

Optimaler Wirkungsgrad

Betrachtet man in Gleichnung (2.13) $\eta = f(P_2)$, so ist $\eta = 0$ für $P_2 = 0$ und wächst mit steigender Belastung, da die konstanten Leerlaufverluste einen kleiner werdenden Anteil zu der abgegebenen Leistung darstellen.

Mit zunehmender Belastung fallen die lastabhängigen Verluste mehr ins Gewicht wegen der quadratischen Abhängigkeit vom Laststrom, so dass der Wirkungsgrad wieder sinkt (Abbildung 2.20). Den maximalen Wirkungsgrad erreicht man, wenn die *lastabhängigen Verluste gleich den lastunabhängigen Verlusten* sind ($\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}P_2 = 0$).

2.2 Gleichstrommaschine-Grundlagen

2.2.1 Aufbau und Wirkungsweise

Gleichstrommaschinen werden je nach Anwendung als Gleichstrommotor oder -generator betrieben. Zwischen beiden Arten besteht kein konstruktiver Unterschied.

Der Gleichstrommotor nutzt die Kraftwirkung auf einen stromführenden Leiter bzw. ferromagnetische Stoffe im Magnetfeld aus (siehe Abschnitt Kräfte). Beim Gleichstromgenerator kommt das Induktionsgesetz zur Anwendung (siehe Abschnitt Elektromagnetische Induktion).

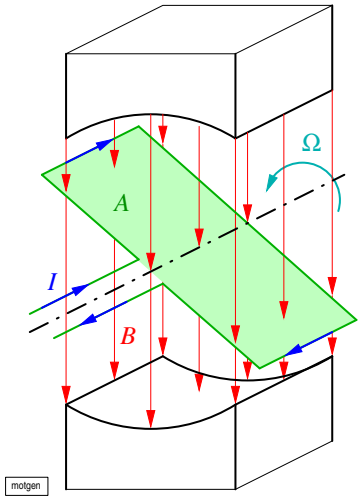


Abb. 2.21: Leiterschleife im Magnetfeld

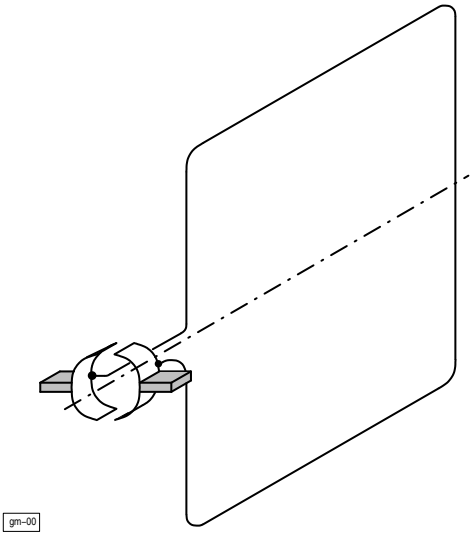


Abb. 2.22: Stromwendung

Für eine technisch vernünftig funktionierende Gleichstrommaschine müssen einige konstruktive Änderungen vorgenommen werden (Abb. 2.21, 2.22):

- damit die Leiterschleife nicht nach einer halben Drehung stehen bleibt bzw. die induzierte Spannung nicht ihr Vorzeichen wechselt, muss die Stromrichtung in der Leiterschleife umgekehrt (»gewendet«) werden. Dies geschieht am einfachsten durch einen *Stromwender (Kommutator, Kollektor)*, der mit der Leiterschleife mechanisch verbunden ist (Abb. 2.22 und 2.23).
- Verstärkung und Führung des externen magnetischen Feldes durch Polschuhe; Füllung mit Eisen und Anpassung an die Polschuhform; möglichst geringer Luftspalt (siehe Abschnitt Konstruktive Entwicklung);
- ersetzt man die Leiterschleife durch mehrere Windungen, erhöht sich das Drehmoment (Motor) und die Spannung (Generator);
- Erhöhung der Polpaare und Anzahl der Leiterschleifen, damit verbunden Unterteilung des Kommutators in kleinere Segmente (Lamellen) führt zur Leistungs- und Drehmomentsteigerung sowie einem gleichmäßigeren Lauf.

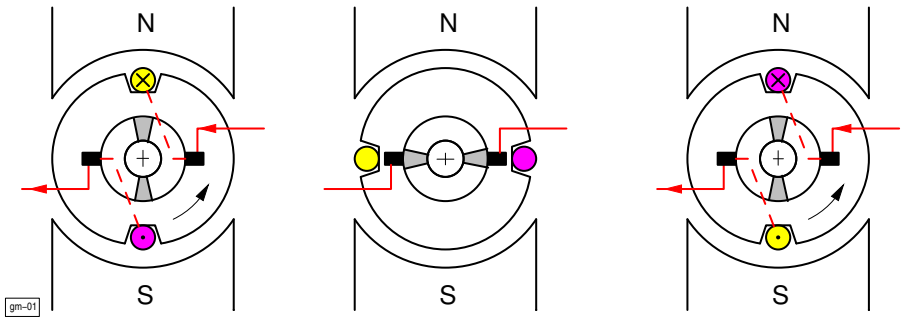


Abb. 2.23: Stromwendung

Erregung

Das externe Magnetfeld bezeichnet man als *Erregerfeld*, die entsprechenden Formelgrößen werden meistens mit dem Index »f« oder »E« gekennzeichnet. Das Erregerfeld wird in den *Erreger-* oder *Hauptpolen* symmetrisch zur *Pol-* oder *Längsachse* erzeugt (*Längsfeld*). Das dabei feldfreie Gebiet in der *Querachse* bezeichnet man als *neutrale Zone*. Der *Ständerrücken* dient zur Befestigung der Pole, als magnetischer *Rückschluss* und als Gehäuse. Erhöhung der Hauptpolzahl führt zu Maschinen mit großem Durchmesser (4–5 m), großem Drehmoment und geringer Drehzahl (30–60 min^{-1}), z. B. Fördermaschinen, Walzwerkantriebe. Alle an der Erregung beteiligten Eisenteile können massiv sein.

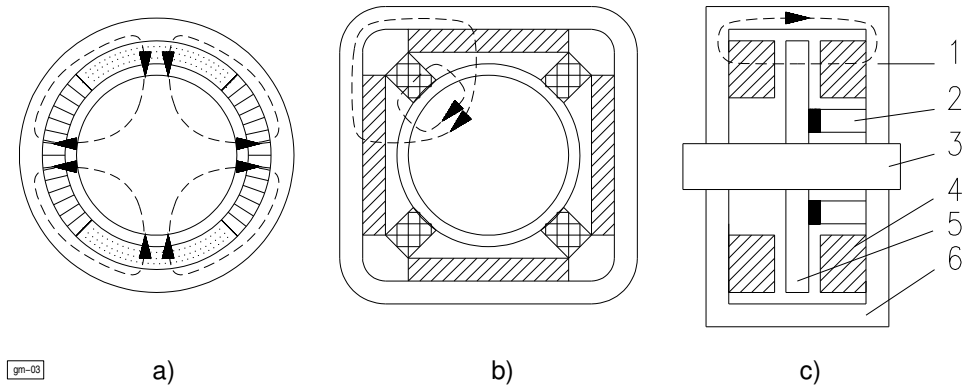


Abb. 2.24: Bauformen permanent erregter Gleichstrommaschinen (Quelle: Kampschulte)

Statt einer Wicklung können auch Permanentmagnete benutzt werden. Abb. 2.24 zeigt verschiedene Ausführungsformen:

a) zylindrischer Trommelläufer mit radial magnetisierten Schalenmagneten;

b) rechteckiger Trommelläufer mit radial und tangential magnetisiserten Magneten (bis zu einigen kW);

c) Scheibenläufer: (1) Feldverlauf, (2) Kohlebürsten, (3) Welle, (4) Magnet, (5) Läuferscheibe, (6) Gehäuse.

Anker

Den rotierenden Teil der Maschine bezeichnet man als *Läufer* oder *Anker* (Index »A«).

Die *Ankerwicklung* entspricht der Leiterschleife. Sie wird in *Nuten* gelegt. Damit kann der Luftspalt möglichst klein gemacht werden. Gleichzeitig ist die Ankerwicklung gegen mechanische Beanspruchung (z. B. Fliehkräfte) geschützt.

Abb. 2.25 zeigt die Lage der Ankerwicklung in Bezug auf die Erregerpole bei einer vierpoligen Maschine, links als einlagige, rechts als zweilagige Wicklung. Man erkennt deutlich, dass zwischen den Erregerpolen, in der neutralen Zone, die Ankerströme ihre Richtung wechseln, unter einem Erregerpol fließen alle Ankerströme in eine Richtung. Die erforderliche Stromwendung kann man

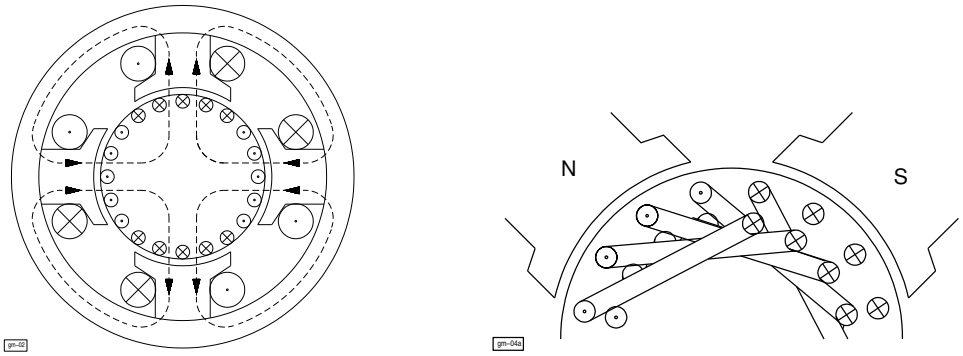


Abb. 2.25: Anordnung der Ankerleiter und Erregerpole einer 4-poligen Maschine (Quelle: Kampschulte)

sehr gut an einer Ringwicklung beim *Ringanker* erkennen (Abb. 2.26). Eine in sich geschlossene Wicklung wird auf einen ringförmigen Eisenkern aufgebracht. Führt man dieser Wicklung von außen mittels *Bürste* einen Strom zu und greift ihn auf der entgegengesetzten Seite wieder ab, entstehen zwei Stromzweige, die an der Ringaußenseite entgegengesetzte Stromrichtungen aufweisen, aber auch an der Innenseite. Statt einzelner Leiterschleifen trägt jetzt die gesamte Wicklung zum Drehmoment bei. Betrachtet man den Feldverlauf der Erregerpole quer zu den Bürsten erkennt man, dass das Feld vorzugsweise den Eisenweg wählt, das Innere des Eisenrings ist feldfrei, die äußeren Ströme liegen im Erregerfeld, die inneren Ströme nicht. Dadurch kann ein Drehmoment entstehen. Eine brauchbare Konstruktion zeigt Abb. 2.26 rechts. Die Ringwicklung wird mit Abgriffen versehen, die an einen Kollektor (Kommutator, Stromwender, siehe nächstes Kapitel) geführt und dort mittels Kohlebürsten den Strom übertragen. Der Ringanker hat nur noch historische Bedeutung.

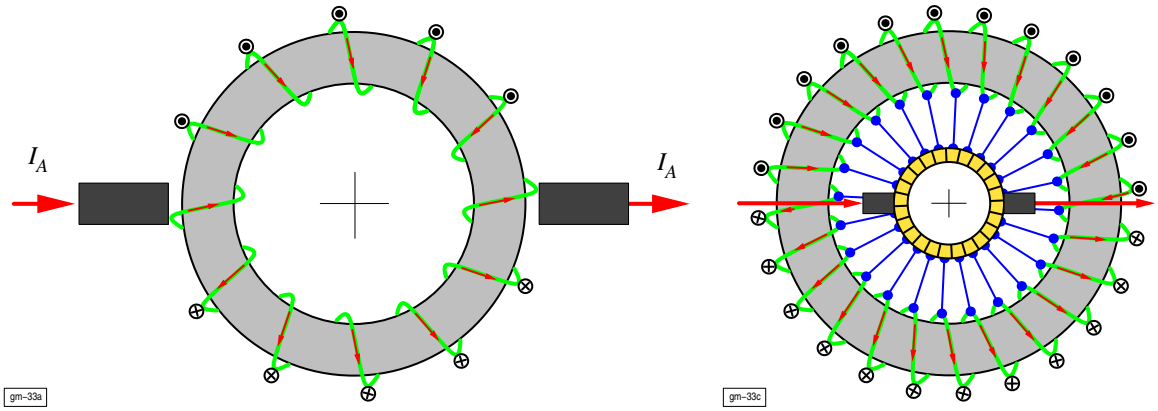


Abb. 2.26: Stromwendung an einem Ringanker

Abgelöst wird er durch den heute verwendeten *Trommelanker*, bei dem die Wicklungen in Nuten

liegen, die axial am Umfang des zylindrischen Ankers verlaufen (Abb. 2.27 links und 2.28). Hin- und Rückleiter der Wicklung liegen jeweils um eine Polteil versetzt in den Nuten. Je nach An-

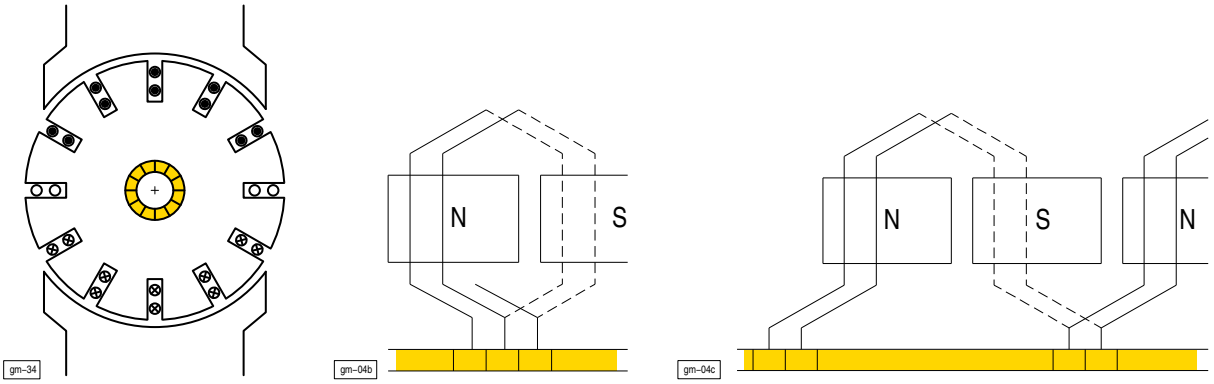


Abb. 2.27: Querschnitt eines Trommelankers, Schleifenwicklung (Mitte), Wellenwicklung (rechts)

wendung kann man die Ankerwicklung als *Schleifen-* oder *Wellenwicklung* ausführen (Abb. 2.27 Mitte und rechts, Quelle: Kampschulte).

Der Anker muss geblecht sein, da das Ankerfeld bei Drehung von einem Hauptpol zum nächsten seine Richtung umkehrt (Wirbelströme).

Kommutator, Kohlebürsten

Äußeres Kennzeichen einer Gleichstrommaschine ist der *Kommutator* (Abbildung 2.29). Er besteht aus einzelnen *Lamellen* (*Stege*) aus Kupfer, die mit der Ankerwicklung verbunden sind (gelötet, geschweißt).

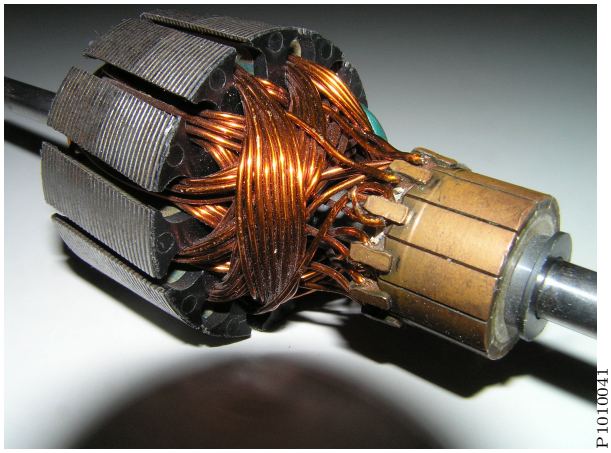


Abb. 2.28: Trommelanker eines Kleinmotors (Serienfertigung) mit Kommutator

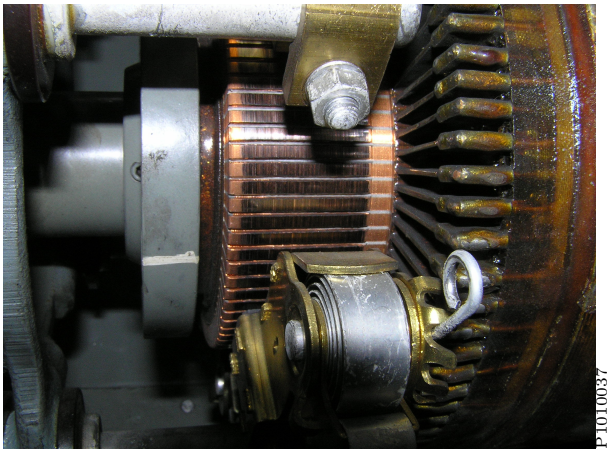


Abb. 2.29: Kommutator einer 4-poligen Maschine mit vier Bürsten

Der Strom wird mittels *Kohlebürsten* übertragen. Die Kohlenbürsten können drehbar angeordnet sein, um einen optimalen (An-) Lauf zu erzielen. Grundsätzlich sollen die Bürsten so stehen, dass kein *Bürstenfeuer* auftritt. Dies ist dann der Fall, wenn beim Übergang der Kohlebürsten von einer Lamelle zur nächsten Lamelle kein Strom fließt. Dabei ist zu beachten, dass die Kohlenbürsten breiter als eine Lamelle sind, also zwei oder mehr Lamellen immer kurzschließen. Man

verdreht die Bürsten dann so, dass die in den kurzgeschlossenen Wicklungsteilen induzierten Spannungen am geringsten sind.

Der Kommutator einschließlich der Kohlebürsten ist das wartungsintensivste Teil der Gleichstrommaschine (Verschleiß).

Im allg. gibt es so viele Bürsten wie Hauptpole.

2.2.2 Kommutierung

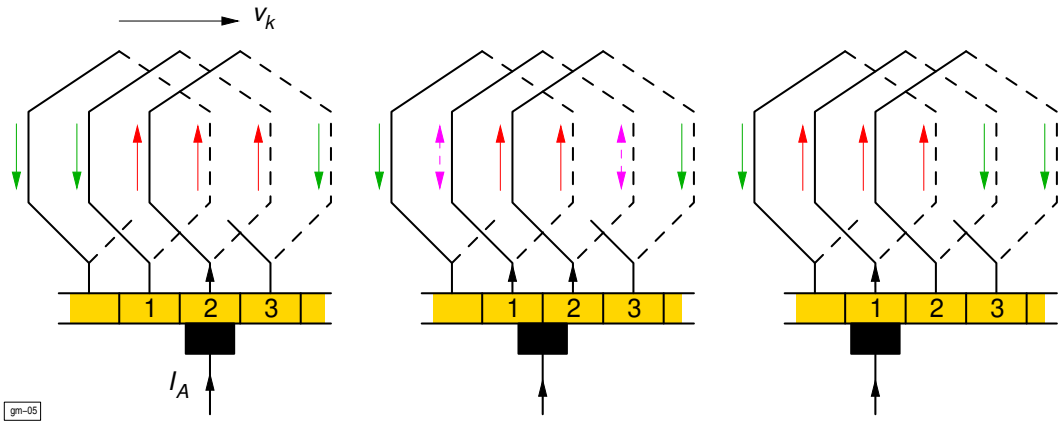


Abb. 2.30: Kommutierungsvorgang bei einer Schleifenwicklung

Beim Wechsel der Bürste von einer Lamelle zur nächsten wechselt die Stromrichtung in dem Ankerleiter, der die kurzgeschlossenen Lamellen verbindet. Der Ankerstrom I_A ist eingeprägt und konstant. Ist die Bürste nur mit einer Lamelle verbunden (siehe Abb. 2.30 links: Lamelle 2 bzw. rechts: Lamelle 1), fließt in jedem Ankerleiter der Spulenstrom $I_s = I_A/2$. Beim Wechsel von Lamelle 2 zu 1 muss der Spulenstrom der kurzgeschlossenen Windung seine Stromrichtung von $+I_s$ nach $-I_s$ umkehren. Diesen Vorgang bezeichnet man als *Kommutierung*. Dafür steht nur eine bestimmte *Stromwendezeit* zur Verfügung, die durch die Breite der Bürste und der Kommutatorgeschwindigkeit v_k bestimmt wird. Die von der Stromänderung verursachte Flussänderung in der betroffenen Ankerwindung erzeugt eine Selbstinduktionsspannung, die sog. *Stromwendespannung*, die die Stromänderung verzögert und zur *Unterkommutierung* führt. Dadurch entsteht an der ablaufenden Bürstenkante[8] eine beträchtliche Stromdichte, die zur Funkenbildung beitragen kann und unbedingt zu vermeiden ist.

2.2.3 Ankerrückwirkung

Das Erregerfeld $\vec{B}_E$ verläuft bei einer 2poligen Maschine von einem Hauptpol (N) durch den Anker zum gegenüberliegenden Hauptpol (S) und ist symmetrisch zur Polachse (Abb. 2.31). Der Ankerstrom erzeugt im Anker ein *Ankerquerfeld* $\vec{B}_A$, welches senkrecht zum Erregerfeld liegt. Betrachtet man die Überlagerung der beiden Felder im Luftspalt, $\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_E$, erhält man den asymmetrischen Verlauf der Luftspaltinduktion $\vec{B}$. Man erkennt, dass das Ankerquerfeld wegen der in der Mitte der Pollücke vorhandenen Induktion B_q eine Verschiebung der neutralen Zone (NZ), an der die Luftspaltinduktion $B = 0$ ist, um den Winkel β verursacht hat. Als Folge davon verschlechtert sich die Kommutierung und es kommt je nach Belastung der Maschine zum

[8] das ist die Kante, die die vorherige Lamelle verlässt

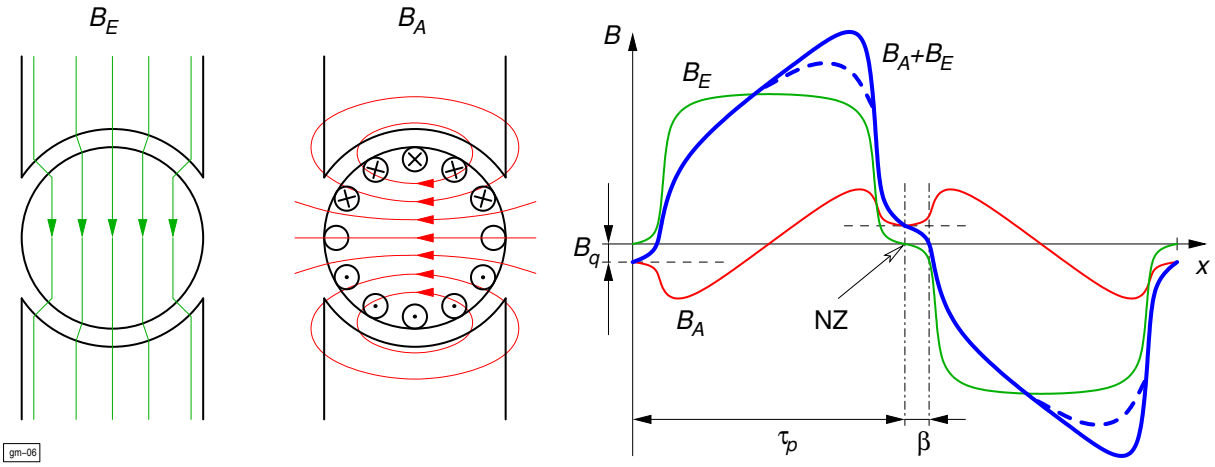


Abb. 2.31: Induktionsverlauf am Ankerumfang (Ankerrückwirkung)

Bürstenfeuer. Dem könnte man dadurch begegnen, dass man die *Bürstenbrücke* in Richtung der Verschiebung verdreht. Wechselt man jedoch die Drehrichtung (Ankerstrom *oder* Erregerstrom umpolen), ändert das Ankerquerfeld auch seine Richtung, so dass die Bürstenbrücke in die entgegengesetzte Richtung verdreht werden müsste.

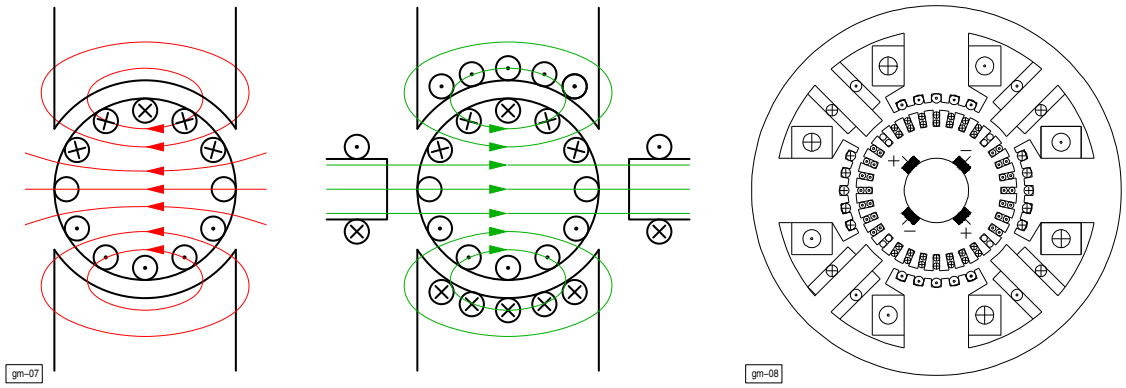


Abb. 2.32: Wende- und Kompensationswicklung (Quelle 'gm-08': Kampschulte)

Statt dessen kann man mit Hilfe von *Wendepolen* (ab 2–3 kW) dem Ankerquerfeld ein lastabhängiges Hilfsfeld entgegensetzen (Abb. 2.32), welches in den Ankerwicklungen Gegenspannungen induziert und dafür sorgt, dass während des Kommutierungsvorganges (Kurzschluss zweier benachbarter Lamellen) der Strom in der kurzgeschlossenen Spule verschwindet. Die neutrale Zone bleibt dabei in der geometrischen Mitte zwischen den Hauptpolen.

Die Summe aus Erregerfeld und Ankerquerfeld ergibt einen asymmetrischen Verlauf des Luftspaltfeldes. Es kommt zu einer Feldschwächung an einer Polkante und Feldüberhöhung an der entgegengesetzten Polkante (Abb. 2.31). Wegen der Eisensättigung fällt die Überhöhung geringer aus als die Schwächung (strichlierte Linie), so dass insgesamt das Erregerfeld geschwächt wird. Diese ungewollte *Feldschwächung* tritt bei hohen Belastungen auf und kann zum instabilen Betrieb führen. Deshalb wird bei sehr großen/teuren Maschinen in den Hauptpolen eine zusätzliche *Kompensationswicklung* eingelegt, die diese Verzerrung verhindern soll.

Die Wendepol- und Kompensationswicklungen liegen in Reihe mit der Ankerwicklung.

2.2.4 Klemmenbezeichnungen und Schaltungen

Abb. 2.33 zeigt die möglichen Wicklungs- und Klemmenbezeichnungen der Gleichstrommaschine. Nach DIN VDE 0530 Teil 8 sind den einzelnen Wicklungen der Gleichstrommaschine folgende

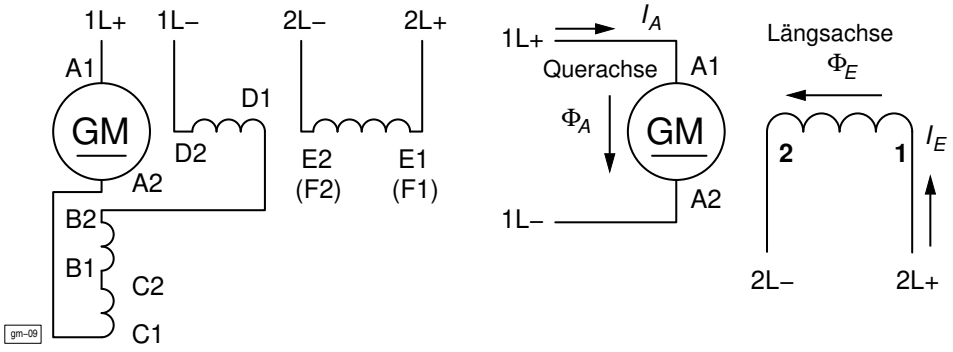


Abb. 2.33: Klemmenbezeichnungen

Kennbuchstaben zugeordnet:

A1-A2: Ankerwicklung

B1-B2: Wendepolwicklung (geteilt: 1B1-1B2, 2B1-2B2)

C1-C2: Kompensationswicklung (oder 1C1-1C2, 2C1-2C2)

D1-D2: Erregerwicklung für Reihenschlussschaltung

E1-E2: Erregerwicklung für Nebenschlussschaltung

F1-F2: Erregerwicklung für Fremderregung.

Je nach Schaltung der Anker und Erregerwicklung(en) unterscheidet man (Abb. 2.34):

- Reihenschluss- (Hauptschluss-),
- Nebenschluss-,
- fremderregte und
- Doppelschluss- (Kompound-) Maschinen.

2.2.5 Drehrichtung

Den Drehsinn einer elektrischen Maschine bestimmt man mit Blickrichtung auf die Stirnseite des Wellenendes (siehe DIN VDE 0530 Teil 8). Bei Gleichstrommaschinen ist dies im allgemeinen die dem Kollektor entgegengesetzte Stirnseite.

Die Drehrichtung ergibt sich beim

Motor , indem man den Zeiger von Φ_A auf dem *kürzeren* Weg in Richtung des Zeigers von Φ_E dreht;

Generator , indem man den Zeiger von Φ_A auf dem *längeren* Weg in Richtung des Zeigers von Φ_E dreht.

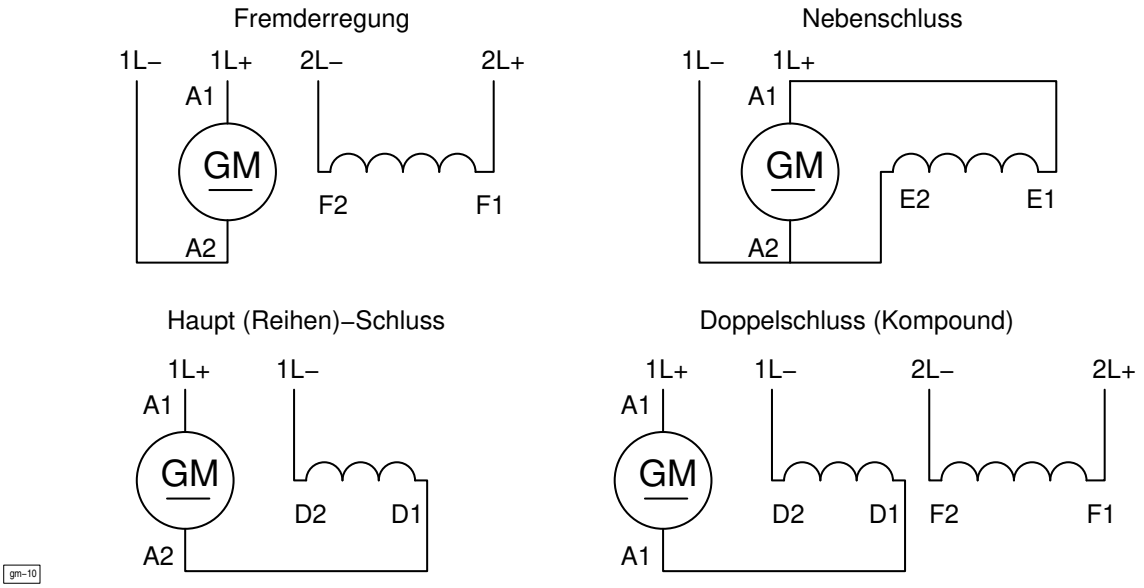


Abb. 2.34: Schaltungen der Gleichstrommaschine

Siehe dazu auch Abb. 2.33 rechts.

Folgende Aussagen sind mit den o. a. Regeln identisch:

- Rechtslauf liegt vor, wenn der Strom in allen Wicklungen von der niedrigeren Kennzahl (1) zur höheren Kennzahl (2) bzw. umgekehrt fließt;
- der Anker dreht sich unter der Spitze des Feldpfeiles von der Plusbürste zur Minusbürste.

2.2.6 Betriebsverhalten

Ersatzschaltbild

Das prinzipielle Ersatzschaltbild einer GM zeigt Abb. 2.35. Die eingezeichnete Richtung des Ankerstromes i_A ist willkürlich (siehe dazu Abschnitt 1.3). Es bedeuten:

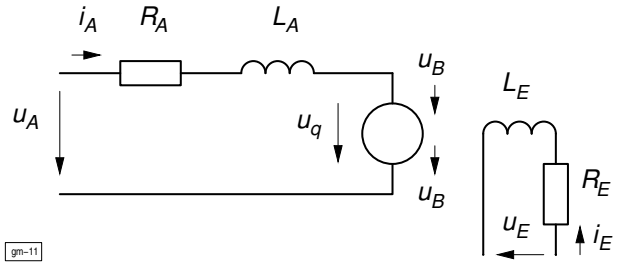


Abb. 2.35: Ersatzschaltbild einer Gleichstrommaschine

i_A Ankerstrom

i_E Erregerstrom, unabhängig von der Art der Erregerwicklung

R_A ohmscher Widerstand der Ankerwicklung (ohne Kohlebürsten)

R_E ohmscher Widerstand der Erregerwicklung

L_A Induktivität der Ankerwicklung

L_E Induktivität der Erregerwicklung

u_q durch Drehbewegung induzierte (Quellen-) Spannung

u_A Anker(klemmen)spannung

u_E Erreger(klemmen)spannung

u_B Bürstenübergangsspannung (tritt zweimal auf)

Betrachtet man das *dynamische* Verhalten der Gleichstrommaschine, sind die Ströme und Spannungen zeitabhängig.

Für den *stationären* Betrieb vereinfacht sich das Ersatzschaltbild: aus den zeitabhängigen Größen werden Gleichstromgrößen ($u(t) \to U, i(t) \to I$), die Induktivitäten sind wirkungslos.

Erreger- und Ankerwiderstände sind temperaturabhängig. Für den Bemessungsbetrieb müssen sie auf die Grenz-Übertemperatur umgerechnet werden (siehe DIN VDE 0530 Teil 1).

Induzierte Spannung

Grundsätzlich wird bei jeder Drehbewegung eine Spannung induziert, egal ob die GM als Motor oder Generator arbeitet.

$$\boxed{U_q = C_1 \cdot \Phi_E \cdot \Omega} \tag{2.16}$$

C_1 Maschinenkonstante, die die unvollkommene Umsetzung des Induktionsgesetzes auf Grund von Streuflüssen, Polbedeckungsfaktor, usw. berücksichtigt; diese Konstante ist abhängig von der Geometrie bzw. Konstruktion der Maschine;

Φ_E Erregerfluss;

Ω Drehzahl $2\pi\, n$.

Die induzierte Spannung U_q ist proportional zum Erregerfluss und der Drehzahl. Für den Idealfall $I_A = 0$ ist sie identisch mit der Klemmenspannung U_A und kann im Prinzip nur bei einem leerlaufenden Generator direkt gemessen werden.

Der Erregerfluss Φ_E hängt über die Magnetisierungskennlinie vom Erregerstrom I_E ab, also $\Phi_E = f(I_E)$.

Versuch 2.2.1 *Leerlaufender Gleichstromgenerator, $U_A = f(\Phi_E, n)$.*

Drehmoment

Das am Anker angreifende *innere* Drehmoment M_i ergibt sich aus

$$\boxed{M_i = C_2 \cdot \Phi_E \cdot I_A} \tag{2.17}$$

mit der Maschinenkonstante C_2 und dem Ankerstrom I_A. Das Drehmoment ist proportional zum Ankerstrom und Erregerfluss.

Versuch 2.2.2 *Pendelgenerator mit Dremomentenwaage, $M = f(I_A)$.*

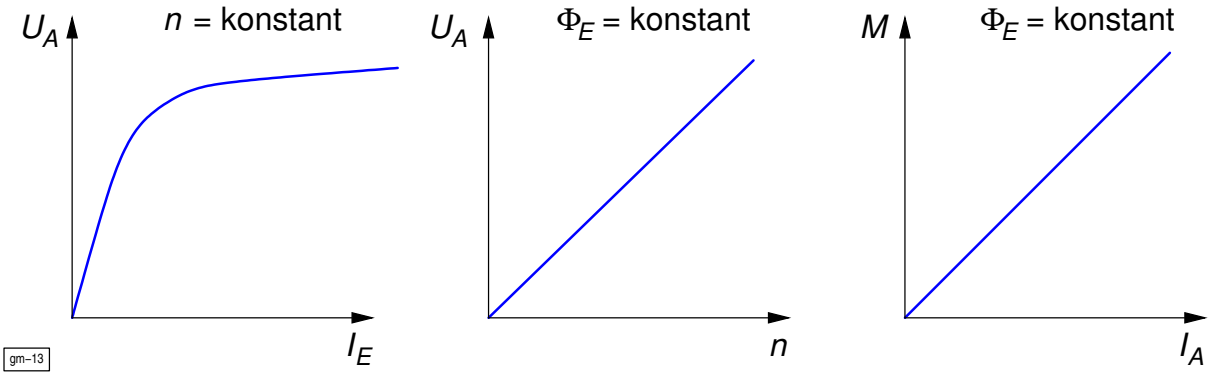


Abb. 2.36: Ergebnisse der Versuche 2.2.1 und 2.2.2

Grundgleichungen

Aus dem ESB nach Abb. 2.35 lassen sich folgende Gleichungen herleiten:

$$u_A = u_q + R_A \cdot i_A + L_A \frac{\mathrm{d}i_A}{\mathrm{d}t} \quad \left[+2u_B\right]$$
$$u_E = R_E \cdot i_E + L_E \frac{\mathrm{d}i_E}{\mathrm{d}t} \; .$$

Bei *dynamischen* Vorgängen (Einschalten, schnelle Änderungen) müssen die Einflüsse der beiden Induktivitäten L_A und L_E und deren Zeitkonstanten $\tau_A = L_A/R_A$, $\tau_E = L_E/R_E$ beachtet werden.

Für das Drehmonent gilt

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{M_i - M_L}{J}$$

mit M_L als Lastmoment[9] und J als Trägheitsmoment aller rotierender Teile.

Für den *stationären* Betrieb (konstante Drehzahl) vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\boxed{U_A = I_A \cdot R_A + U_q \; \left[+2u_B\right]} \qquad \boxed{U_E = I_E \cdot R_E} \qquad \boxed{M_i = M_L} \tag{2.18}$$

[9] Im Zusammenhang mit dem inneren Drehmoment M_i muss das Lastmoment M_L auch die Reibungsverluste der Maschine enthalten.

Mit den Gleichungen (2.16) bis (2.18) lassen sich alle stationären Betriebszustände der Maschine beschreiben.

In den Gleichungen (2.16) und (2.17) treten die Maschinenkonstanten C_1 und C_2 auf. Man kann zeigen, dass diese beiden Konstanten identisch sind. Es gilt nämlich:

$$P_i = U_q \cdot I_A = M_i \cdot \Omega = C_1 \cdot \Phi_E \cdot \Omega \cdot I_A = C_2 \cdot \Phi_E \cdot I_A \cdot \Omega$$

Im allg. errechnet man C_2 aus dem Nennmoment M_N (Typenschild, Messung). Da dieses Moment auch die Reibungsverluste enthält, ist es nicht identisch mit M_i. Gleichsetzen von C_1 und C_2 führt dementsprechend zu ungenauen Ergebnissen.

Leistungsbilanz

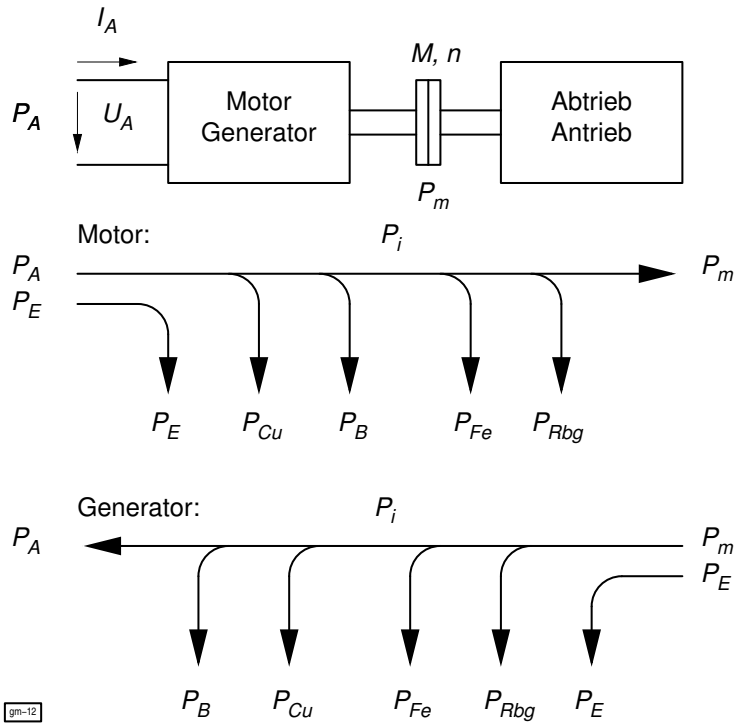


Abb. 2.37: Leistungsbilanz der Gleichstrommaschine

Für den Motor gilt (siehe Abb. 2.37):

$$\boxed{P_A = P_m + P_{\mathrm{Cu}} + \underbrace{P_{\mathrm{Fe}} + P_{\mathrm{Rbg}}}_{P_{\mathrm{F+R}}} \left[+P_B\right]} \tag{2.19}$$

Wirkungsgrad:

$$\boxed{\eta_m = \frac{P_m}{P_A + P_E}} \tag{2.20}$$

Bei Generatorbetrieb muss P_A mit P_m vertauscht werden.

Ankerleistung: $P_A = U_A \cdot I_A$

Kupferverluste/Anker: $P_{\mathrm{Cu}} = I_A^2 \cdot R_A$

innere Leistung: $P_i = U_q \cdot I_A = M_i \cdot \Omega$

Eisenverluste: $P_{\mathrm{Fe}} = f(B^2, \Omega, \Omega^2)$

Reibungsverluste: $P_{\mathrm{Rbg}} = f(\Omega, \Omega^q), \quad q > 1$

Bürstenverluste: $P_B = 2u_B \cdot I_A$

Wellenleistung: $P_m = M \cdot \Omega$

Erregerleistung: $P_E = U_E \cdot I_E$

Die Spannungsabfälle $2u_B$ an den Kohlebürsten sind stromabhängig und betragen je nach Kohlesorte und Ankerstrom 0.5–3.0 V. Sie werden vielfach vernachlässigt.

Schwierigkeiten bereitet die Berechnung der Eisen- und Reibungsverluste. Der *Leerlaufversuch* liefert abhängig von der Drehzahl n und dem Erregerfluss Φ_E wegen $P_m = 0$ nach Abzug der Leerlaufverluste

$$P_{\mathrm{F+R}}\ (n, \Phi_E) = U_A \cdot I_{\mathrm{A0}} - R_A \cdot I_{\mathrm{A0}}^2 \left[-2u_B \cdot I_{\mathrm{A0}} \right] . \tag{2.21}$$

Drehzahl

Setzt man Gleichung (2.16) in (2.18) ein und vernachlässigt die Bürstenverluste, ergibt sich

$$U_A = I_A \cdot R_A + C_1 \cdot \Phi_E \cdot \Omega$$

und daraus der wichtige Zusammenhang

$$\boxed{\Omega = \frac{U_A - I_A \cdot R_A}{C_1 \cdot \Phi_E}} . \tag{2.22}$$

Diese Gleichung beschreibt folgende Sachverhalte:

- bei konstanter Erregung Φ_E
  - ist bei gleicher Belastung ($I_A = \mathrm{const}$) die Drehzahl linear abhängig von der Ankerspannung;
  - ist der Drehzahlabfall bei konstanter Ankerspannung proportional zur Belastung;
- bei konstanter Ankerspannung
  - ist die Drehzahl *umgekehrt* proportional zum Erregerfluss Φ_E, d. h. im Extremfall »geht« bei Ausfall des Erregerfeldes der Gleichstrommotor »durch«.

Der Drehzahlabfall bei Belastung ist proportional zum Ankerwiderstand und damit konstruktionsbedingt.

Hinweis: man kann statt mit der Winkelgeschwindigkeit Ω auch mit der Drehzahl n rechnen und die Umrechnungsfaktoren in der Konstanten $C \cdot \Phi$ berücksichtigen. Im allg. benutzt man die Gleichungen (2.16) und (2.17) zum Umrechnen auf andere Betriebszustände, die Konstante $C \cdot \Phi$ kürzt sich dabei heraus.

Gleichstromgeneratoren

Der Einsatz von Gleichstromgeneratoren hat heute an Bedeutung verloren. Gleichspannungen werden hauptsächlich aus Wechsel-/Drehstromnetzen mittels Gleichrichter erzeugt. Vereinzelt findet man sie noch als Steuergeneratoren für Leonardantriebe (geregelte Gleichstromantriebe). In großen Stückzahlen bei kleinen Leistungen (mehrere kW) fanden sie als *Lichtmaschinen* in Fahrzeugen weite Verbreitung. Heute werden sie ersetzt durch die sog. *Drehstromlichtmaschine* (siehe Abschnitt 2.6.1). Der Generatorbetrieb wird auch beim *Nutzbremsen* elektrisch betriebener Fahrzeuge angewendet (Elektroauto, Schienenfahrzeuge), wobei auch hier Wechsel-/Drehstrommaschinen mehr und mehr den Platz der Gleichstrommaschine einnehmen.

Prinzipiell lassen sich Gleichstromgeneratoren nach Abb. 2.34 schalten. Historische Bedeutung hat der Nebenschlussgenerator. Damit der Generator eine Spannung erzeugen kann, benötigt er ein Erregerfeld. Dazu wird eine externe Gleichspannung benötigt. Im Jahre 1866 stellte Werner von Siemens fest, dass sich ein Generator auch *selbst erregen* kann, vorausgesetzt, der durch den Restmagnetismus vorhandene Erregerfluss reicht aus, eine Spannung zu erzeugen, die den Erregerfluss verstärkt (*dynamoelektrisches Prinzip*).

Nebenschluss/fremderregte GM

Bei einer *fremderregten* GM liegt die Erregerwicklung an einer vom Ankerkreis unabhängigen Spannungsquelle U_E, die in der Maschine einen von der Belastung unabhängigen Erregerstrom I_E und damit einen gleichbleibenden Erregerfluss Φ_E bewirkt (Abb. 2.34). Bei der *Nebenschlussmaschine* liegt die Erregerwicklung parallel zum Anker. Die Belastungskennlinien lassen sich direkt aus Gleichung (2.22) herleiten. Danach kann man die Drehzahl durch die Ankerspannung U_A, den wirksamen Ankerwiderstand und den Erregerfluss Φ_E beeinflussen. Abb. 2.38 zeigt das Kennlinienfeld einer ungesättigten Gleichstrommaschine[10]. Die Nenndrehzahl n_N beträgt $1450\,\mathrm{min}^{-1}$, der Ankernennstrom $I_{\mathrm{AN}} = 37\,\mathrm{A}$ bei einer Nennleistung von $3\,\mathrm{kW}$.

Wegen der Proportionalität zwischen M_i und I_A kann man statt des Ankerstroms das innere Drehmoment an die Abszissenachse schreiben.

Anlassen und Bremsen, Drehzahlsteuerung

Zur Drehzahlsteuerung bestehen folgende Möglichkeiten (Abb. 2.38):

Ankerspannung: die regelbare Spannungsquelle muss für die Leistung der Maschine ausgelegt sein; die Steigung der Kennlinie wird nicht beeinflusst. Früher und teilweise heute noch im Einsatz ist der *Leonard-Umformer*: eine Asynchronmaschine treibt mit nahezu konstanter Drehzahl einen fremderregten Nebenschlussgenerator. Durch Änderung der Generatorerregung kann man die Ausgangsspannung des Generators stufenlos zwischen $-U_{AN}$ und $+U_{AN}$ einstellen. Heute wird die veränderliche Gleichspannung vorwiegend durch gesteuerte Gleichrichter (Stromrichter) erzeugt.

Vorwiderstand: in Gleichung (2.22) muss R_A durch $(R_A + R_V)$ ersetzt werden; Kennlinie wird steiler (weicher); führt zu lastabhängigen Drehzahlen; gängige Methode zum Anlassen; unwirtschaftlich für Dauerbetrieb;

[10] d. h. die Feldschwächung durch die Ankerrückwirkung wird vernachlässigt.

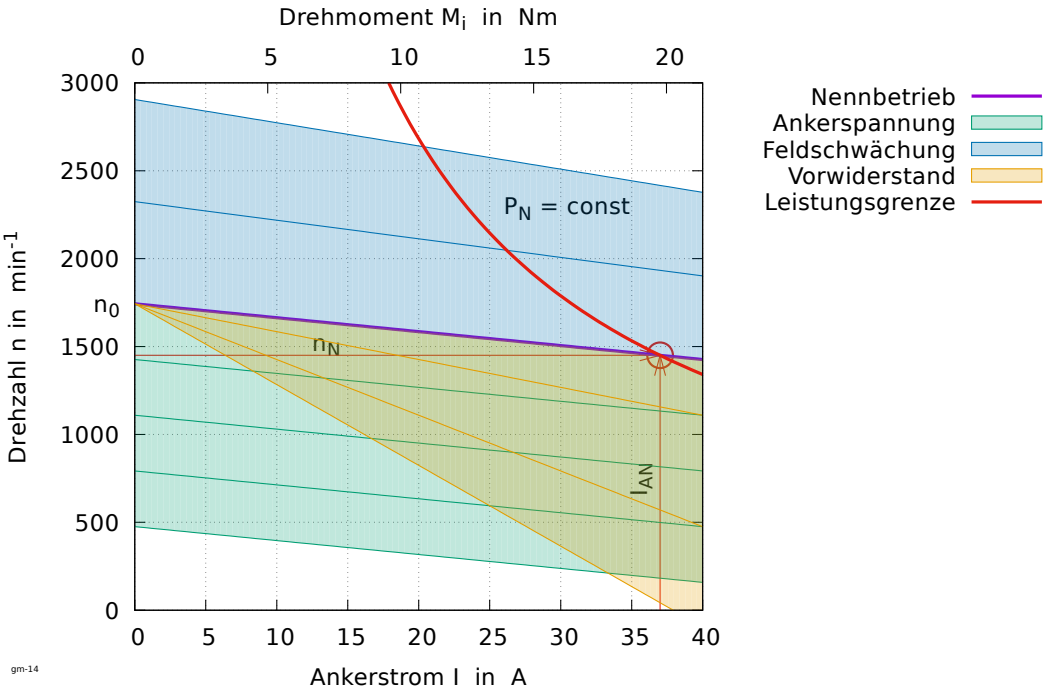


Abb. 2.38: Kennlinienfeld einer Gleichstrommaschine

Feldschwächung: Drehzahlerhöhung; Grenzdrehzahl nicht überschreiten; Leistungshyperbel $M_N \cdot \Omega_N$ beachten (Belastungsmoment reduzieren); Kennlinie wird weicher (steiler).

Gleichstrommotoren, die an eine regelbare Spannungsquelle angeschlossen sind, lässt man mit geringer Ankerspannung an und erhöht die Spannung unter Beachtung des maximalen Ankerstromes solange, bis die gewünschte Drehzahl bzw. Ankerspannung erreicht ist. Andernfalls schaltet man einen veränderlichen Vorwiderstand in den Ankerkreis.

Als Generator kann die GM zum *Bremsen* verwendet werden. Dazu wird der Anker vom Netz getrennt und auf einen Bremswiderstand geschaltet. Das Bremsmoment ist identisch mit M_i und damit proportional zum Ankerstrom. Da mit sinkender Drehzahl die induzierte Spannung abnimmt und damit auch der Ankerstrom, muss zum Erzielen eines konstanten Bremsmomentes der Bremswiderstand verringert werden.

Drehrichtungsumkehr ist entweder durch Umpolen des Erregerfeldes *oder* des Ankerfeldes möglich.

Reihen-/Hauptschlussmaschine

Hier ist die Erregerwicklung mit dem Anker in Reihe geschaltet (Abb. 2.34). Das Erregerfeld ist vom Ankerstrom abhängig. Geht man von der Kraftgleichung (2.9) aus, erkennt man, dass $\vec{B}$ sich somit mit I ändert, also die Kraft bzw. das Drehmoment bei ungesättigter Maschine quadratisch vom Ankerstrom abhängen:

$$\boxed{M_i \sim I_A^2} \qquad \text{(ungesättigte Maschine).}$$

Berücksichtigt man diesen Sachverhalt in den Grundgleichungen, erhält man für die Belastungskennlinie der Reihenschlussmaschine die vereinfachten Zusammenhänge

$$\boxed{\Omega \sim \frac{U_A}{\sqrt{M}}} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\Omega \sim \frac{U_A}{I_A}} \tag{2.23}$$

die in Abb. 2.39 dargestellt sind. Das Drehmoment steigt quadratisch mit dem Ankerstrom an.

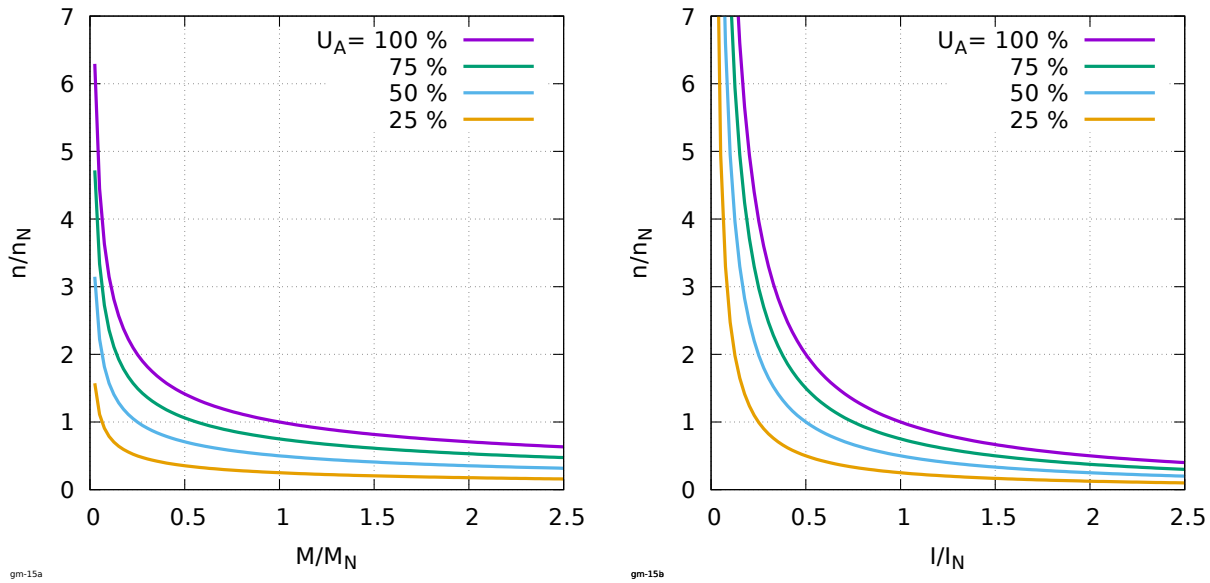


Abb. 2.39: Kennlinien einer Reihenschlussmaschine

Entsprechend der Proportionalität (2.23) wird die Drehzahl/Drehmomentkennlinie durch eine Hyperbel dargestellt. Sie zeigt ein weiches Drehzahlverhalten, bei völliger Entlastung besteht die Gefahr des Durchgehens, im Stillstand tritt das höchste Drehmoment auf. Dieses Betriebsverhalten kennzeichnet das typische Einsatzgebiet der Reihenschlussmaschine als Antriebsmotor von Elektrofahrzeugen und Hebezeugen. Widerstandsbremsung ist möglich, z. B. bei Bahnmotoren.

☞ **Hinweis:** Reihen-/Hauptschlussmaschinen müssen mit einer formschlüssigen Kupplung betrieben werden.

Doppelschlussmaschine

Die Doppelschlussmaschine stellt eine Kombination aus Reihen- und Nebenschlussmaschine dar (Abb. 2.34). Je nach Polung und Auslegung der beiden Erregerwicklungen ändert sich bei Belastung der Drehzahlabfall unterschiedlich (Abb. 2.40). Arbeitet die Reihenschlusswicklung *mit*

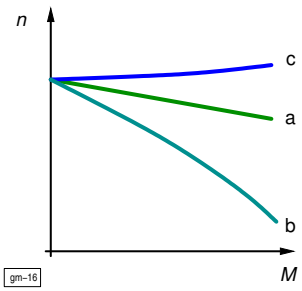


Abb. 2.40: Doppelschlussmaschine

der Nebenschlusswicklung spricht man von *Übercompundierung* (b), wirkt sie *gegen* das Nebenschlussfeld, bezeichnet man die Maschine als *gegencompoundiert*. In diesem Fall erhöht sich die Drehzahl bei Belastung, der Antrieb neigt zur Instabilität (c). Kennlinie (a) stellt die Nebenschlussmaschine ohne Reihenschlussanteil dar.

☞ Zur Umkehrung der Stromrichtung müssen beide Errgerwicklungen umgepolt werden. Man bevorzugt deshalb die Umpolung der Ankerwicklung.

Kapitel Gleichstrommaschine – Teil 2 enthält weitere Themen zur Gleichstrommaschine.

2.3 Transformator

Der Transformator ist eine *ruhende* elektrische Maschine. Er kann eine vorgegebene Wechselspannung in eine Wechselspannung anderer Spannungshöhe umwandeln. Eine Transformation von Strömen ist ebenfalls möglich. In der Energietechnik liegt seine Hauptanwendung in der Anpassung der Übertragungsnetze an die verschiedenen Netz-, Generator- und Verbraucherspannungen.

Siehe auch [7]

2.3.1 Funktionsprinzip

Das Funktionsprinzip des Transformators beruht auf der magnetischen Beeinflussung gekoppelter Induktivitäten (Abb. 2.41). Für die folgenden Betrachtungen werden vorerst ein linearer Zusammenhang zwischen Strom und Fluss (Luftspule, Eisenspule ohne Sättigung) und verlustlose Spulen angenommen.

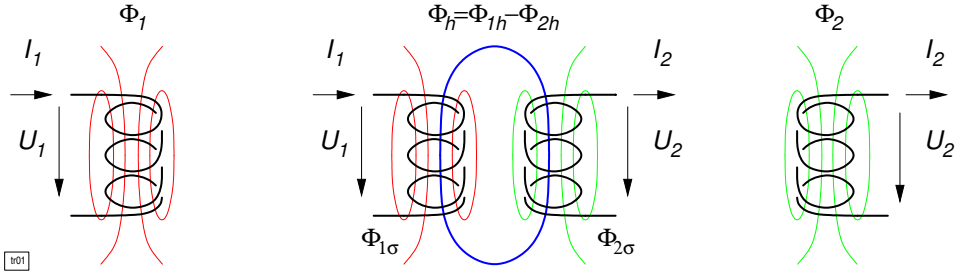


Abb. 2.41: Prinzip der induktiven Kopplung

Durch Anlegen einer *sinusförmigen* Wechselspannung U_1 an die *Primärspule* fließt ein Strom I_μ, der in Abhängigkeit von der Windungszahl N_1 einen sinusförmigen Fluss Φ_1 erzeugt.

Beim Transformator tritt ein Teil dieses Flusses als Hauptfluss Φ_h durch die *Sekundärspule*. Der andere Teil verläuft ungenutzt außerhalb der Spule und wird als Streufluss $\Phi_{1\sigma}$ bezeichnet. Es gilt:

$$\Phi_1 = \Phi_h + \Phi_{1\sigma} \; .$$

Nach dem Induktionsgesetz (Gleichung (2.3) im Kapitel Elektromagnetische Induktion) wird in der Sekundärspule eine Spannung U_{20} induziert, deren Höhe von der Windungszahl N_2 und der zeitlichen Änderung des Flusses Φ_h abhängt und ebenfalls sinusförmig ist:

$$U_{20} = N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} \; . \tag{2.24}$$

Der Transformator wird im *Leerlauf* betrieben. Der Durchflutungssatz liefert den Magnetisierungsstrom I_μ, der notwendig ist, den Fluss Φ_h und damit die sekundäre Leerlaufspannung U_{20} zu erzeugen. Danach gilt:

$$N_1 \cdot I_\mu = \Phi_h \cdot R_m \tag{2.25}$$

mit R_m als magnetischer Widerstand zwischen den beiden Spulen (siehe Tabelle 2.1 im Abschnitt Vergleich zwischen magnetischem und elektrischem Kreis).

Wird die Sekundärseite des Transformators belastet, fließt ein Strom I_2, der so gerichtet ist, dass er seiner Ursache entgegenwirkt. Dazu baut er einen entgegengerichteten Fluss Φ_2 auf, dessen Hauptkomponente Φ_{2h} zu einer Schwächung des Flusses Φ_h führt und ebenfalls einen Streufluss $\Phi_{2\sigma}$ erzeugt. Auch hier gilt:

$$\Phi_2 = \Phi_{2h} + \Phi_{2\sigma} \, .$$

Damit das Durchflutungsgesetz gewahrt bleibt, muss der Primärstrom I_1 größer werden. Im *Lastfall* gilt:

$$N_1 \cdot I_1 - N_2 \cdot I_2 = N_1 \cdot I_\mu \, . \tag{2.26}$$

Das Minuszeichen rührt von der Lenzschen Regel her. Man beachte, dass der Primärstrom I_1 auch den Magnetisierungsstrom I_μ enthält, also

$$I_1 = I_\mu + \frac{N_2}{N_1} I_2 \, .$$

Durch den erhöhten Primärstrom wird ein zuätzlicher Fluss Φ_{1h} erzeugt, der den Sekundärfluss Φ_{2h} vollständig kompensiert und es sich wieder der ursprüngliche Hauptfluss Φ_h einstellt.

Daraus folgt, dass der stationäre Hauptfluss eines Transformators unabhängig von seiner Belastung konstant bleibt. Dies lässt sich einfach mit einem Dreiwicklungstransformator beweisen. Dieser Transformator besitzt eine Primärwicklung und zwei Sekundärwicklungen. Die Leerlaufspannung der einen Sekundärwicklung kann man als Maß für den wirksamen Hauptfluss betrachten. Sie ändert sich nur unwesentlich bei Belastung der anderen Sekundärwicklung.

Die rechte Seite der Gleichung (2.26) stellt die magnetische Spannung (Erregung) dar, die erforderlich ist, den Fluss

$$\Phi_1 = \frac{1}{N_1} \int U_1 \, \mathrm{d}t \qquad \text{(Induktionsgesetz)} \tag{2.27}$$

aufrechtzuerhalten. Dieser Fluss und die dazugehörige Flussdichte dienen als Entwurfsgrößen beim Bau von Transformatoren.

2.3.2 Idealer Transformator

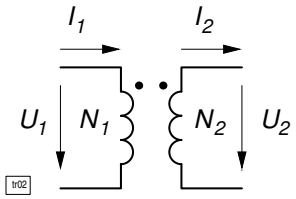
Bildet man für den *Leerlauf* das Verhältnis von Primär- zu Sekundärspannung, erhält man mit den Gleichungen (2.24) und (2.27)

$$\frac{U_1}{U_{20}} = \frac{N_1}{N_2} \frac{\Phi_h + \Phi_{1\sigma}}{\Phi_h} \, .$$

Sind Primär- und Sekundärspule *vollständig magnetisch gekoppelt*, werden $\Phi_1 \to \Phi_h$ und $\Phi_{1\sigma} \to 0$. Für den *idealen* Transformator ergibt sich daraus das *Übersetzungsverhältnis* $\ddot{u}$ mit

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}} \, . \tag{2.28}$$

Gleichung (2.25) zeigt, dass der magnetische Widerstand R_m bei vorgegebenem Fluss Φ_1 bzw. Φ_h die Höhe des Magnetisierungstromes I_μ bestimmt. Lässt man $\mu_r \to \infty$, geht der magnetische Widerstand $R_m \to 0$ und der Magnetisierungstrom $I_\mu \to 0$. Für den idealen Transformator folgt daraus das Übersetzungsverhältnis für die Ströme



$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\ddot{u}}} \,. \tag{2.29}$$

Ein idealer Transformator hat keine Verluste und keine Streuung. Die Ausgangsleistung ist gleich der Eingangsleistung.

☞ **Hinweis**: ein Transformator kann von beiden Seiten betrieben werden. Die Zuordnung der Wicklungen zur Primär- und Sekundärseite ist willkürlich und hängt von der Energierichtung ab. Als Primärwicklung wird die Wicklung bezeichnet, die den Magnetisierungsstrom liefert. Da im allg. der Transformator zur Spannungsanpassung eingesetzt wird, verwendet man zweckmäßigerweise die Begriffe *Unterspannungs-* und *Oberspannungsseite* (US, OS) bzw. *-wicklung*.

Zur Beurteilung der Polarität von Ein- und Ausgangsspannung ist der Wickelsinn der Spulen maßgebend. Klemmen, die im Stromlaufplan mit einem Punkt versehen sind, besitzen gleiche Polarität. Diese Vereinbarung trifft man vorwiegend für sog. *Übertrager* in der Nachrichtentechnik an. In der Energietechnik verwendet man statt dessen genormte Anschlussbezeichnungen.

2.3.3 Aufbau

Ein Transformator in der Energietechnik besteht aus den Wicklungen und dem Eisenkern. Der Eisenkern dient zur magnetischen Kopplung der Wicklungen. Zur Verringerung der Hystereseverluste (siehe Abschnitt Magnetisierungskennlinie) verwendet man Weicheisen. Da er einem Wechselfluss ausgesetzt ist, muss er geblecht sein, um die Wirbelstromverluste herabzusetzen. Zur Überwindung des magnetischen Widerstandes R_m ist ein Magnetisierungstrom erforderlich. Um ihn möglichst gering zu halten, wird man versuchen, R_m so klein wie möglich zu machen. Man erreicht dies durch einen qualitativ guten Eisenkern ($\mu_r \gg 1$), große Eisenquerschnitte und Vermeidung von Luftspalten.

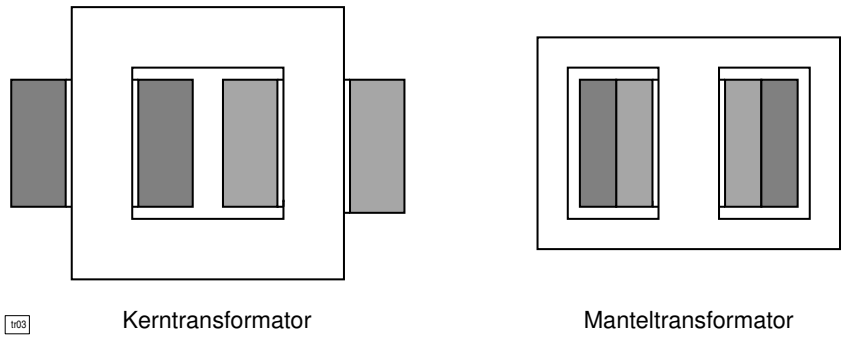


Abb. 2.42: Kernausführungen

Beim *Kerntransformator* verteilt man die Wicklungen auf zwei Schenkel (Abb. 2.42), die durch Joche miteinander verbunden sind. Beim *Manteltransformator* liegen die Wicklungen auf einem Schenkel und man führt den Fluss durch zwei Joche zurück[11].

[11] **Begriffe:** einen bewickelten Eisenkern bezeichnet man als *Schenkel*, unbewickelt als *Joch*.

Die Streuflüsse vermindern die Wirkung der Hauptflüsse. Durch Vermeidung von Stoßfugen (Luftspalt), geringe Flussdichte (Sättigung) und enge magnetische Kopplung von Primär- und Sekundärwicklungen lassen sich die Streuflüsse auf einige Prozent verringern. Primär- und Sekundärwicklung können auf getrennten Schenkeln untergebracht werden, was die Streuung erhöht. Zur Verringerung der Streuung ist es im allg. günstiger, die Wicklungen übereinander (*Zylinderwicklung*) oder eng nebeneinander (*Scheibenwicklung*) anzuordnen (Abb. 2.43). Die Wicklungs-

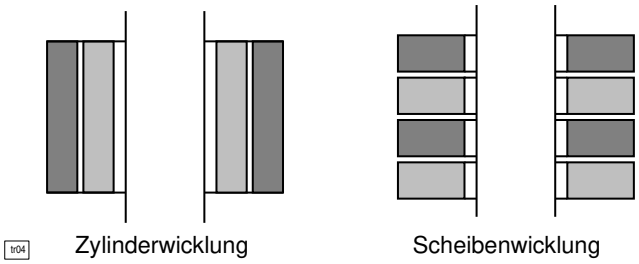


Abb. 2.43: Wicklungen

ausführung hat auch Einfluss auf den Isolationsaufwand. Zur Vermeidung hoher *Lagenspannungen* bei Zylinderwicklungen teilt man die gesamte Wicklung in Einzelspulen auf und schalten sie als Scheibenwicklung in Reihe.

2.3.4 Ersatzschaltbild des realen Transformators

Verluste entstehen durch den ohmschen Widerstand der Wicklung, durch den magnetischen Widerstand des Eisenkerns, durch die unvollkommene Kopplung der Spulen/Wicklungen und durch die Ummagnetisierung und Wirbelströme im Eisenkern.

Abb. 2.44 zeigt das Ersatzschaltbild eines realen Transformators, welches diese Verluste berücksichtigt. Die ohmschen Verluste der Wicklungen werden durch die Widerstände R_1 und

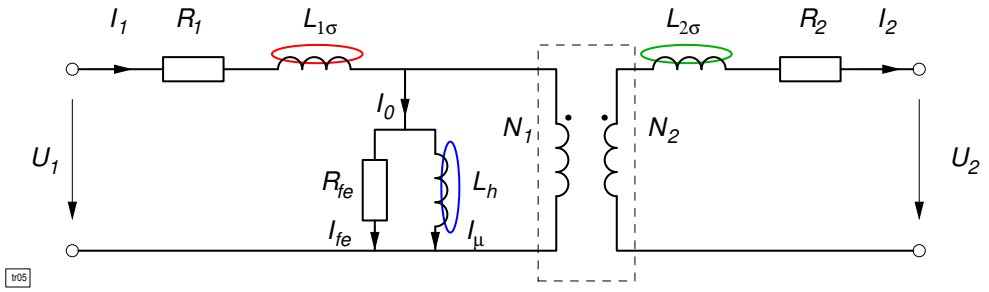


Abb. 2.44: Ersatzschaltbild eines realen Transformators

R_2 erfasst. Die Wicklungen stellen Induktivitäten dar. Die Streuflüsse werden durch *Streuinduktivitäten* nachgebildet, die nicht mit anderen Induktivitäten magnetisch gekoppelt sind ($L_{1\sigma}, L_{2\sigma}$). Den Hauptfluss $\Phi_h = \Phi_{1h} - \Phi_{2h}$ erzeugt die *Hauptinduktivität* L_h. Die Kopplung zwischen Primär- und Sekundärseite wird durch den idealen Transformator erreicht, der entsprechend dem Windungszahlverhältnis Spannungen und Ströme gemäß den Gleichungen (2.28) und (2.29) transformiert. Für die Eisenverluste des Transformators kann man vereinfacht folgende Abhängigkeiten annehmen[12]:

$$P_{\text{fe}} \sim B^2 \sim \Phi_h^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi_h \sim U_1 \; .$$

[12] In Wirklichkeit ist der Zusammenhang wesentlich komplizierter.

Daraus folgt

$$P_{\mathrm{fe}} \sim U_1^2 \ .$$

Diese Abhängigkeit erfüllt ein konstanter Widerstand an der Spannung U_1, denn es gilt $P_{\mathrm{fe}} = U_1^2/R_{\mathrm{fe}}$. Man erfasst deshalb die Eisenverluste des Transformators durch einen ohmschen Widerstand R_{fe}, den man parallel zur Hauptinduktivität schaltet. Dieser Widerstand ist nicht Teil des Transformators, also in Wirklichkeit nicht vorhanden und nicht direkt messbar!

Für die Berechnung des Betriebsverhaltens ist es im allg. günstiger, alle Betriebsgrößen auf eine Seite (z. B. Primärseite) zu beziehen und die magnetische Kopplung durch eine galvanische Verbindung zu ersetzen. Dies erreicht man dadurch, dass man den idealen Transformator »hinter« die sekundären Größen legt. Man erhält das sog. T-Ersatzschaltbild (Abb. 2.45), welches aus einem verlustbehafteten Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis 1:1 und einem nachgeschalteteten idealen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} : 1$ besteht.

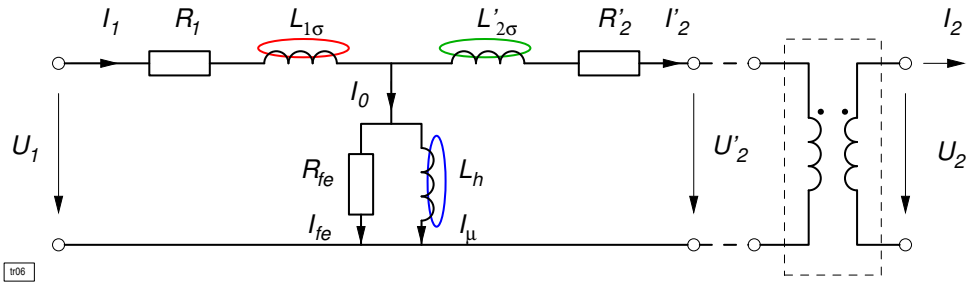


Abb. 2.45: T-Ersatzschaltbild eines realen Transformators

Durch die »Verschiebung« des idealen Transformators hinter das T-Ersatzschaltbild müssen alle sekundären Größen entsprechend des Übersetzungverhältnisses umgerechnet werden:

$$\boxed{U_2' = \ddot{u} \cdot U_2} \qquad \boxed{I_2' = \frac{1}{\ddot{u}}\ I_2} \qquad \boxed{R_2' = \ddot{u}^2 \cdot R_2} \qquad \boxed{L_{2\sigma}' = \ddot{u}^2 \cdot L_{2\sigma}} \tag{2.30}$$

Die mit einem Strich (') gekennzeichneten Größen nennt man *reduzierte* oder *transformierte Größen*.

Statt mit Induktivitäten kann man auch mit Reaktanzen rechnen. In diesem Zusammenhang spricht man von *Streureaktanzen*, *Hauptreaktanz*, *Querimpedanz* (X_h, R_{fe}) und *Längsimpedanz* ($R_1, X_{1\sigma}, X_{2\sigma}', R_2'$). Auch für die Reaktanzen gilt

$$\boxed{X_2' = \ddot{u}^2\, X_2} \ .$$

Mit den angenommenen Stromrichtungen in Abb. 2.45 erhält man in der komplexen Schreibweise für den *Leerlaufstom* I_0

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2' = \underline{I}_\mu + \underline{I}_{\mathrm{fe}} = \underline{I}_0 \ ,$$

der neben dem Magnetisierungsstrom noch eine reelle Komponente I_{fe} zur Deckung der Eisenverluste enthält.

Aus dem Ersatzschaltbild erkennt man einen wichtigen Sachverhalt: die Eisenverluste in der Querimpedanz sind nur von der Spannung und der Frequenz abhängig und somit *lastunabhängig*. Die Wicklungsverluste in der Längsimpedanz sind nur vom Belastungsstrom abhängig, also *lastabhängig*.

2.3.5 Bestimmung der ESB-Parameter

Die Elemente des Ersatzschaltbildes lassen sich aus einem Kurzschluss- und einem Leerlaufversuch bestimmen.

Leerlaufversuch

Beim *Leerlaufversuch* wird aus Sicherheitsgründen grundsätzlich von der *Oberspannungsseite* (OS) eingespeist. Gemessen werden die Leerlaufspannung U_{10}, der Leerlaufstrom I_{10} und die aufgenommene Leerlauf(wirk)leistung P_{10} (Abbildung 2.46). Wegen des geringen Leerlaufstro-

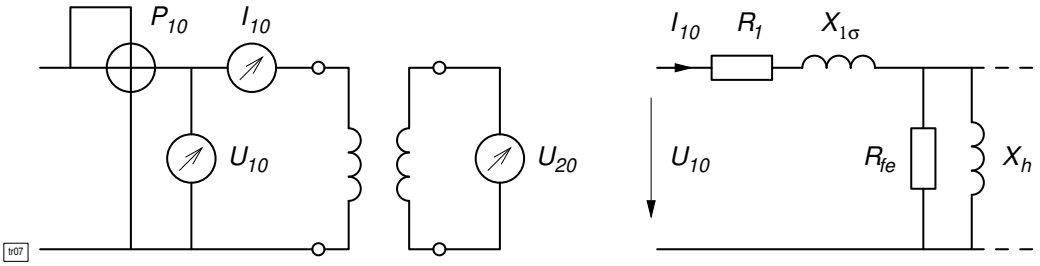


Abb. 2.46: Leerlaufversuch: Messschaltung und Ersatzschaltbild

mes und der im allgemein kleinen Längsimpedanz dürfen die Spannungsabfälle an R_1 und $X_{1\sigma}$ vernachlässigt werden. Aus den gemessenen Größen erhält man einen Teil der Ersatzschaltbildparameter.

$$\boxed{\ddot{u} \approx \frac{U_{10}}{U_{20}}}$$

$$\boxed{\cos\varphi_0 = \frac{P_{10}}{U_{10} \cdot I_{10}}}$$

$$\boxed{I_{\mathrm{fe}} = I_{10} \cdot \cos\varphi_0}$$

$$\boxed{I_{\mu} = I_{10} \cdot \sin\varphi_0}$$

$$\boxed{X_h = \frac{U_{10}}{I_{\mu}}}$$

$$\boxed{R_{\mathrm{fe}} = \frac{U_{10}}{I_{fe}}} \quad \text{oder direkter:} \quad \boxed{R_{\mathrm{fe}} = \frac{U_{10}^2}{P_{10}}}$$

$$\boxed{i_0 = \frac{I_{10}}{I_{1N}}} \quad \text{(relativer Leerlaufstrom)}$$

Die Leerlaufleistung entspricht den lastunabhängigen Eisenverlusten P_{fe}. Wird der Leerlaufversuch mit Nennspannung durchgeführt, gilt $P_{\mathrm{feN}} = P_{10}$. Andernfalls muss die gemessene Leerlaufleistung P_{10} auf die Nennspannung U_{1N} umgerechnet werden. Vereinfacht gilt:

$$\boxed{P_{\mathrm{feN}} = P_{10} \left(\frac{U_{1N}}{U_{10}}\right)^2}$$

Die Eisenverluste stellen einen nicht zu unterschätzenden Betriebskostenanteil dar, da sie unabhängig von der Belastung während der ganzen Betriebszeit (z. B. 20 Jahre) auftreten und bezahlt werden müssen (Wirkleistung!).

Kurzschlussversuch

Beim *Kurzschlussversuch* wird die *Unterspannungsseite* (US) kurzgeschlossen und von der *Oberspannungsseite* (OS) eine verminderte Spannung U_{1k} eingespeist, die so groß eingestellt wird, dass der Nennstrom $I_{1k} = I_{1N}$ fließt. Gemessen wird die Kurzschlussspannung U_{1k}, der Kurzschlussstrom I_{1k} sowie die Kurzschlussleistung P_{1k} (Abbildung 2.47).

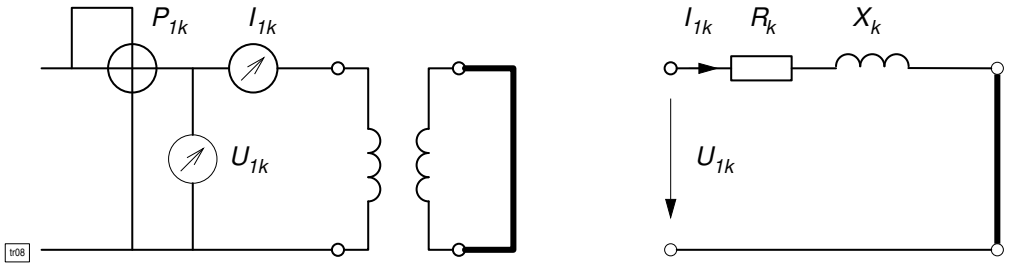


Abb. 2.47: Kurzschlussversuch: Messschaltung und Ersatzschaltbild

Da die Längsimpedanz um mehrere Größenordnungen kleiner ist als die Querimpedanz, kann der Einfluss der Querimpedanz vernachlässigt werden. Die Längsimpedanz Z_k wird zu einem Widerstand R_k und einer Reaktanz X_k zusammengefasst.

$$Z_k = \sqrt{R_k^2 + X_k^2} = \sqrt{(R_1 + R_2')^2 + (X_{1\sigma} + X_{2\sigma}')^2}$$

$$\boxed{\cos\varphi_k = \frac{P_{1k}}{U_{1k} \cdot I_{1k}}}$$

$$\boxed{Z_k = \frac{U_{1k}}{I_{1k}}}$$

$$\boxed{R_k = Z_k \cdot \cos\varphi_k}$$

$$\boxed{X_k = Z_k \cdot \sin\varphi_k}$$

Für normal gewickelte Transformatoren kann man annehmen:

$$\boxed{R_1 = \frac{R_k}{2} = R_2'}$$

$$\boxed{X_{1\sigma} = \frac{X_k}{2} = X_{2\sigma}'}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_2'}{\ddot{u}^2}}$$

$$\boxed{X_{2\sigma} = \frac{X_{2\sigma}'}{\ddot{u}^2}}$$

☞ **Hinweis**: Wegen des Stromverdrängungseffektes würde eine Gleichstrommessung zu kleine Werte für R_1 und R_2 liefern.

Ein wichtiges Beurteilungskriterium stellt die *relative Kurzschlussspannung* u_k dar[13]:

$$\boxed{u_k = \frac{U_{1k}}{U_{1N}}} \,.$$

Sie beschreibt den inneren Spannungsabfall und beträgt je nach Transformatorleistung und Anwendung etwa 4–12 %. Je größer die relative Kurzschlussspannung ist, desto mehr schwankt die Sekundärspannung bei Belastung, desto kleiner ist der *Dauerkurzschlussstrom*:

$$I_D = \frac{U_{1N}}{Z_k} = \frac{U_{1N}}{Z_k} \cdot \frac{I_{1N}}{I_{1N}} = I_{1N} \frac{U_{1N}}{Z_k \cdot I_{1N}} = I_{1N} \frac{U_{1N}}{U_{1k}} = \frac{I_{1N}}{u_k} \,. \tag{2.31}$$

Ein Kurzschluss bei Nennspannung kann zu gefährlich hohen Kurzschlussströmen und damit zur Zerstörung von Betriebseinrichtungen führen. Aus diesem Grund schreibt man zur Begrenzung der Kurzschlussströme in Energieverteilungsnetzen Mindestwerte für die Kurzschlussimpedanzen vor.

Die Kurzschlussleistung entspricht den lastabhängigen Kupferverlusten P_{Cu}. Wird der Kurzschlussversuch mit Nennstrom durchgeführt, gilt $P_{\mathrm{CuN}} = P_{1k}$, andernfalls muss die gemessene Kurzschlussleistung P_{1k} auf Nennstrom umgerechnet werden:

$$\boxed{P_{\mathrm{CuN}} = P_{1k} \left(\frac{I_{1N}}{I_{1k}} \right)^2} \,.$$

2.3.6 Wirkungsgrad

Für den *Wirkungsgrad* gilt bei abgegebener Leistung P_{ab} und Laststrom I

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\mathrm{ab}}}{P_{\mathrm{ab}} + P_{\mathrm{feN}} + P_{\mathrm{CuN}} \left(\frac{I}{I_N} \right)^2}} \tag{2.32}$$

wobei der Ausdruck (I/I_N) sowohl für den Primär- als auch für den Sekundärstrom gilt. Es läßt sich zeigen, dass der Wirkungsgrad maximal wird, wenn die stromabhängigen Verluste P_{Cu} gleich den Eisenverlusten P_{fe} sind (Abb. 2.48)[14]:

$$\boxed{P_{\mathrm{CuN}} \left(\frac{I}{I_N} \right)^2 = P_{\mathrm{feN}}} \,.$$

Ein direktes Messen (direktes Verfahren) des Wirkungsgrades mittels Leistungsmesser scheidet wegen des hohen Wirkungsgrades und der benötigten Leistung bei großen Leistungstransformatoren aus.

[13] VDE 0532 bezeichnet die relative Kurzschlussspannung mit u_z.

[14] ergibt sich aus $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}P} = 0$

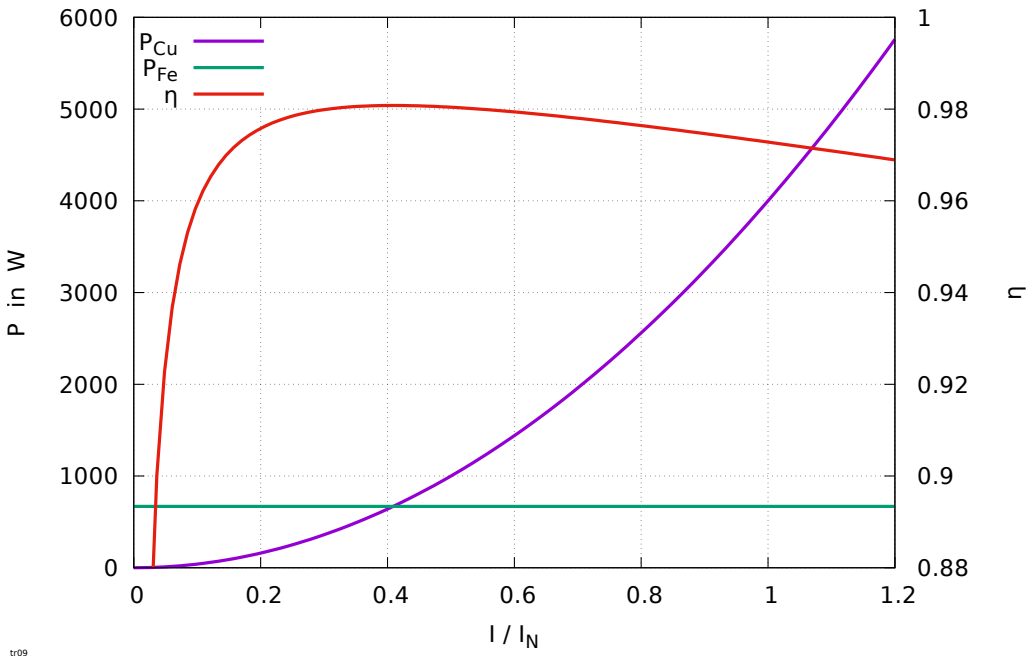


Abb. 2.48: Verluste und Wirkungsgrad eines 167 kVA Transformators

2.3.7 Spannungsänderung bei Belastung

Mit dem vereinfachten Ersatzschaltbild, wie es beim Kurzschlussversuch angenommen wird (Abb. 2.47), lässt sich auf einfache Art der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsspannung (Größe und Phase) konstruieren.

Die Spannungsabfälle $U_R = I_1 \cdot R$ und $U_X = I_1 \cdot X$ bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks (*Kappsches Dreieck*). Das Seitenverhältnis des Dreiecks ergibt sich aus dem Kurz-

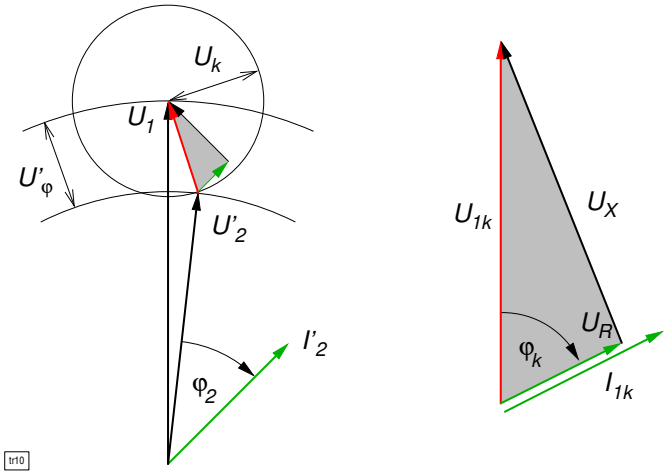


Abb. 2.49: Spannungsänderung infolge der Belastung

schlussversuch (Abb. 2.49):

$$\boxed{\tan \varphi_k = \frac{X}{R}} \,.$$

Die Hypotenuse entspricht der Differenzspannung U_K zwischen den Pfeilspitzen von U_1 und U_2'. Die Lage des Dreiecks wird durch den sekundären Leistungsfaktor φ_2, die Größe des Dreiecks durch den sekundären Laststrom I_2' bestimmt. Je nach Belastung liegt der Spannungsvektor U_2' auf einem Kreis um die Spitze des Vektors von U_1 mit dem Radius U_K.

Man beachte, dass bei kapazitivem Leistungsfaktor die Ausgangsspannung mit der Belastung steigen kann.

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot R + \mathrm{j}\,\underline{I}_1 \cdot X + \underline{U}_2' = \underline{U}_R + \underline{U}_X + \underline{U}_2'$$

Für überschlägige Berechnungen (nach VDE 0532 Teil 10 bei Nennkurzschlussspannungen $< 4\,\%$) ergibt sich die Ausgangsspannung bei relativer Teilbelastung I_2/I_{2N} zu:

$$\boxed{U_2(\varphi_2, I_2) = U_{20}\left(1 - u_\varphi \frac{I_2}{I_{2N}}\right)}$$

mit

$$\boxed{u_\varphi = \frac{U_\varphi'}{U_{1N}} = u_r \cdot \cos\varphi_2 + u_x \cdot \sin\varphi_2} \qquad \boxed{u_r = u_k \cdot \cos\varphi_k} \qquad \boxed{u_x = u_k \cdot \sin\varphi_k}$$

und der sekundären Leerlaufspannung U_{20}.

☞ **Hinweis:** Nach VDE 0532 (?) soll zur Ermittlung der Nennübersetzung folgende Regelung gelten:

- bei Kleintransformatoren ($S_N \leq 16$ kVA) wird das Übersetzungsverhältnis mit der Sekundärspannung bei ohmscher *Nennlast* ermittelt;
- bei Großtransformatoren ($S_N > 16$ kVA) wird die sekundäre *Leerlaufspannung* eingesetzt.

2.3.8 Drehstromtransformatoren

Drehstromleistung kann prinzipiell mittels drei Einphasentransformatoren übertragen werden. Bei symmetrischer Belastung spielen sich in jedem Transformator die gleichen elektromagnetischen Zustände ab, jeweils um 120° verschoben. Aus wirtschaftlichen Gründen baut man Drehstromtransformatoren als eine Einheit. Je nach Bauart bringt man die Wicklungen auf einem Schenkel (Mantel-) oder auf drei Schenkeln (Kern- oder Fünfschenkeltransformator) unter (analog zu Abb. 2.42). Ab sehr großen Leistungen verwendet man aus Transportgründen und zwecks Reservehaltung drei Einphasentransformatoren (Transformatorbank).

Die Wicklungen können je nach Anwendung auf der Oberspannungsseite und auf der Unterspannungsseite sowohl im Stern als auch im Dreieck geschaltet werden. Zusätzlich gibt es für die Unterspannungsseite auch die Zickzackschaltung (s. u.).

Ersatzschaltung

Aus dem Aufbau eines Drehstromsystems aus 3 Einphasentransformatoren folgt, dass sich die Grundgleichungen des einphasigen Transformators ohne Einschränkungen auf die einander zugeordneten primären und sekundären Strangspannungen bzw. -ströme anwenden lassen. Bei der Berechnung sind jedoch die Schaltungen der Primär- und Sekundärwicklungen zu beachten.

Für die Scheinleistung in Drehstromsystemen gilt, unabhängig von der Schaltungsart

$$\boxed{S = \sqrt{3}\,U \cdot I}$$

mit U als verkettete Spannung und I als Leiterstrom.

Je nach Schaltungsart müssen die einphasigen Ersatzgrößen entsprechend der nebenstehenden Tabelle umgerechnet werden.
☛ Die relativen Größen $i_0, u_k, u_x, u_r, u_\varphi$ gelten unverändert.

Schaltung	$S_{1\sim}$	$U_{1\sim}$	$I_{1\sim}$
Stern	$\frac{S}{3}$	$\frac{U}{\sqrt{3}}$	I
Dreieck	$\frac{S}{3}$	U	$\frac{I}{\sqrt{3}}$

Schaltungsarten

Drehstromwicklungen können im Stern, Zickzack, Dreieck oder mit offenen Wicklungen ausgeführt werden.

Bei der *Zickzackschaltung* verteilt man die Unterspannungswicklung auf zwei Schenkel des Kerns. Sie findet vorteilhaft bei unsymmetrischer Belastung Verwendung (Verteilertransformatoren in Ortsnetzen). Nachteilig ist der erhöhte Wicklungsaufwand durch die entgegengesetzte Reihenschaltung der beiden Teilwicklungen.

Die Schaltungsarten sowie die Ausführung des Sternpunktes werden durch große (OS) und kleine Buchstaben (US) gekennzeichnet.

Schaltung	OS	US
Stern	Y	y
Dreieick	D	d
Zickzack		z
offen	III	iii
Sternpunkt herausgeführt	N	n

Schaltgruppen

Bei einphasigen Transformatoren sind Primär- und Sekundärwicklung mit demselben Fluss gekoppelt, die Ausgangsspannung kann, je nach Polung der Sekundäranschlüsse, nur gleich- oder gegenphasig sein.

Bei Drehstromtransformatoren gilt dies ebenfalls für die Spannungen von Wicklungen, die auf einem Schenkel liegen.

Zusätzlich können aber noch, je nach Schaltungsart, verkettete Spannungen mit Wicklungen gebildet werden, die auf anderen Schenkel liegen und jeweils um 120° phasenverschoben sind. Durch geometrische Addition dieser Wicklungsspannungen ergeben sich unterschiedliche Phasenlagen zwischen Primär- und Sekundärspannungen.

Dividiert man den Winkel zwischen den korrespondierenden Spannungszeigern[15] durch 30°, ergibt sich eine Kennzahl zwischen 0 und 11 (Uhrzeiger), die zusammen mit der Schaltungsart die *Schaltgruppe* bildet (siehe Abb. 2.50).

[15] man benutzt dazu die Spannungen 1V und 2V bezogen auf den vorhandenen oder angenommenen Sternpunkt

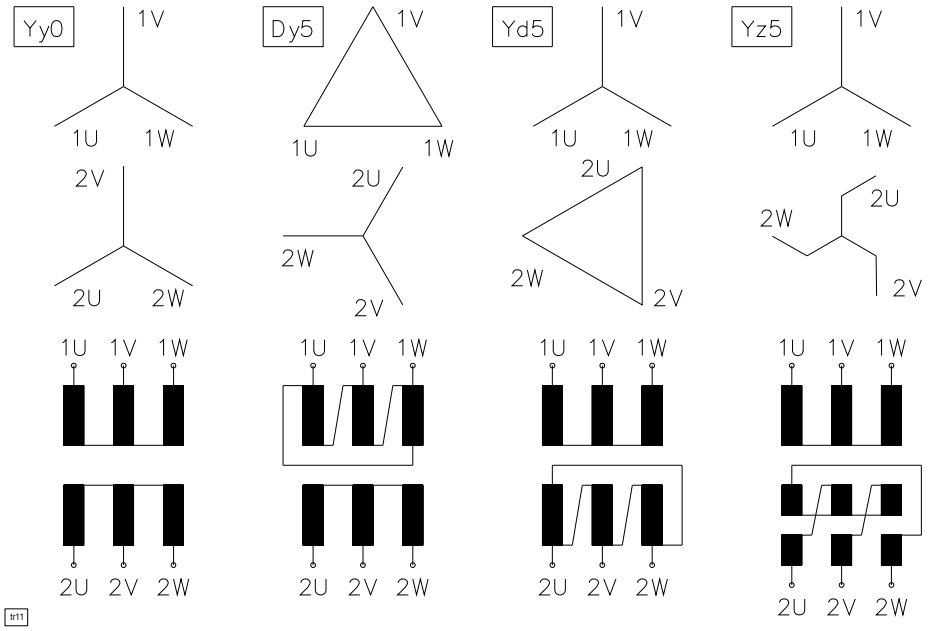


Abb. 2.50: Übersicht der wichtigsten Schaltgruppen (Quelle: Kampschulte)

Beispiel: Schaltgruppe Yzn11 bedeutet, der Transformator ist primär im Stern und sekundär im Zickzack geschaltet, der sekundäre Nulleiter ist ausgeführt, die Phasenlage zwischen den Sternspannungen 1V und 2V beträgt 330°.

2.3.9 Anschlussbezeichnungen

Die Klemmenbezeichnung von Transformatoren sind nach DIN 42 400 genormt (Abb. 2.51).

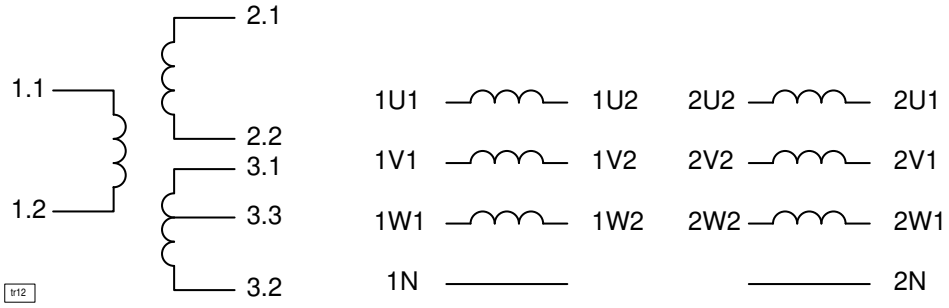


Abb. 2.51: Anschlussbezeichnungen ein- und dreiphasiger Transformatoren

2.3.10 Schaltsymbole

Neben den hier gezeigten Schaltsymbolen existieren weitere Symbole, die je nach Verwendung der Schaltunterlagen verwendet werden dürfen. Abb. 2.52 zeigt eine kleine Auswahl. Es bedeuten:

a) allg. Darstellung eines Transformators mit zwei getrennten Wicklungen in einpolige Darstellung, stetig veränderbar

b) einphasiger und

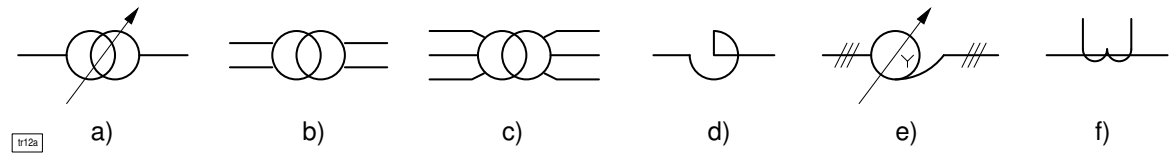


Abb. 2.52: Verschiedene Schaltsymbole für Transformatoren und Drosseln

c) dreiphasiger Transformator in mehrpolige Darstellung

d) Drossel

e) dreiphasiger Spartransformator, stetig veränderbar, Sternschaltung, in einpolige Darstellung

f) Stromwandler.

2.3.11 Einsatzgebiete

In der Energieversorgung werden Transformatoren zur Verteilung der Energie eingesetzt. Die Übertragung über größere Entfernungen ist wirtschaftlich nur bei hohen Spannungen möglich.

Ein großer Kraftwerksgenerator erzeugt eine Spannung in der Größenordnung 20 – 30 kV, die von einem *Maschinentransformator*, der direkt mit dem Kraftwerksgenerator verbunden ist, auf 220 kV oder 380 kV hochtransformiert und ins (europäische) Netz eingespeist wird. Mittels *Verteilertransformatoren* wird die Leistung den regionalen Mittelspannungsnetzen mit z. B. 20 kV zugeführt und von dort am Verbraucherort auf die benötigte Spannung von z. B. 400/230 V heruntertransformiert.

Schweißtransformatoren haben eine hohe relative Kurzschlussspannung, damit bei Änderung der Lichtbogenspannung (Elektrodenabstand) der Schweißstrom einigermaßen konstant bleibt und die Elektroden beim Zünden nicht am Werkstück »festkleben«.

Spielzeugtransformatoren (»Klingeltrafo«) müssen kurzschlussfest sein (u_k sehr groß).

Trenntransformatoren dienen zur galvanischen Trennung zweier Netze ($\ddot{u} = 1$).

Spannungswandler dienen besonders zum Messen hoher Wechselspannungen, ihre Sekundärspannung beträgt z. B. 100 V (genormt). Spannungswandler haben sehr gering Kurzschlussspannungen, da sie streuarm gebaut werden (Messgenauigkeit).

Stromwandler sind wie Transformatoren aufgebaut, der zu messende Strom fließt durch die Primärwicklung *und ist eingeprägt*. Die Primärwicklung besteht deshalb aus wenigen Windungen, im Extremfall aus einer Windung (der stromführende Leiter wird durch den Kern gesteckt). Gemessen wird der sekundäre Kurzschlussstrom mit einem Amperemeter entsprechend Gleichung (2.29). Die Sekundärströme sind genormt (z. B. 1 A, 5 A).

☞ **Achtung**: Stromwandler dürfen nie mit offenen Sekundärklemmen betrieben werden sondern müssen immer mit einer *Bürde* (niederohmige Messeinrichtung, kurzgeschlossen) belastet werden.

2.4 Drehfelder

2.4.1 Erzeugung einer einphasigen Wechselspannung

Wie man eine (pulsierende) Gleichspannung erzeugen kann wurde bereits bei der Gleichstrommaschine im Kapitel Aufbau und Wirkungsweise erklärt. Ersetzt man den Stromwender (Kommutator) durch einfache Schleifringe, lässt sich an den Schleifringen eine Wechselspannung abgreifen, wenn man die Leiterschleife verdreht (Abb. 2.53). Für den Motorbetrieb muss man eine

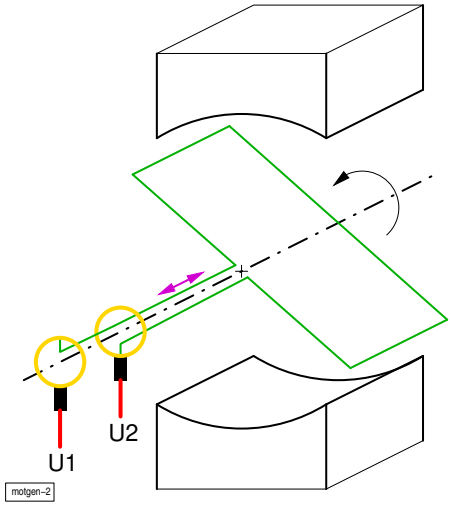


Abb. 2.53: Erzeugung einer einphasigen Wechselspannung

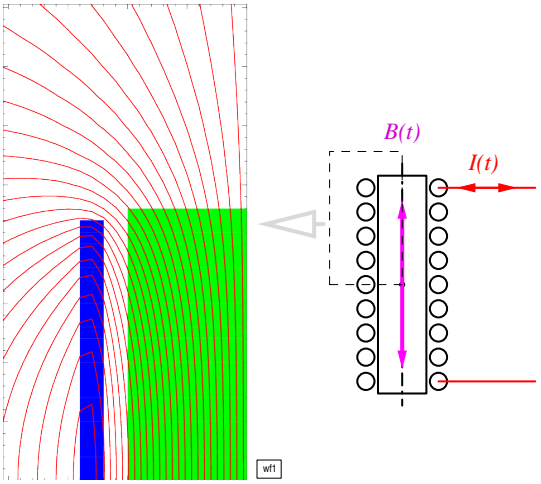


Abb. 2.54: Entstehung eines Wechselfelds, Feldverlauf, Ströme (blau)

Wechselspannung an die Schleifringe legen. Man erkennt aber sofort, dass dieser Motor nicht anlaufen wird und wenn, dann nur die Drehzahl annehmen kann, die mit der Frequenz der Wechselspannung übereinstimmt[16] (➞ Synchronmotor, Kapitel Aufbau).

2.4.2 Wechselfeld

Legt man an eine Leiterschleife oder Spule eine Wechselspannung, fließt ein Wechselstrom $i(t)$, der einen magnetischen Fluss $\Phi(t)$ erzeugt, zu dem die Flussdichten $\vec{B}(t)$ gehören. Die Richtungen der Vektoren $\vec{B}$ sind mit dem Strom $i(t)$ durch die Rechte-Hand-Regel verknüpft und entsprechen den Tangenten an den Feldlinien, die Längen sind abhängig von der Flussdichte an dem jeweiligen Ort und sind umgekehrt proportional zu den Feldlinienabständen.

Für analytische Berechnungen und Betrachtungen fasst man die Wirkung des B-Feldes zu einem Vektor zusammen (*Raumzeiger*). Seine Richtung entspricht der Hauptrichtung des magnetische Feldes (positives Maximum), seine Länge dem Maximalwert. In Abb. 2.54 liegt das Maximum der Flussdichte in der Mitte der Spule, die Richtung von $\vec{B}$ fällt mit der Spulenachse zusammen *und ändert sich nicht*. Abb. 2.54 links zeigt den berechneten Feldlinienverlauf[17] innerhalb und außerhalb der Spule.

[16] Bei der in Abb. 2.53 dargestellten Geomtrie und einer 50 Hz Wechselspannung dreht sich die Leiterschleife nur bei exakt 3000 min^{-1}.

[17] Aus Symmetriegründen genügt es bei dieser Anordnung, nur ein Viertel der Spule zu berechnen.

☞ Ein Wechselstrom erzeugt ein Wechselfeld, dem man einen Raumzeiger zuordnen kann. Die Richtung des Zeigers zeigt in Richtung des positiven Feldmaximums, die Länge des Zeigers ist proportional zum Feldmaximum.

2.4.3 Erzeugung einer dreiphasigen Wechselspannung — Drehstromnetz

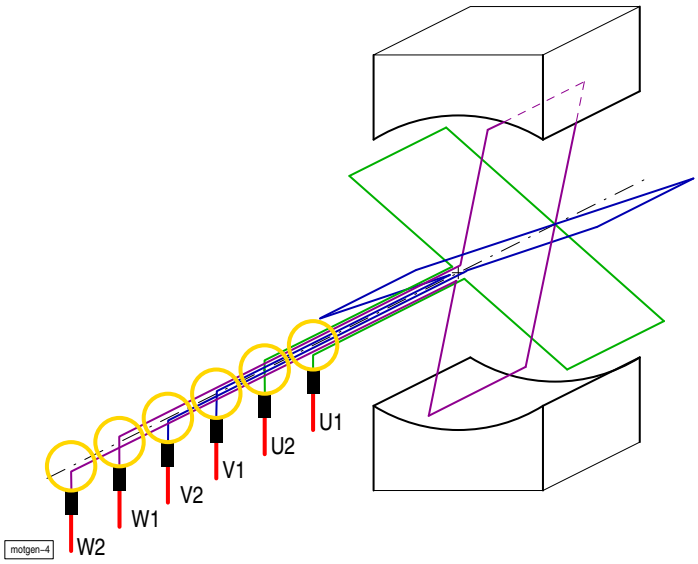


Abb. 2.55: Erzeugung einer dreiphasigen Wechselspannung (Drehstromgenerator)

Fügt man der Leiterschleife in Abb. 2.53 zwei weitere Schleifen hinzu, die jeweils um 120° mechanisch versetzt angeordnet sind und versieht die Welle mit vier weiteren Schleifringen, die mit den Leiteranfängen und -enden der zusätzlichen Leiterschleifen verbunden sind, erhält man einen Drehstromgenerator. Die sechs Anschlüsse/Klemmen tragen die genormten Bezeichnungen U1, U2, V1, V2, W1, W2 und gehören zu den drei Phasen U, V, W. Die drei Spannungen an den Klemmen U1–U2, V1–V2, W1–W2 sind idealerweise sinusförmig und elektrisch um jeweils 120° phasenverschoben.

> Das Modell in Abb. 2.55 ist nicht zweckmäßig. In der Praxis schaltet man die drei Phasen entweder im Dreieck oder im Stern zusammen und benötigt dann nur 3 bzw. 4 Schleifringe (*Außenpolmaschine*) oder als *Innenpolmaschine*, bei der die Leiterschleifen im feststehenden Teil der Maschine untergebracht sind (Ständer, Stator) und die Erregerpole auf dem rotierenden Teil (Läufer, Rotor) befestigt sind (siehe Kapitel Aufbau). Werden die verschalteten Anschlüsse der Maschine nach außen geführt, erhalten sie die Bezeichnungen L1, L2, L3, N (Außenleiter). Weitere Einzelheiten zu Drehstromnetzen findet man in [7, Kapitel Drehstromsystem].

2.4.4 Drehfeld

Versuch 2.4.1 *Verbindet man drei Spulen, die kreisförmig um 120° versetzt angeordnet sind, mit einem Drehstromsystem, entsteht in der Mitte ein Drehfeld (Abb. 2.56), welches man mit einer Magnetnadel nachweisen kann.*

Dem Drehfeld kann man einen Raumzeiger zuordnen, der aus der geometrischen Addition der drei Wechselfelder entsteht. Abb. 2.57 zeigt den zeitlichen Verlauf der drei Flüsse Φ_u, Φ_v, Φ_w auf

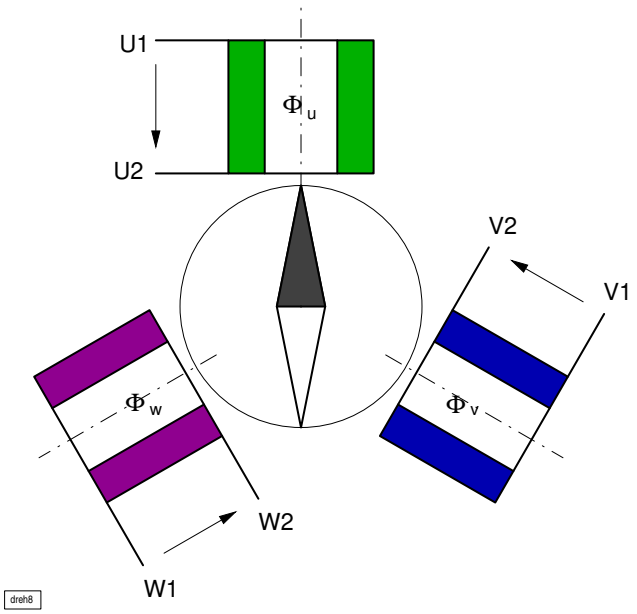


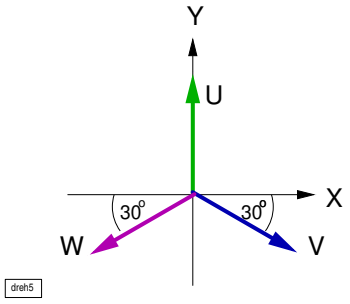
Abb. 2.56: Nachweis eines Drehfeldes mit Hilfe einer Magnetnadel

einer Zeitachse zusammen (links) und getrennt nach Phasen unter Berücksichtigung der jeweiligen Position in der Maschine (rechts). In den drei Spulen erzeugt jede Phase nur ein Wechselfeld, und zwar in Richtung der Spulenachsen. Zu jedem Zeitpunkt ändern sich die Größen der drei Wechselfelder, nicht aber die Richtungen. Aus der rechten Abbildung sind die jeweiligen Spulenflüsse zum Zeitpunkt $t = 0$ ersichtlich, und zwar $\Phi_u(0) = 0, \Phi_v(0) = \sqrt{3}\hat{\Phi}/2, \Phi_w(0) = -\sqrt{3}\hat{\Phi}/2$. Den resultierenden Gesamtfluss $\Phi(0)$ in der Bohrungsmitte erhält man durch geometrische Addition der drei sowohl elektrisch als auch auch mechanisch verschobenen Einzelflüsse.

Hinweis: in den Abbildungen zeigen die Spulenachsen nach innen zur Bohrungsmitte, die Koordinatenachsen der drei Phasen zeigen nach außen. Positive Flüsse zeigen deshalb in die entgegengesetzte Richtung.

Bei sinusförmigen Flußverlauf gelten für die drei Phasen z. B.:

$$\Phi_u(t) = \hat{\Phi}\,\sin(\omega t)$$
$$\Phi_v(t) = \hat{\Phi}\,\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$
$$\Phi_w(t) = \hat{\Phi}\,\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})\,.$$



Zerlegt man die 3 Flüsse in kartesische Komponenten, erhält man

$$\begin{aligned} x(t) &= -\Phi_w(t)\cdot\cos 30° && +\Phi_v(t)\cdot\cos 30° \\ y(t) &= -\Phi_v(t)\cdot\sin 30° \quad +\Phi_u(t) && -\Phi_w(t)\cdot\sin 30° \end{aligned}$$

Dies entspricht einem Kreis in der Parameterdarstellung, d. h. die drei Flüsse überlagern sich zu einem sich drehenden Fluss (*Drehfeld*), der durch einen sich drehenden Vektor (*Raumzeiger*) dargestellt werden kann (siehe auch Anhang Simulation eines Drehfeldes).

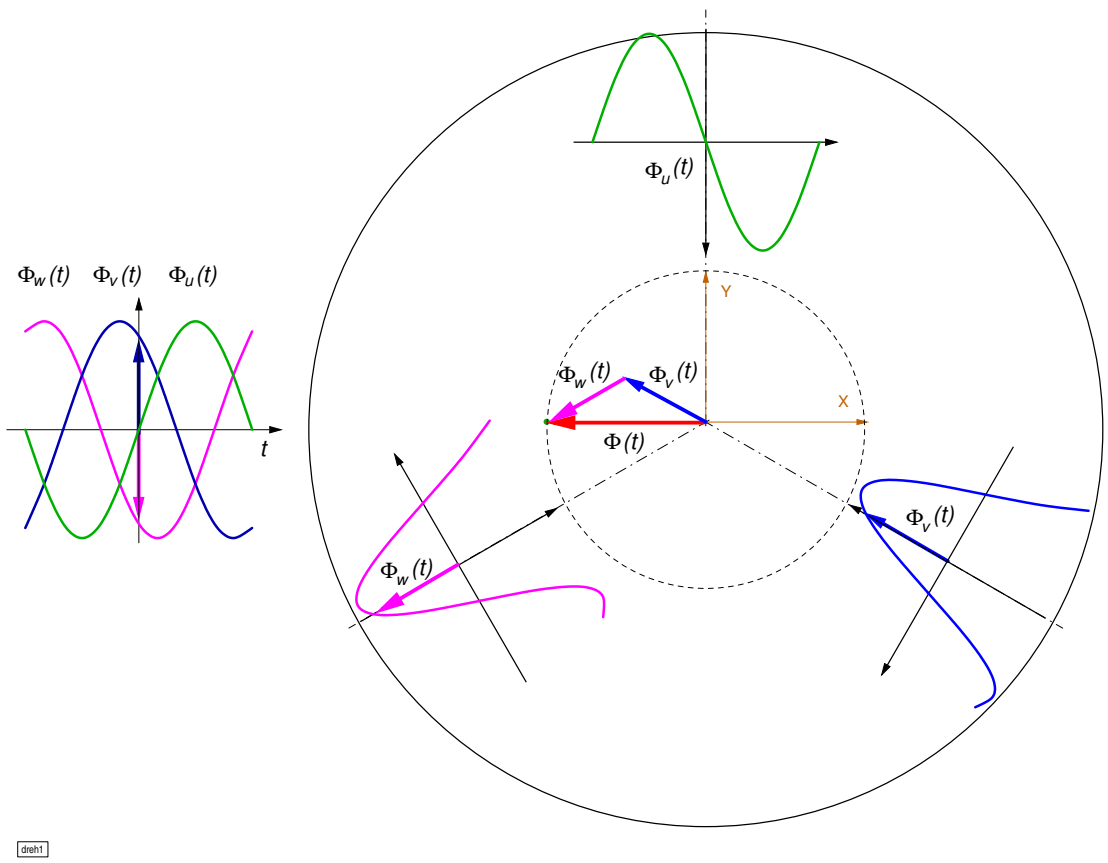


Abb. 2.57: Erzeugung eines Drehfeldes aus drei Wechselfeldern

Versuch 2.4.2 *Aus einer Drehstrommaschine wird der Läufer ausgebaut. In die Ständerbohrung führt man zwei gleiche Spulen ein, deren Spulenachsen um 90° versetzt und quer zur Läuferachse angeordnet sind. Die Spulenanschlüsse werden mit den X- und Y-Platten eines Oszilloskops verbunden, das Oszilloskop im XY-Modus betrieben. Die Ständerwicklung wird an ein Drehstromnetz mit verminderter Spannung angeschlossen.*

Auf dem Oszilloskop erscheint ein Kreis, da der rotierende Fluss in der Ständerbohrung in beiden Spulen eine Spannung induziert, die durch die Lage der Spulenachsen in zwei senkrecht zueinanderstehende X- und Y-Komponenten zerlegt werden und durch den XY-Modus im Oszilloskop wieder einen Kreis ergeben.

2.4.5 Linearfeld (Wanderfeld)

Statt die Pole einer Drehstromwicklung kreisförmig anzuordnen kann man sie z. B. auch mit ihren Spulenachsen neben- oder hintereinander positionieren (Abb. 2.58). Schaltet man die Spulen hintereinander (linkes Bild) liegen alle drei Flüsse in derselben Achse, ihre Addition ergibt zu jedem Zeitpunkt den Wert Null, d. h. die Spulen haben keinen Einfluss auf den Gesamtfluss des magnetischen Kreises. Dieser Sachverhalt führt zu der Bauform des *Tempeltyps* bei Drehstromtransformatoren, bei dem man die drei mittleren Joche aus diesem Grund weglassen kann (siehe [7, Transformator]).

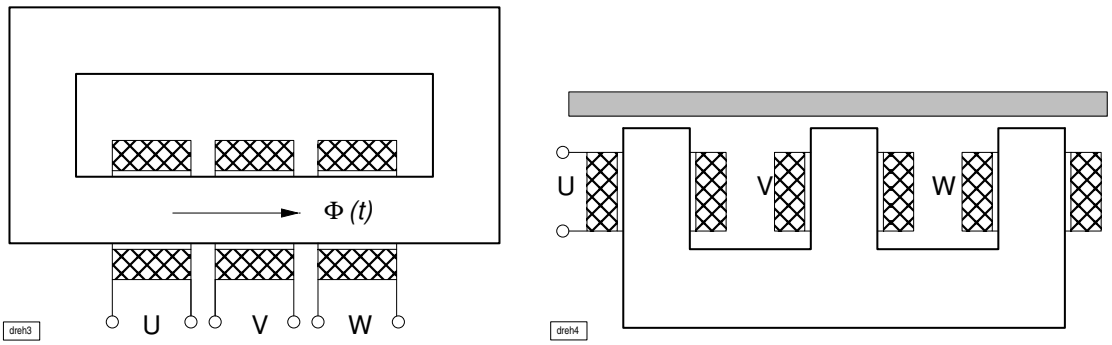


Abb. 2.58: Unterschiedliche Spulenanordnungen einer Drehstromwicklung auf einem Eisenkern

Anders sieht es bei der Anordnung rechts aus. Hier entstehen in jedem Schenkel drei Wechselflüsse, die zeitlich um 120° phasenverschoben sind, d. h. das Feldmaximum wandert zyklisch von einer Seite der Anordnung zur entgegengesetzten Seite. Bei 50 Hz errechnet sich die Geschwindigkeit des *Wanderfeldes* aus Abstand der beiden äußeren Schenkel dividiert durch 20 ms. Positioniert man über den Schenkeln eine bewegliche unmagnetisch aber elektrisch leitende Schiene, z. B. aus Aluminium, erzeugt das Wanderfeld in der Schiene Wirbelströme, die zu abstoßenden und gleichzeitig schiebenden Kräften auf die Schiene führen, das Prinzip des *Linearantriebs*. Man kann den Effekt verstärken, wenn man die Aluminiumschiene mit Eisenwerkstoff hinterlegt, der als magnetischer Rückschluss funktioniert und den Magnetfluss im Luftspalt bzw. in der Aluminiumschiene verstärkt.

2.4.6 Drehstromwicklung

Wie bereits erwähnt werden Drehstromgeneratoren hauptsächlich als Innenpolmaschinen gebaut. Die drei Leiterschleifen werden in den Stator als *Durchmesserspulen* in Nuten gelegt, jeweils in eine Nut für den Hinleiter und in eine um $180°_{\text{elektrisch}}$ versetzte Nut für den Rückleiter (Abb. 2.59). Dadurch verändert sich die Richtungen der jeweiligen Spulenachsen nicht. Aus

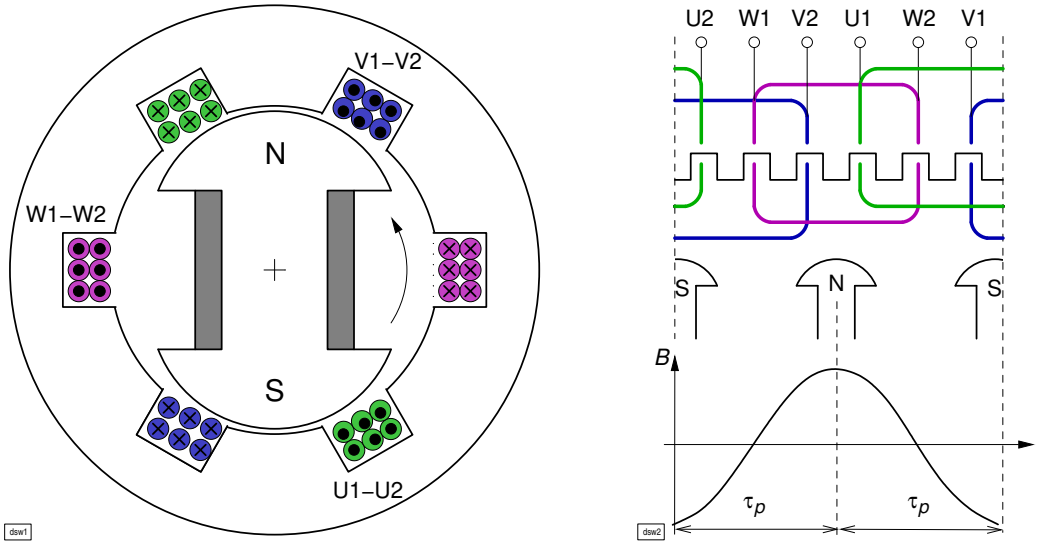


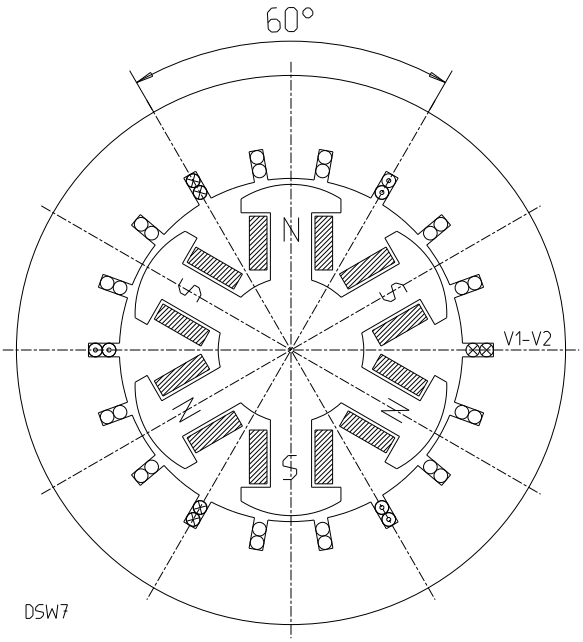
Abb. 2.59: Einfachste Drehstromwicklung im Querschnitt und in der Abwicklung

den Leiterschleifen werden Wicklungen mit mehreren Windungen. Für eine 2-polige Maschine[18], also einem Polpaar $p = 1$, braucht man also mindestens 6 Nuten, um eine Drehstromwicklung unterzubringen.

Die magnetischen Verhältnisse bei realen Maschinen sind nicht so ideal wie hier angenommen wird. Die Form der Ausgangsspannung des Generators entspricht im allg. nicht den Forderungen des Kraftwerksbetreibers bzw. der Verbraucher. Damit die induzierte Spannung sinusförmig ist, müssen die Flussänderungen in den Wicklungen ebenfalls sinusförmig sein. Um eine *sinusförmige* Ausgangsspannung an den Generatorklemmen zu erhalten muss man konstruktive Maßnahmen ergreifen. Dazu gehören variable Luftspalte bei Schenkelpolen und verteilte und gesehnte Wicklungen.

Aus Abbildung 2.59 erkennt man, dass bei einer Umdrehung des Rotors (*Polrad*) der Fluss genau einmal seine Richtung wechselt, d. h. die mechanische Winkelgeschwindigkeit Ω ist identisch mit der elektrischen Winkelgeschwindigkeit ω. Für den Fall $p = 1$ ist der mechanische Winkel α_{mech} identisch mit dem elektrischen Winkel $\alpha_{\text{el}} = \omega\, t$. Die Polteilung τ_p beträgt immer $180°_{\text{elektrisch}}$. Bei einer Maschine mit einem Polpaar ($p = 1$) entspricht das auch dem halben Umfang der Maschine.

Zur besseren Ausnutzung und Erhöhung der Leistung und des Drehmoments kann man die Anzahl der Polpaare erhöhen. Mit jedem neuen Polpaar muss auch eine neue Drehstromwicklung entlang des Ständerumfangs aufgebracht werden, d. h. zu einem Erregerpolpaar gehört auch eine vollständige Drehstromwicklung. Bei vorgegebener Netzfrequenz f bedeutet das, dass sich die Drehzahl n eines Motors oder Generators mit der Polpaarzahl p verringert. Entlang des Ständerumfangs treten jetzt die Wicklungen U1-U2, V1-V2, W1-W2 genauso oft auf wie Polpaare vorhanden sind. Die Wicklungen, die zu einer Phase gehören, werden dabei üblicherweise in Reihe geschaltet.



Daraus leiten sich die wichtigen Beziehungen ab:

$$\boxed{\Omega = \frac{\omega}{p}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{n = \frac{f}{p}}$$

$$\boxed{\tau_p = \frac{\pi}{p}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{\text{el}} = p \cdot \alpha_{\text{mech}}} \,.$$

Die Erregerpole werden mit wechselnder Polarität auf dem Polrad angeordnet.

[18] Die Polzahl bezieht sich auf die Erregerpole.

2.5 Asynchronmaschine

2.5.1 Wirkungsweise

Im Kapitel 2.4 wurde gezeigt, wie man aus räumlich versetzten Spulen und zeitlich phasenverschobenen Strömen ein Drehfeld erzeugen kann. Die Drehzahl n_1 des Drehfeldes ergibt sich aus der Netzfrequenz f_1 und der Polpaarzahl p zu

$$\boxed{n_1 = \frac{f_1}{p}} \,. \tag{2.33}$$

Versuch 2.5.1 *Spulengruppe mit Magnetnadel an einem Drehstromsystem (siehe Abb. 2.56).*

Die Spulen bilden die Ständerwicklung und erzeugen ein Drehfeld. Die Magnetnadel ist ein kleiner Dauermagnet und folgt dem Drehfeld als Läufer. Wegen des geringen Trägheitsmoments und der sehr kleinen Reibungsverluste wird sich die Magnetnadel *synchron* mit dem Drehfeld drehen, und zwar so, dass sich im Luftspalt entgegengesetzte Pole gegenüberstehen. Bei größeren Massen (Trägheitsmomente) läuft eine solche Anordnung jedoch nicht von alleine an.

Durch einen »Trick« kann man das Drehfeld doch zur Erzeugung einer Drehbewegung auch aus dem Stillstand heraus benutzten.

Versuch 2.5.2 *Statt der Magnetnadel wird eine drehbar gelagerte Spule mit offenen Klemmen in die Mitte der Spulengruppe gestellt.*

Das Drehfeld induziert eine Spannung in der drehbaren Spule (Versuch 2.4.2), die man z. B. mit dem Oszilloskop messen kann. Wenn sich die Spule nicht dreht, ist die Frequenz der induzierten Spannung gleich der Drehfeldfrequenz. Die Form der induzierten Spannung hängt von der Form der räumlichen Feldverteilung im Luftspalt ab.

Versuch 2.5.3 *Wie Versuch 2.5.2 mit kurzgeschlossenen Klemmen.*

Durch den Kurzschluss kann ein Strom in der drehbaren Spule (= Läuferwicklung) fließen. Dessen Magnetfeld erzeugt zusammen mit dem Drehfeld der Spulengruppe (= Ständerdrehfeld) ein Drehmoment. Die Drehrichtung ergibt sich z. B. aus der Lenzschen Regel. Danach wird sich der Läufer in die Richtung bewegen, bei der die Ursache gehemmt wird, also die Induktionsspannung kleiner wird. Das geschieht in Drehrichtung des Ständerdrehfeldes.

Man erhält das Drehmoment auch aus der Kraftformel für stromführende Leiter in einem Magnetfeld $M = 2 \cdot r \cdot B \cdot l \cdot I$ (siehe Abschnitt …auf stromführende Leiter).

Versuch 2.5.4 *Wie Versuch 2.5.1, mit drehbar hochkant gelagertem Kurzschlussring.*

Der Kurzschlussring stellt die kurzgeschlossene Spule dar. Die induzierte Spannung ist zwar wesentlich kleiner, dafür ist der Kurzschlussstrom entsprechend größer.

Wie schnell wird sich der Kurzschlussring drehen?

Dazu muss man sich das Prinzip noch einmal vor Augen halten: das Drehmoment entsteht auf Grund des Kurzschlussstromes, der Strom entsteht durch die im Ring induzierte Spannung, die Spannung entsteht durch die Flussänderung, die wiederum durch die *Differenzgeschwindigkeit zwischen Drehfeld und dem Läufer*(Kurzschlussring) entsteht. Sie ist am größten, wenn der Ring sich nicht dreht ($n = 0$), sie ist Null, wenn der Ring sich mit der gleichen Drehzahl wie das Drehfeld dreht ($n = n_1$). Wenn aber die Differenzgeschwindigkeit zwischen Ständerfeld und Läufer Null ist, sieht der Ring keine Flussänderung, damit wird keine Spannung induziert, es fließt kein Kurzschlussstrom mehr, das Drehmoment verschwindet. Damit fällt die Drehzahl ab und es entsteht wieder eine Differenzgeschwindigkeit zwischen beiden Systemen.

Stationär wird sich ein Gleichgewichtszustand einstellen, bei dem die Drehzahldifferenz Δn zwischen Ständerdrehzahl n_1 und Läuferdrehzahl n gerade so groß wird, dass der induzierte Kurzschlussstrom ein Drehmoment erzeugt zur Überwindung der mechanischen Verluste. Man bezeichnet diese Drehzahldifferenz Δn bezogen auf die Ständerdrehzahl n_1 als den *Schlupf* s. Es gilt

$$\boxed{s = \frac{\Delta n}{n_1} = \frac{n_1 - n}{n_1}} \,. \tag{2.34}$$

Der Läufer dreht sich also *asynchron* zum Ständerdrehfeld mit dem Schlupf s.

Um das Drehmoment zu erhöhen, kann man die Zahl der Kurzschlusswindungen erhöhen und so anordnen, dass sie einen Käfig bilden.

Versuch 2.5.5 *Wie Versuch 2.5.1, mit drehbarem Kurzschlusskäfig.*

Man bezeichnet eine solche Maschine wegen ihrer Wirkungsweise als *Kurzschlussläufer*, die Ausführung des Läufers nennt man *Käfigläufer*. Würde man die Anzahl der kurzgeschlossenenen Windungen weiter erhöhen, kommt man im Grenzfall zu einem zylindrischen Hohlkörper.

Versuch 2.5.6 *Wie Versuch 2.5.1, mit einer drehbaren Eisenblechdose.*

Aus den Kurzschlussströmen werden Wirbelströme, die ebenfalls mit dem Ständerdrehfeld Drehmomente erzeugen.

☞ Auf massive, elektrisch leitende Werkstoffe (Cu, Al, Fe, …) im Drehfeld wirken Drehmomente auf Grund der in ihnen induzierten Wirbelströme.

Versuch 2.5.7 *Lineare Spulenanordnung an einem Drehstromnetz mit Aluminiumschiene (siehe Abbildung 2.58 rechts).*

Dieser Versuch zeigt das Prinzip des Linearmotors.

Beim Käfigläufer besteht im allg. keine Eingriffsmöglichkeit von außen, die Kurzschlussströme zu beeinflussen. Verwendet man statt der *Käfigwicklung* eine offene Wicklung (siehe Versuch 2.5.2) und führt die Wicklungsenden über *Schleifringe* aus der Maschine, hat man Zugriff auf die induzierte Spannung und Ströme im Läufer. Eine solche Maschine bezeichnet man als *Schleifringläufer*(Abb. 2.60).

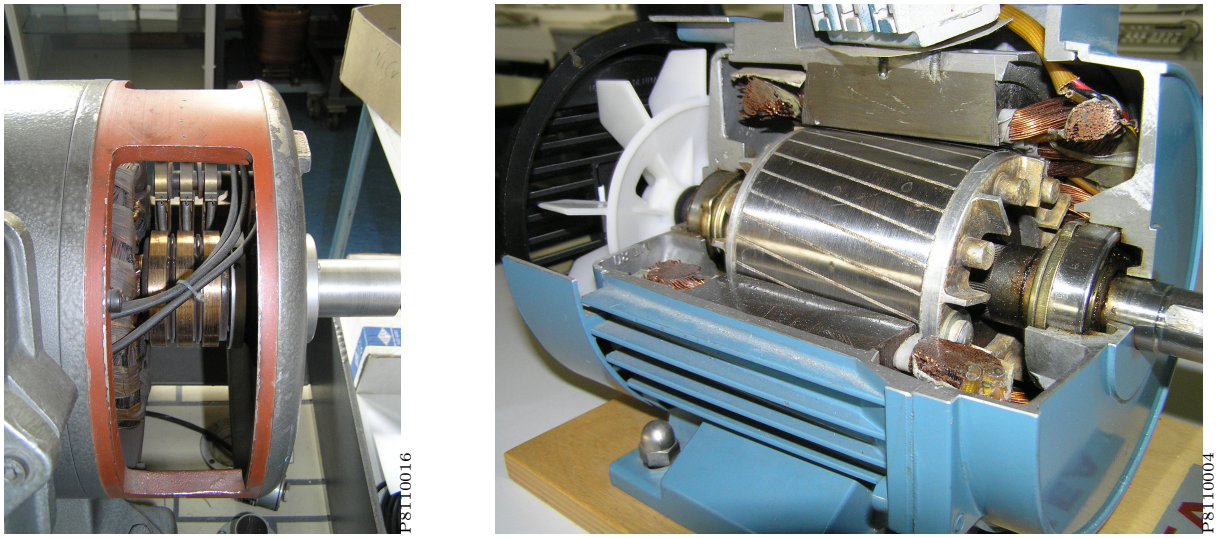


Abb. 2.60: Schleifringläufer (links) und aufgeschnittenes Modell eines Käfigläufers

2.5.2 Aufbau

Ständer

Das Ständerblechpaket besteht aus gegeneinander isolierten Dynamoblechen und trägt die Drehstromwicklung. Zur Reduktion von *Pulsationsverlusten* (Einfluss der Nutung) bringt man z. B. Drahtwicklungen als *Träufelwicklung* in *halbgeschlossenen Nuten* unter.

Luftspalt

Um den Erregerbedarf (entspricht dem Leerlaufstrom der ASM) möglichst gering zu halten, wird man versuchen, den Luftspalt so klein wie möglich zu machen. Zur Wahrung der Betriebssicherheit sind dem konstruktive Grenzen gesetzt (Auslaufen von Lagern, Durchbiegung der Welle). Der Luftspalt beträgt je nach Maschinengröße 0.2 bis 5 mm. Für Maschinen bis ca. 200 kW sind Mindestmaße für den Luftspalt vorgeschrieben.

Läufer

Da der Läufer im Nennbetrieb nur der Schlupffrequenz ausgesetzt ist, könnte man ihn massiv herstellen. Er wird jedoch vielfach aus wirtschaftlichen Gründen ebenfalls geblecht, da Läufer- und Ständerblech aus einer Blechtafel gestanzt werden können. *Massivläufer* werden eigentlich nur für schweranlaufende Antriebe und für höchste Drehzahlen aus Gründen der Festigkeit gebaut. Bei großen Maschinen ist die Anzahl der Anlaufvorgänge pro Stunde aus thermischen Gründen begrenzt.

Kurzschlussläufer

Beim Kurzschlussläufer besteht die Läuferwicklung aus einzelnen Leitern oder Stäben, die an den axialen Enden des Läufers durch Kurzschlussringe verbunden sind. Wegen der Form bezeichnet man diesen Läufer auch als *Käfigläufer* (Abb. 2.60 rechts). Die Leiter können unterschiedliche

Querschnitte haben und bestehen aus Kupfer, Bronze, Messing oder Aluminium. Um den magnetischen Kreis der Maschine zu schließen, werden die Hohlräume im Käfig mit Eisen ausgefüllt. Bei großen Maschinen werden die Läuferstäbe in die Läufernuten möglichst spielfrei eingeschlagen und an den Enden mit den Kurzschlussringen hartverlötet oder geschweißt. Bei kleineren und mittleren Maschinen gießt man die Stäbe und Ringe aus einem Stück in das Läufereisen (Druckguss, Niederdruckguss, Kokillenguss).

Schleifringläufer

Der Schleifringläufer besitzt Läufernuten, in denen die 3-phasige Läuferwicklung eingelegt wird. Dabei führt man im Läufer die gleiche Polpaarzahl aus wie im Ständer. Die Wicklungen schaltet man im Stern. Ihre Enden werden auf Schleifringe geführt.

Mit einer *Bürstenabhebevorrichtung* kann man die Abnutzung und Reibungsverluste durch die Schleifringe vermindern. Dabei werden durch eine Vorrichtung die Schleifringe auf der Welle kurzgeschlossen und die Bürsten von den Schleifringen abgehoben. Der Wirkungsgrad steigt dadurch geringfügig.

2.5.3 Läuferspannung, -frequenz

Die Läuferfrequenz f_2 ist die Frequenz, mit der sich das Ständerdrehfeld im Läufer ändert. Bei stillstehendem Läufer ist $f_2 = f_1$, dreht sich der Läufer mit Synchrondrehzahl, beträgt $f_2 = 0$. Dieser Zusammenhang lässt sich einfach durch den Schlupf ausdrücken:

$$\boxed{f_2(s) = s \cdot f_1}\,. \tag{2.35}$$

Bei konstantem Hauptfluss ändert sich die Läuferspannung U_{q2} proportional mit der Frequenz f_2, es gilt

$$\boxed{U_{q2}(s) = s \cdot U_{q20}}\,, \tag{2.36}$$

wobei man U_{q20} als die *Läufer-* oder *Rotorstillstandsspannung* bezeichnet. Sie steht auf dem Typenschild und kann sehr einfach im Stillstand zwischen den Schleifringen bei offenem Läuferkreis gemessen werden.

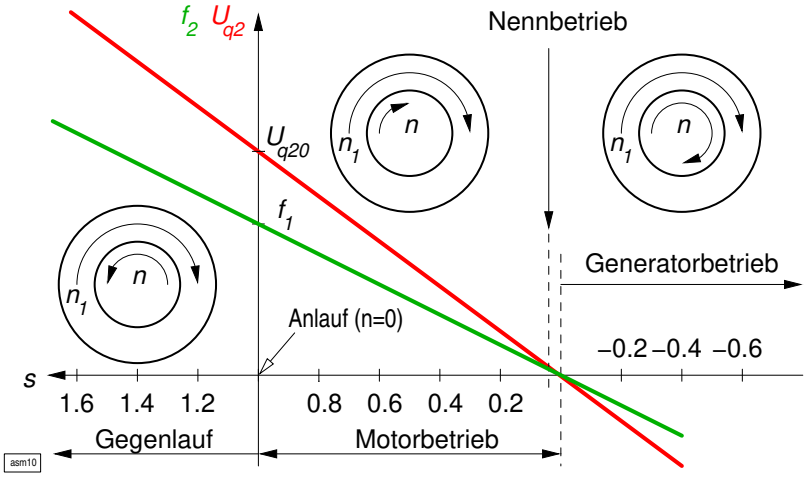


Abb. 2.61: Betriebsbereiche der Asynchronmaschine

Abb. 2.61 zeigt die Läuferfrequenz f_2 und -spannung U_{q2} in Abhängigkeit vom Schlupf. Man erkennt drei Betriebsbereiche:

$s > 1$ **:** Gegenlauf (Bremsbetrieb)

$1 > s > 0$ **:** untersynchroner Lauf (Motorbetrieb)

$0 > s$ **:** übersynchroner Lauf (Generatorbetrieb)

Der *Nennschlupf* bei Nennbetrieb für Asynchronmotoren beträgt etwa 0.5 bis 4 %.

Versuch 2.5.8 *Ein Schleifringläufer wird mittels Anlasswiderstand angelassen. In die Zuleitung eines Anlasswiderstandes schaltet man ein Gleichstrom-Amperemeter mit Nullpunkt in der Skalenmitte und beobachtet die Ausschläge beim vorsichtigen Anlauf, Leerlauf und bei zunehmender Belastung.*

Da die Läuferfrequenz f_2 beim Anlauf gleich der Netzfrequenz ist zeigt der Strommesser wegen der Zeigerträgheit nichts an. Mit zunehmender Drehzahl wird f_2 kleiner, ebenfalls der Läuferstrom, die Zeigerausschläge werden kleiner und langsamer. Im Leerlauf sind f_2 und der Läuferstrom fast Null. Bei Belastung steigen Läuferfrequenz und Läuferstrom.

Aus Abb. 2.61 erkennt man, dass die Läuferfrequenz im Gegenlauf größer wird als die Ständer-/Netzfrequenz f_1. Diese Tatsache nutzt man aus zum Erzeugen von Drehspannungen höherer Frequenz, wie man sie z. B. für hochtourige Antriebe benötigt. Abb. 2.62 zeigt die typische Schaltung eines solchen *Frequenzumformers*.

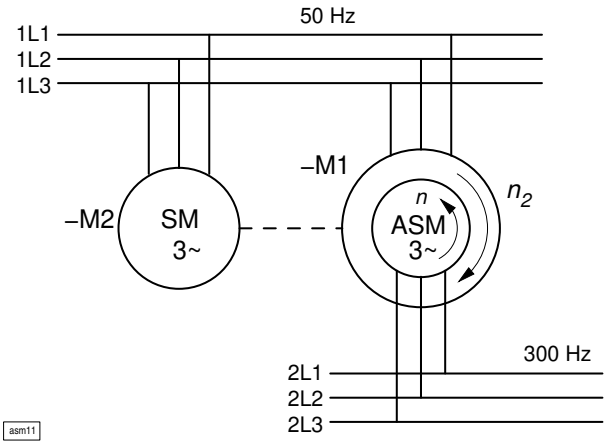


Abb. 2.62: Frequenzumformer

Beispiel: Der Umformer (Abb. 2.62) wird durch einen Synchronmotor M2 mit $1500\,\mathrm{min}^{-1}$ (Gegenlauf) angetrieben. Welche Polpaarzahl muss der Schleifringläufer M1 haben, damit die Frequenz der Ausgangsspannung 300 Hz beträgt?

Gesucht: n_1, p

$$n = -1500\,\mathrm{min}^{-1} \qquad f_1 = 50\,\mathrm{Hz} \qquad f_2 = 300\,\mathrm{Hz}$$

$$s = \frac{f_2}{f_1} = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{f_1/p - n}{f_1/p} \qquad \Longrightarrow \quad f_1 - n\,p = f_2$$

$$p = \frac{f_1 - f_2}{n} = \frac{50\,\mathrm{Hz} - 300\,\mathrm{Hz}}{-1500/60\,\mathrm{s}^{-1}} = 10$$

2.5.4 Ersatzschaltbild

Im *Stillstand* ($f_1 = f_2,\ s = 1$) verhält sich die ASM wie ein Transformator. Das Drehfeld der Ständerwicklung (= Primärwicklung) induziert im Läufer (= Sekundärwicklung) eine Läuferspannung gleicher Frequenz. Je nach Ausführung der Maschine ist die Sekundärwicklung kurzgeschlossen (Kurzschlussläufer) oder es fließt ein durch externe Widerstände gesteuerter Belastungsstrom (Schleifringläufer).

Anders als beim Transformator treten im *Betrieb* ($s \neq 1,\ f_1 \neq f_2$) unterschiedliche Frequenzen im Ständer- und Läuferkreis auf. Konstruktiver Hauptunterschied zwischen beiden Energiewandlern ist der funktionsbedingte Luftspalt der ASM. Vom Transformator weiß man, dass Luftspalte, Streustege, etc. eine Verschlechterung des magnetischen Kreises bedeuten, die u. a. eine Erhöhung des Leerlaufstroms und der Kurzschlussspannung zur Folge haben.

Es liegt daher nahe, für die ASM ein ähnliches Ersatzschaltbild (ESB) wie für den Transformator zu verwenden, welches zusätzlich noch die variable Läuferfrequenz f_2 berücksichtigt. Wegen des symmetrischen Aufbaus genügt ein einphasiges ESB. Analog zum ESB des Transformators macht man das Übersetzungsverhältnis zwischen Läufer- und Ständerwicklung zu eins ($N_2 = N_1$). Die sich dadurch ändernden sekundären Größen kennzeichnet man mit einem Hochkomma und bezeichnet sie als *transformierte* oder *reduzierte* Größen.

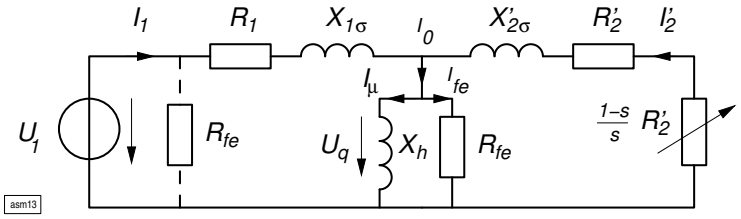


Abb. 2.63: Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine

Der Hauptfluss Φ_h induziert die Spannung U_q und wird durch eine gemeinsame Hauptreaktanz X_h berücksichtigt, durch die der Magnetisierungsstrom I_μ fließt. Im Unterschied zum Transformator tritt im Sekundärkreis eine schlupfabhängige Frequenz $s \cdot f_1$ und Spannung $s \cdot U_q$ auf. Dividiert man alle sekundären Größen durch den Schlupf s, werden die Spannungsabfälle an den Haupt- und Streuinduktivitäten drehzahlunabhängig. Der nunmehr schlupfabhängige Läuferwiderstand R_2'/s lässt sich in zwei Widerstände aufspalten:

$$\frac{R_2'}{s} = R_2' + \frac{1-s}{s} R_2' \tag{2.37}$$

Man erhält das Ersatzschaltbild nach Abb. 2.63, das dem eines Transformators entspricht, der mit dem Wirkwiderstand $R_2'\,(1-s)/s$ belastet wird. Die darin umgesetzte Wirkleistung stellt die abgegebene mechanische Leistung einschließlich der Reibungsverluste dar. Die Widerstände R_1 und R_2' erfassen die Kupferverluste der Ständer- und Läuferwicklungen, die Eisenverluste berücksichtigt man mit dem Widerstand R_{fe}. Mit den Reaktanzen $X_{1\sigma}$ und $X_{2\sigma}'$ erfasst man die Nut- und Stirnstreuflüsse von Ständer und Läufer.

2.5.5 Leistungsbilanz

Die Aufteilung der einzelnen Wirkleistungskomponenten lässt sich direkt aus dem ESB nach Abb. 2.63 herleiten. Es sei daran erinnert, dass es sich hier um ein einphasiges ESB handelt,

d. h. die aus dem ESB ermittelten Werte müssen mit der Phasenzahl m (hier 3) multipliziert werden. Weiterhin muss man die auf eine Phase bezogenen Größen U_1 und I_1 entsprechend der Schaltung der Maschine umrechnen analog wie bei Drehstromtransformatoren (Abschnitt Ersatzschaltung).

Die ASM nimmt aus dem Netz (U_1, I_1) die Wirkleistung P_1 auf:

$$\boxed{P_1 = 3 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi} \; .$$

Davon gehen im Ständer die Kupferverluste der Wicklung ab:

$$\boxed{P_{\mathrm{Cu1}} = 3 \cdot R_1 \cdot I_1^2} \; .$$

Die Eisenverluste sind proportional U_q^2, einer direkten Messung aber nicht zugänglich. Vereinfachend denkt man sich R_{Fe} parallel zu den Eingangsklemmen. Damit werden die Eisenverluste lastunabhängig und können aus einem Leerlaufversuch bestimmt werden.

$$P_{\mathrm{Fe}} = 3 \, \frac{U_q^2}{R_{\mathrm{Fe}}} \approx 3 \, \frac{U_1^2}{R_{\mathrm{Fe}}}$$

Wegen der geringen Läuferfrequenz im normalen Betriebsbereich rechnet man *alle* Eisenverluste dem Ständer zu. Die verbleibende Leistung wird als *Luftspaltleistung* oder *Drehfeldleistung* P_D bezeichnet, sie wird über den Luftspalt auf den Läufer übertragen. Ein Teil wird dort als Stromwärmeverluste in der Läuferwicklung umgesetzt:

$$P_{\mathrm{Cu2}} = 3 \cdot R_2' \cdot I_2'^2 \; . \tag{2.38}$$

Den verbleibenden Teil nennt man die *innere Leistung* P_i. Zu ihr gehört das *innere Drehmoment* M_i. Diese Leistung ist entsprechend der Gleichung (2.37) drehzahlabhängig, nämlich

$$P_i = 3 \, \frac{1-s}{s} \, R_2' \cdot I_2'^2 \; . \tag{2.39}$$

Man beachte, dass in dieser Leistung die Reibungsverluste P_{Rbg} enthalten sind, so dass für die abgegebene, mechanische Leistung P_2 gilt:

$$\boxed{P_2 = P_i - P_{\mathrm{Rbg}} = 2\pi \cdot n \cdot M \quad (= P_m)} \; .$$

Die Reibungsverluste sind drehzahlabhängig:

$$P_{\mathrm{Rbg}} = f(n, n^q) \quad \text{mit} \quad q > 1$$

und lassen sich rechnerisch nur sehr schwer bestimmen. Im allgemeinen ermittelt man sie aus einem Leerlaufversuch zusammen mit den Eisenverlusten (da $P_{\mathrm{Cu2}} \approx 0$). Für den Wirkungsgrad der Maschine ergibt sich daraus

$$\boxed{\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_{\mathrm{Typenschild}}}{\sqrt{3}\, U_N \, I_N \, \cos\varphi_N}} \; .$$

Insgesamt erhält man für die Leistungsbilanz nach Abb. 2.64

$$\boxed{P_1 = P_{\mathrm{Cu1}} + P_{\mathrm{Fe}} + \overbrace{\underbrace{P_{\mathrm{Rbg}} + P_2}_{P_i} + P_{\mathrm{Cu2}}}^{P_D}} \; . \tag{2.40}$$

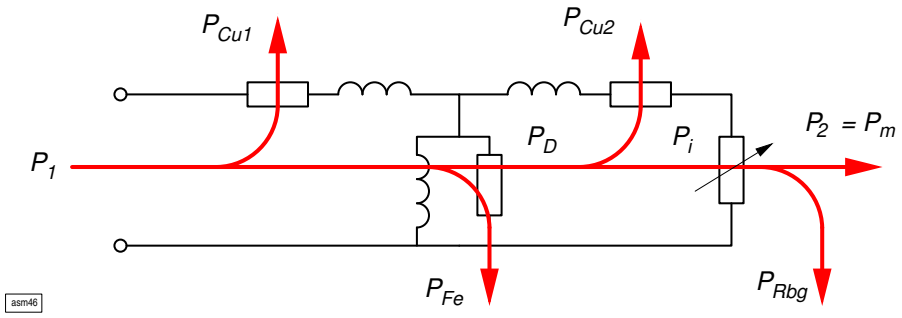


Abb. 2.64: Leistungsbilanz der Asynchronmaschine

Aus den Gleichungen (2.38) und (2.39) wird ein wichtiger Zusammenhang ersichtlich. Aus

$$P_D = P_i + P_{\mathrm{Cu2}} = 3 \cdot R_2' \cdot I_2'^2 \frac{1}{s} = \frac{P_{\mathrm{Cu2}}}{s} \tag{2.41}$$

ergibt sich für die innere Leistung (= mechanische Leistung plus Reibungsverluste):

$$P_i = P_D - P_{\mathrm{Cu2}} = P_D\,(1-s) \tag{2.42}$$

und für die Stromwärmeverluste in der Läuferwicklung (einschließlich evtl. externer Widerstände beim Schleifringläufer):

$$\boxed{P_{\mathrm{Cu2}} = s \cdot P_D}\,. \tag{2.43}$$

Man erkennt, dass im Stillstand ($s = 1$) die gesamte Luftspaltleistung im Läufer in Wärme umgesetzt wird. Mit zunehmender Drehzahl werden diese Verluste kleiner.

Zu der inneren Leistung P_i gehört das *innere Drehmoment* M_i

$$\boxed{M_i = M + M_{\mathrm{Rbg}} = \frac{P_2 + P_{\mathrm{Rbg}}}{2\pi \cdot n} = \frac{P_D - P_{\mathrm{Cu2}}}{2\pi \cdot n} = \frac{P_i}{2\pi \cdot n} = \frac{P_D\,(1-s)}{2\pi \cdot n_1\,(1-s)} = \frac{P_D}{2\pi \cdot n_1}} \tag{2.44}$$

mit M_{Rbg} als Reibungsmoment. Gleichung (2.44) erlaubt es, das Drehmoment ohne Kenntnis der Betriebsdrehzahl aus der Luftspaltleistung zu berechnen.

2.5.6 Bestimmung der ESB-Parameter

Für das einphasige Ersatzschalbild nach Abb. 2.63 müssen zuerst die einphasigen Größen U_1 und I_1 entsprechend der Schaltung (Dreieck oder Stern) ermittelt werden. Bei Leistungsmessungen gehen die gemessenen Gesamtleistungen nur zu einem Drittel in das einphasige ESB ein.

Weiterführende Informationen findet man im Abschnitt 4.1.3.

Widerstandsmessung

Den einphasigen Widerstand R_1 erhält man durch eine Gleichstrommessung mit etwa $0.1\,I_N$. Dabei ist die Schaltung und Umgebungstemperatur der Maschine zu berücksichtigen. Die Wicklungswiderstände müssen auf Betriebstemperatur umgerechnet werden.

Übersetzungsverhältnis

Bei Schleifringläufermaschinen kann man über die Läuferstillstandsspannung das Übersetzungsverhältnis zwischen Ständer- und Läuferwicklung ausrechnen. Die Läuferstillstandsspannung U_{20} wird bei stehender Maschine ($s = 1,\ f_2 = f_1$) zwischen den Schleifringen bei offenem Läuferkreis gemessen:

$$\ddot{u} = \frac{U_1}{U_{20}} \ .$$

Leerlaufversuch

Man bestimmt den Leerlaufstrom I_{10} und die aufgenommene Leistung P_0 bei evtl. verschiedenen Spannungen U_{10}. Wegen $s \approx 0$ (evtl. mit Hilfsmaschine auf Synchrondrehzahl bringen) ist auch der Läuferstrom $I_2'(s) \approx 0$, so dass sich das ESB vereinfacht (Abb. 2.65 links). Die Leer-

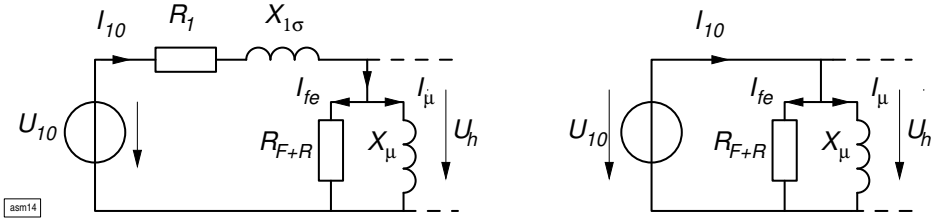


Abb. 2.65: Einphasige Ersatzschaltbilder für den Leerlaufversuch

laufverluste P_0 setzen sich zusammen aus den Stromwärmeverlusten der Ständerwicklung P_{Cu1}, den Eisenverlusten P_{Fe} und den mechanischen Reibungsverlusten P_{Rbg}. Letztere werden im ESB durch einen gemeinsamen Widerstand $R_{\mathrm{F+R}}$ dargestellt. Es gilt:

$$P_0 = P_{\mathrm{Fe}} + P_{\mathrm{Rbg}} + P_{\mathrm{Cu1}} \ . \tag{2.45}$$

Legt man zur *Vereinfachung* der Berechnungen die Querimpedanz $X_\mu \parallel R_{\mathrm{F+R}}$ parallel zu den Eingangsklemmen (Abb. 2.65 rechts), ergibt sich aus

$$P_0 = 3\ \frac{U_{10}^2}{R_{\mathrm{F+R}}}$$

der Ersatzwiderstand für die Eisen- *und* Reibungsverluste

$$R_{\mathrm{F+R}} = 3\ \frac{U_{10}^2}{P_0}$$

und daraus

$$I_{\mathrm{F+R}} = \frac{U_{10}}{R_{\mathrm{F+R}}} \qquad\qquad I_\mu = \sqrt{I_{10}^2 - I_{\mathrm{F+R}}^2}$$

und schließlich

$$X_\mu = \frac{U_{10}}{I_\mu} \ .$$

Zur Trennung der Eisen- und Reibungsverluste nutzt man die quadratische Abhängigkeit der Eisenverluste von der Spannung aus. Misst man die Leerlaufverluste der Maschine bei verschiedenen Spannungen, ändern sich P_{Fe} und P_{Cu1} quadratisch mit der Spannung U_{10}, die Reibungsverluste P_{Rbg} bleiben jedoch wegen der annähernd gleichbleibenden Drehzahl konstant. Für $U_{10} = 0$ erhält man als Schnittpunkt von P_0 mit der Ordinate die Reibungsverluste. Da die Maschine bei zu kleinen Spannungen die Drehzahl nicht mehr halten kann, muss man den Schnittpunkt durch Extrapolation ermitteln. Wegen der damit verbundenen Ungenauigkeit trägt man die Verluste über dem Quadrat der Spannung auf, die Verlustparabeln werden zu Geraden und der Schnittpunkt lässt sich bequem ermitteln (Abb. 2.66).

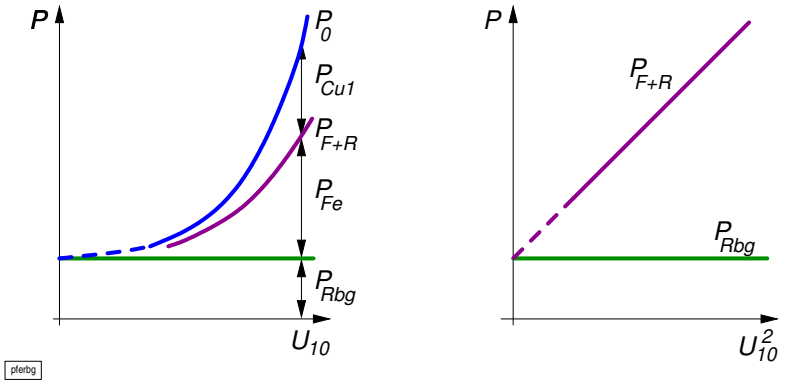


Abb. 2.66: Trennung der Eisen- und Reibungsverluste

Trägt man bei drehender Maschine den Leerlaufstrom I_{10} über die Spannung U_{10} auf erhält man im Prinzip den gedrehten Verlauf der Magnetisierungskennlinie $H = f(B)$.

Hinweis: Im Gegensatz zum Ersatzschaltbild nach Abb. 2.63 berücksichtigt der Widerstand $R_{\mathrm{F+R}}$ auch die Reibungsverluste. Die im Widerstand $R_2' \, (1 - s)/s$ umgesetzte Wirkleistung stellt dann die abgegebene mechanische Leistung *ohne* Reibungsverluste dar. Bringt man die ASM mit einer Hilfsmaschine auf Synchrondrehzahl (z. B. mit einem Synchronmotor) enthält der Leerlaufstrom *keinen* Anteil für die Reibungsverluste.

Kurzschlussversuch

Dazu wird der Läufer festgebremst ($s = 1$) und der Ständer mit Rücksicht auf die Wicklungserwärmung an eine verminderte Spannung mit Netzfrequenz gelegt. Gemessen werden die Kurzschlussspannung U_k, der Ständerstrom I_k sowie die aufgenommene Kuzschlussleistung P_k. Vernachlässigt man die Sättigung darf man die Ströme linear und die Leistung quadratisch auf die Nennspannung umrechnen:

$$I_{kN} = I_k \, \frac{U_N}{U_k} = I_{\mathrm{Anl}} \qquad \text{(Anlaufstrom)}$$

$$P_{kN} = P_k \, \left(\frac{U_N}{U_k} \right)^2 .$$

Aus dem einphasigen Ersatzschaltbild nach Abb. 2.67 ergeben sich wegen $s = 1$ folgende Beziehungen:

$$R = R_1 + \frac{R_2'}{1} = \frac{P_k/3}{I_{1k}^2} \qquad \text{und daraus} \qquad R_2' = R - R_1 \, .$$

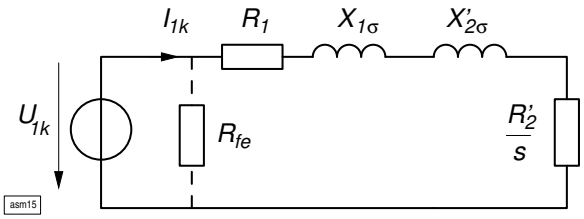


Abb. 2.67: Einphasiges Ersatzschaltbild beim Kurzschlussversuch

Unter der Annahme, dass $X_{1\sigma} \approx X'_{2\sigma}$ gilt, erhält man

$$X_{1\sigma} = X'_{2\sigma} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_{1k}}{I_{1k}}\right)^2 - R^2} \; .$$

Da im Stillstand das Reibungsmoment $M_{\mathrm{Rbg}} = 0$ ist, lässt sich mit Hilfe der Gleichungen (2.40) und (2.44) auch das *Anlaufmoment* abschätzen. Dabei entsprechen die Kurzschlussleistung P_{kN} der aufgenommenen Leistung P_1 bei Nennspannung, P_{Cu1N} den Kupferverlusten beim Anlaufstrom I_{Anl}:

$$M_{iN} = M_{\mathrm{AnlN}} = \frac{P_{kN} - P_{\mathrm{Cu1N}} - P_{\mathrm{Fe}}}{2\pi \cdot n_1} \; .$$

2.5.7 Betriebsverhalten

Aus dem Ersatzschaltbild (siehe Abschnitt 2.5.4) lassen sich analytisch die Betriebsgrößen der ASM in Abhängigkeit anderer Betriebsgrößen berechnen.

Zur Beurteilung des Anlaufvorganges benötigt man den Anlaufstrom I_A und das Moment in Abhängigkeit der Drehzahl (Abb. 2.68). Dabei unterscheidet man das Anlaufmoment M_A, das Kippmoment M_K und ein eventuelles Sattelmoment M_S. Um sicher die Nenndrehzahl zu erreichen, muss das Lastmoment immer kleiner sein als das Antriebsmoment, besondere Aufmerksamkeit ist dem Sattelmoment zu schenken. Andernfalls bleibt der Motor in der Anlaufphase »hängen«, der damit verbundene Motorstrom würde die Wicklung gefährden. Wegen Fertigungstoleranzen und Spannungsschwankungen muss ein Sicherheitsabstand eingeplant werden.

Typische Kenngrößen:

- $I_A \approx 3 \ldots 8 I_N$
- $M_A \approx 1.5 \ldots 3 M_N$ (Anzugsverhältnis)
- $M_K \approx 2 \ldots 3 M_N$ (Überlastungsverhältnis)

Das Überlastungsverhältnis muss nach DIN VDE mindestens 1.6 betragen.

Trägt man die Leistungen P_1 und P_2, den Netzstrom I_1, den Leistungsfaktor $\cos\varphi$ und den Wirkungsgrad η über das Drehmoment M auf, erhält man die Belastungskennlinien, die einen Überblick über das Verhalten der Maschine zwischen Leerlauf und Nennbetrieb geben (Abb. 2.69).

Man beachte, dass die in Abb. 2.69 dargestellten Kennlinien zum Betriebsbereich eines Asynchronmotors gehören. Dieser Bereich ist in Abb. 2.68 gekennzeichnet.

Typische Kenngrößen:

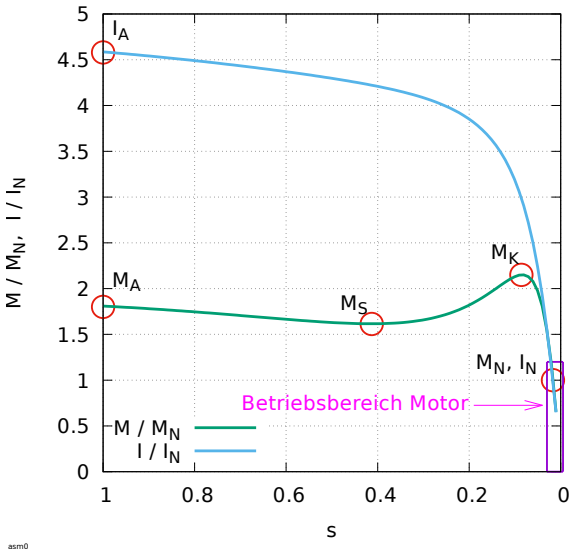


Abb. 2.68: Anlaufstrom und -moment einer ASM (Doppelkäfig)

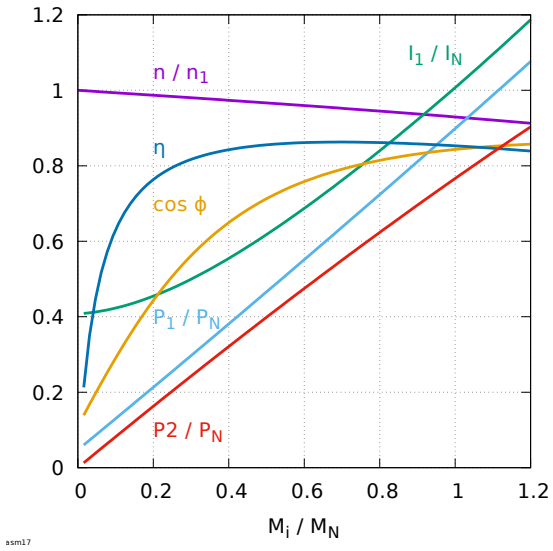


Abb. 2.69: Betriebskennlinien einer ASM (einfacher Käfigläufer)

- $I_0 \approx 0.5 \ldots 0.8 I_N$
- $\cos \varphi_0 \approx 0.2$
- $\cos \varphi_N \approx 0.8 \ldots 0.9$
- $s_N \approx 1 \ldots 6\,\%$

Man erkennt, dass der Wirkungsgrad bei nicht zu kleiner Teillast noch recht gut ist. Dagegen sinkt der Leistungsfaktor rascher ab. Im Leerlauf nimmt die Maschine einen relativ hohen Leerlaufstrom auf, der wegen der fehlenden Wirkleistung bzw. des schlechten Leistungsfaktors einen hohen Blindstromanteil enthält. Wegen des geringeren Wirkungsgrades und Leistungsfaktors bei Teillast ist es daher unwirtschaftlich, Antriebe mit überdimensionierten Asynchronmaschinen auszustatten.

Kompensation

Wegen des hohen Blindstrombedarfs, vor allem im Leerlauf, muss die Blindleistung eventuell kompensiert werden. Dazu werden parallel zur Maschine Kondensatoren zugeschaltet, entweder in Dreieck oder Stern.

Wenn $\cos \varphi_1$ den unkompensierten Leistungsfaktor, $\cos \varphi_2$ den kompensierten darstellen[19], ergibt sich die zu kompensierende Blindleistung aus

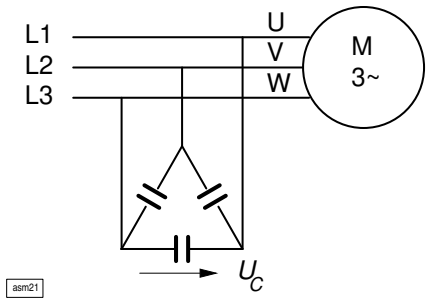
[19] am besten wäre $\cos \varphi_2 = 1$

$$\boxed{Q_C = P \cdot (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)} \tag{2.46}$$

Die Kapazität eines Kondensators errechnet sich aus

$$\boxed{C = \frac{Q_C}{3 \cdot \omega \cdot U_C^2}} \tag{2.47}$$

wobei für U_C die je nach Schaltung an einem Kondensator liegende Spannung einzusetzen ist.



Bei größeren Blindleistungen kann auch eine Synchronmaschine als *Phasenschieber* eingesetzt werden.

Drehmoment als Funktion der Spannung

Man kann zeigen (Kapitel 3.5.5), dass zwischen Klemmenspannung U und Drehmoment M bei konstanter Netzfrequenz folgender wichtige Zusammenhang besteht[20]:

$$\boxed{M \sim U^2 \sim \Phi_d^2}\,. \tag{2.48}$$

Bei Spannungsänderungen von z. B. $\pm 10\,\%$ schwankt das Moment von $81\,\%$ bis $121\,\%$. Vor allem bei möglichen Unterspannungen ist auf genügend Abstand zwischen Antriebs- und Lastmoment zu achten (*Unterspannungsauslösung*).

2.5.8 Anlassverfahren

Die bisherigen Herleitungen haben gezeigt, dass beim Anlassen einer ASM während der Hochlaufphase ein Mehrfaches des Nennstroms fließen kann. Dieser Anlaufstrom nimmt erst im Bereich des Kippschlupfs merklich ab und ist von der Belastung der Arbeitsmaschine unabhängig. Jedoch beeinflusst die Schwere des Anlaufs die Dauer des Hochlaufvorgangs. Der Anlaufstrom kann zu Spannungseinbrüchen im Netz führen, die Störungen an Verbrauchern verursachen können, die aus dem selben Netz gespeist werden. Die Elektrizitätsversorgungsunternehmen (EVU) schreiben daher in ihren technischen Anschlussbedingungen (TAB) maximale Anlaufströme vor.

Unabhängig von eventuellen Netzstörungen kann es andere Gründe für einen »schonenden« Anlauf geben, z. B. in der Textilindustrie (Fadenriss) oder bei Aufzügen.

Bei den Anlassverfahren sind zwei verschiedene Maßnahmen möglich:

- Erhöhung des Läuferwiderstands: bei Schleifringläufern durch Anlasswiderstände, beim Käfigläufer mittels Stromverdrängung;
- Verringerung der Ständerspannung: bei kleinen bis mittleren Leistungen mittels der Stern-Dreieck-Schaltung, sonst mittels Anlasstransformatoren, Vorwiderständen oder elektronischen Maßnahmen.

[20] Nach Gleichung (2.10), Seite 13 ist das Drehmoment proportional zum Läuferstrom I_2 und dem Luftspaltfeld Φ_d. Nach dem Induktionsgesetz ist die im Läufer induzierte Spannung U_2 und damit I_2 ebenfalls proportional zum Luftspaltfeld Φ_d.

Schleifringläufer mit Anlasswiderständen

Es lässt sich zeigen, dass die Höhe des Kippmomentes und die Lage des Kippmomentes, der sog. *Kippschlupf*, durch die Streureaktanz X_σ und dem Läuferwiderstand R_2 beeinflusst werden können. Grundsätzlich gilt (siehe Kapitel Abschätzung – Kloßsche Gleichung, Gleichungen (3.60) und (3.61)):

- Mit wachsendem R_2 wird der Kippschlupf größer, das Kippmoment bleibt unverändert.
- Mit wachsender Streureaktanz X_σ verringern sich Kippmoment und Kippschlupf.

Beim Schleifringläufer besteht eine einfache Möglichkeit, den Läuferwiderstand R_2 durch einen externen Anlasswiderstand zu vergrößern. Um kurze Anlaufzeiten zu erreichen, kann man den Motor mit dem Kippmoment anlaufen lassen und den Anlasswiderstand mit steigender Drehzahl verringern.

In der Praxis wählt man drei in Stern geschaltete Drahtwiderstände, deren Widerstandsstufen beim Hochlaufen *stufenweise* überbrückt werden. Bei Motoren großer Leistung verwendet man Flüssigkeitsanlasser[21], bei denen man Elektroden unterschiedlich tief in eine leitfähige Flüssigkeit taucht. Abb. 2.70 zeigt die ein- und mehrpolige Darstellung eines Schleifringläufers mit einem 5-stufigen Anlasswiderstand.

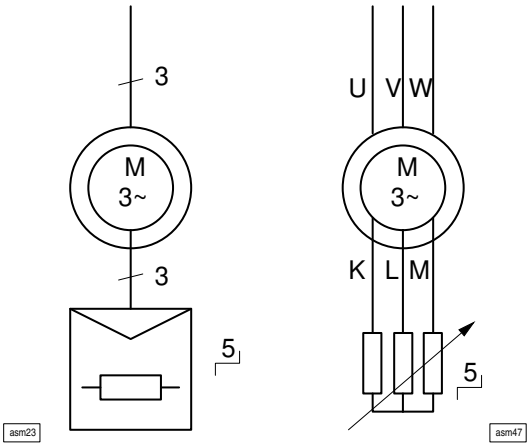


Abb. 2.70: Anlasswiderstand

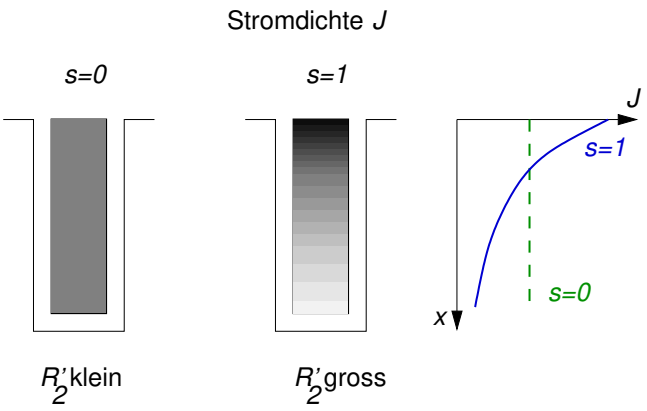


Abb. 2.71: Stromverdrängung

Anlasser sind im Bereich 1.7 bis 2000 kW genormt. Richtlinien dazu findet man in DIN VDE 0660 und DIN 46 062.

Stromverdrängungsläufer

Für den Kurzschlussläufer wird das gleiche Prinzip wie beim Schleifringläufer — Erhöhung des Läuferwiderstands während des Anlaufs — mit Hilfe der Stromverdrängung erreicht.

Tatsächlich besitzt der Leiterstab eine räumliche Ausdehnung und erfährt unter dem Einfluss eines sich ändernden Magnetfeldes eine *Stromverdrängung* , die sowohl seinen Wirk- als auch Streublindwiderstand verändert.

[21] veraltet

Der Leiterstrom bildet ein Nutenstreufeld, welches wegen der Nutenform inhomogen ist. Es wechselt seine Richtung mit der Läuferfrequenz $s \cdot f_1$. Dadurch werden im Leiterstab selbst Wirbelströme erzeugt, die sich mit dem Leiterstrom überlagern und zu einer ungleichmäßigen Stromverteilung über den Leiterquerschnitt führen (Abb. 2.71).

Durch die Formgebung der Läufernuten (Rundstab, Hochstab, Keilstab, Doppelkäfig, etc.) kann der Hersteller weitgehend das Anzugsmoment und den Anzugsstrom beeinflussen.

Anlasstransformator

Zum Herabsetzen der Motorspannung kann man Anlasstransformatoren in Sparschaltung benutzen (Abb. 2.72). Dazu wird zunächst der Sternpunktschalter S1 geschlossen bevor der Motor an Spannung gelegt wird. Während des Hochlaufvorganges öffnet man S1, der Spartransformator wirkt als Vorschaltdrossel. Anschließend wird der Motor über den Schalter S2 an die volle Netzspannung gelegt.

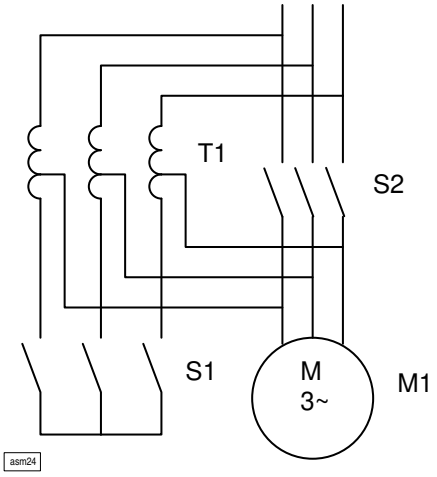


Abb. 2.72: Anlasstransformator

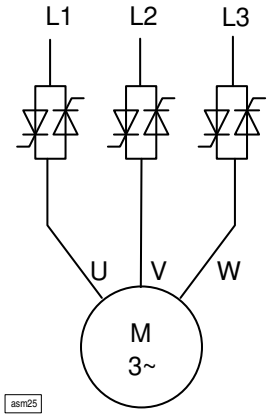


Abb. 2.73: Drehstromsteller

Durch das Übersetzungsverhältnis des Spartransformators T1 wird die Motorspannung und im gleichen Maße auch der Motorstrom reduziert. Der primärseitige Netzstrom wird durch T1 nochmals um den gleichen Faktor geringer. Das Anzugsmoment sinkt quadratisch mit der Motorspannung.

Diese Schaltung bewirkt also, dass Anzugsmoment und netzseitiger Anlaufstrom quadratisch mit der Motorspannung zurückgehen. Das Übersetzungsverhältnis bzw. die reduzierte Motorspannung kann den Erfordernissen angepasst werden. Die Schaltung wird bei großen Leistungen ab etwa 500 kW verwendet.

Statt Spartransformatorem mit festem Übersetzungsverhältnis lassen sich auch in Stufen oder stufenlose Regeltransformatoren verwenden.

Drehstromsteller

Die auch als elektronische Anlasser bezeichneten Drehstromsteller erfüllen ihren Zweck ähnlich wie beim Anlasstransformator, die Spannungsreduktion wird durch je einem antiparallelen Thyristorpaar oder bei kleinen Leistungen durch einen Triac in jeder Zuleitung erreicht

(Abb. 2.73). Mit diesen kontaktlos arbeitenden Drehstromstellern lasst sich die Motorspannung durch Veränderung des Steuerwinkels stufenlos und schnell einstellen. Dabei kann der Hochlaufvorgang soweit automatisch ablaufen, dass die Motorspannung innerhalb einer bestimmten Zeit ihren Nennwert erreicht. Mit einer unterlagerten Stromregelung regelt man den Spannungsanstieg so, dass ein vorgegebener Anlaufstrom nicht überschritten wird.

Man beachte, dass die Kurvenform der Motorspannung während des Anlaufs nicht mehr sinusförmig ist sondern Oberschwingungen enthält.

Stern-Dreieck-Anlauf

Eine besonders elegante und zudem kostengünstige Möglichkeit besteht darin, den Motor am selben Netz im Stern anlaufen zu lassen und anschließend für den Nennbetrieb auf Dreieck umzuschalten. Die Phasenwicklungen müssen für die verkettete Spannung ausgelegt sein. In der Sternschaltung beträgt die Phasenspannung nur das $1/\sqrt{3}$fache der Nennspannung, das Anlaufmoment geht deshalb auf 1/3 des Anlaufmomentes der Dreieckschaltung zurück, der netzseitige Anlaufstrom sinkt ebenfalls auf 1/3 seines Wertes der Dreieckschaltung (Abb. 2.74).

Wegen des auf ein Drittel reduzierten Anlaufmomentes eignet sich dieses Verfahren nur für leichte Anlaufbedingungen. Sobald das Lastmoment M_L beim Hochlaufvorgang in der Sternschaltung größer wird als das Motormoment M_Y, bleibt der Motor »hängen«. Wenn diese Drehzahl zu niedrig ist und man schaltet auf Dreieck (oder man schaltet zu früh auf Dreieck) tritt hier noch ein hoher Anlaufstrom I_D auf, den man eigentlich vermeiden wollte.

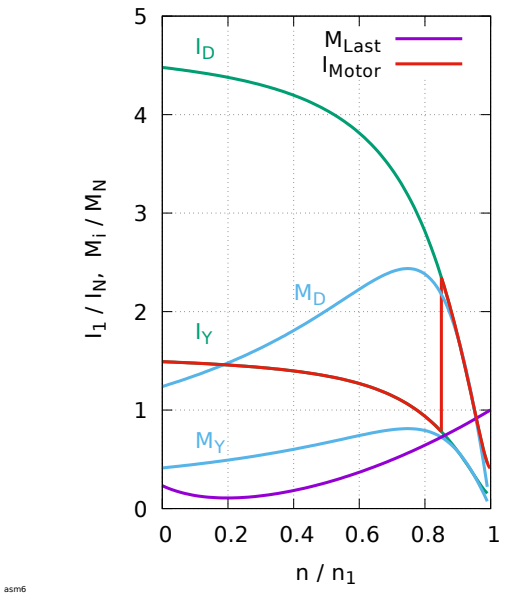


Abb. 2.74: Stern-Dreieck

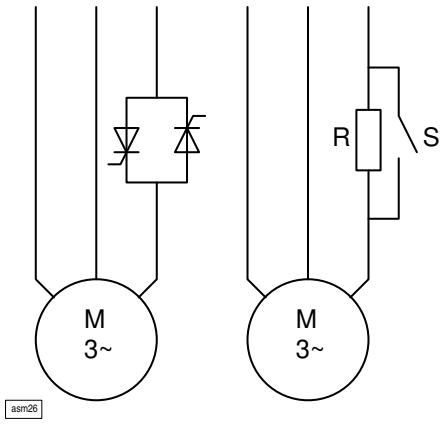


Abb. 2.75: Kusa

Für den Stern-Dreieck-Anlauf müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- die Wicklungsanfänge und -enden müssen zugänglich sein;
- der Nennbetrieb muss bei der Dreieckschaltung sein;
- das Lastmoment muss passen.

Kurzschlussläufer-Sanftanlauf

Das auch als *Kusa-Schaltung* bekannte Verfahren dient in erster Linie dazu, das Anlaufmoment für einen *sanften* Hochlaufvorgang herabzusetzen. Dazu schaltet man einen Widerstand oder eine Drosselspule in *eine* Zuleitung (Abb. 2.75). Durch diese Maßnahme verringert sich der Strom in der Widerstandsphase entsprechend des Widerstandswertes. Die Anlaufströme in den beiden anderen Zuleitungen werden dabei jedoch größer. Da die Ständerströme jetzt unsymmetrisch sind, geht das Drehfeld von seiner Kreisform in eine Ellipse über, das Drehmoment nimmt ab. Für den Grenzfall $R \to \infty$ (Ausfall einer Phase) liegt ein reines Wechselfeld vor, der Motor kann kein Drehmoment entwickeln.

In der Praxis wird der Widerstand durch ein antiparalelles Thyristorpaar oder Triac ersetzt, durch Verstellung des Zündwinkels kann man den Strom zwischen Null und Nennstrom ändern.

Weitere Anlassverfahren

Die folgenden Anlassverfahren können ebenfalls verwendet werden:

Vorschaltwiderstände/-drosseln: in Analogie zum Anlasstrafo;

Frequenzanlauf: mittels Frequenzumrichter (siehe Abschnitt 2.5.9) fährt man den Antrieb mit steigender Frequenz an;

Anwurfmotor: mit einer Hilfsmaschine bringt man die ASM in die Nähe der Betriebsdrehzahl;

Anlaufkupplung: der Motor läuft im Leerlauf hoch und wird dann mittels Kupplung mit der Last verbunden.

2.5.9 Drehzahlsteuerung

Kombiniert man die Gleichungen (2.33) und (2.34), erkennt man die Einflussgrößen, mit denen man die Drehzahl n beeinflussen kann:

$$n = n_1\,(1-s) = \frac{f_1}{p}\,(1-s)\,. \tag{2.49}$$

Je nach Einflussgröße bestehen folgende Verfahren:

- Schlupfänderung
  - Widerstandsänderung im Läuferkreis (nur Schleifringläufer)
  - Veränderung der Ständerspannung
  - Läuferrückspeisung
- Änderung der Polpaarzahl
- Änderung der Netzfrequenz.

In vielen Fällen basieren die Prinzipien der Drehzahlverstellung auf Methoden, die bei den Anlassverfahren beschrieben wurden.

Die *Drehrichtung* lässt sich durch Vertauschen zweier beliebiger Phasen ändern (*Wendeschützschaltung*).

Schlupfwiderstände

Das Einschalten von Läufervorwiderständen (*Schlupfwiderstände*) entspricht der Wirkungsweise von Anlasswiderständen (behandelt auf Seite 73 ff). Bei Verwendung von Vorwiderständen ist darauf zu achten, dass sie für eine größere Einschaltdauer ausgelegt werden müssen als Anlasswiderstände.

Änderung der Klemmenspannung

Die quadratische Abhängigkeit zwischen dem Moment und der Klemmenspannung (siehe Seite 72) lässt sich eingeschränkt zur Drehzahlsteuerung ausnutzen.

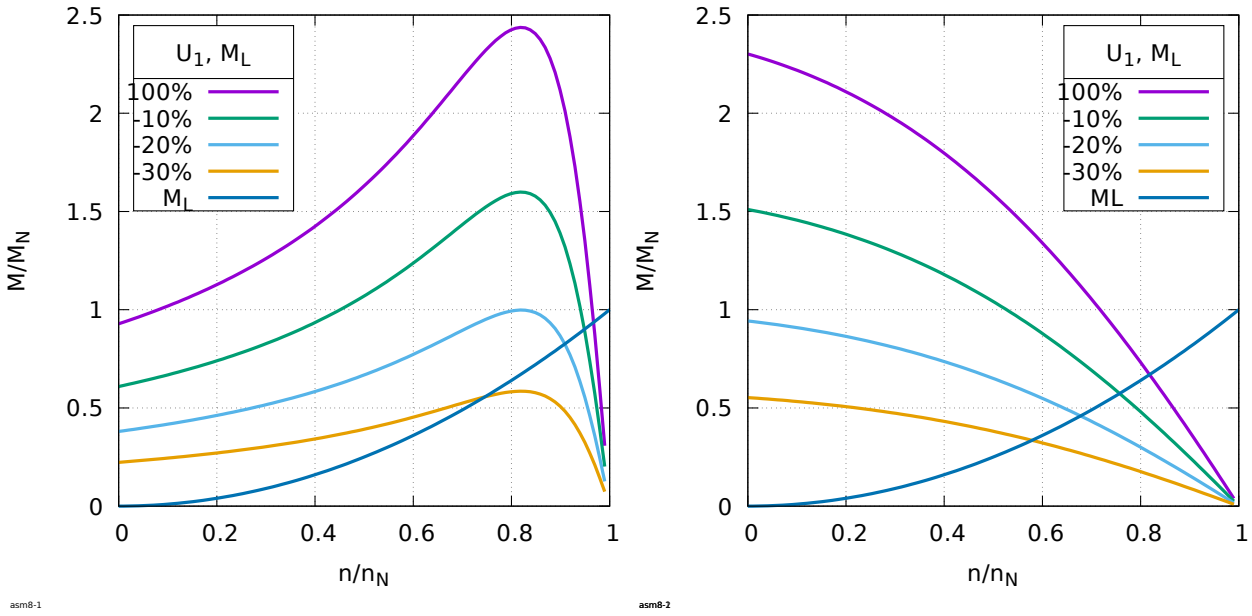


Abb. 2.76: Momentenkennlinien bei reduzierter Klemmenspannung

In Abb. 2.76 sind die Momentenkennlinien für unterschiedliche Läuferausführungen bei verschiedenen Spannungsabsenkungen aufgetragen. Bei beiden Läuferarten wurde das gleiche Lastmoment $M_L \sim n^2$ eingetragen. Man erkennt, dass bei normalem Läufer die Schnittpunkte mit der Lastkennlinie sehr dicht zusammen liegen, durch die Spannungsabsenkung würden sich nur geringe Drehzahländerungen ergeben. Durch Erhöhung des Läuferwiderstandes R_2 kann man das Kippmoment in Richtung Anlaufpunkt verschieben. *Widerstandsläufer*[22] sind Käfigläufer, die durch besondere konstruktive Maßnahmen (Material, schmale Kurzschlussringe) einen höheren spezifischen Widerstand besitzen und so bemessen sind, dass das Kippmoment etwa im Stillstand auftritt. Durch die flacheren Momentenkennlinien ergeben sich jetzt Schnittpunkte, die weiter auseinander liegen.

Der Anwendungsbereich dieser Drehzahlsteuerung ist begrenzt auf kleine Antriebe, bei denen das Lastmoment proportional n^2 oder n^3 ist, z. B. Lüfter, Pumpen.

[22] oder auch *Schlupfmotoren* genannt

Läuferrückspeisung

Durch Läufervorwiderstände lässt sich die Drehzahl von Schleifringläufern beeinflussen. Die dabei auftretende Verlustleistung berechnet sich nach den Gleichungen (2.38) bzw. (2.43), Seite 67. Statt die Läuferverluste in Wärme umzusetzen, kann man sie auch dem Netz wieder zurückführen. Dabei muss man beachten, dass Netzfrequenz und Läuferfrequenz verschieden sind.

Früher verwendete man statt der Vorwiderstände einen Motor-Generator-Satz, der die schlupffrequente Läuferleistung in eine Gleichspannung umformte. Mit der wurde ein Gleichstrom-Asynchronmaschinen-Satz angetrieben, bei der die Asynchronmaschine übersynchron die Energie wieder zurück in das Netz speiste. Dieser Aufwand lohnte sich jedoch nur für größere Antriebsleistungen.

Mit der heutigen Leistungselektronik läst sich dieses Verfahren wesentlich vereinfachen und effizienter realisieren. (Abb. 2.77). Mit einem ungesteuerten Gleichrichter GR wird die drehzahlabhängige Läuferspannung (U_2, f_2) gleichgerichtet, geglättet und einem netzgeführten Wechselrichter WR zugeführt, der zur Spannungsanpassung über einen Transformator T mit dem speisenden Netz (U_1, f_1) verbunden ist. Diese Art der Rückspeisung nennt man *Untersynchrone Stromrichterkaskade*.

Polumschaltung

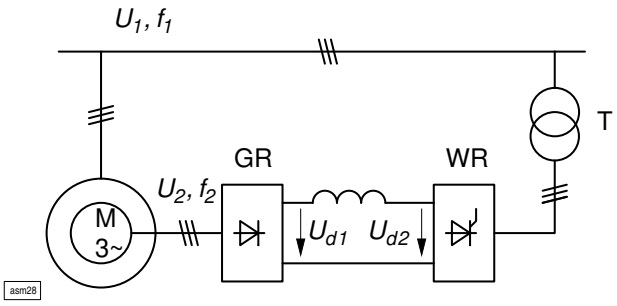


Abb. 2.77: Läuferrückspeisung mittels untersynchroner Stromrichterkaskade

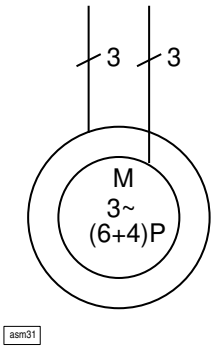


Abb. 2.78: Polumschaltbare ASM

Durch Änderung der Polpaarzahl p kann man die Drehfelddrehzahl n_1 grobstufig ändern (Abb. 2.78). Dies geschieht entweder dadurch, dass man die Maschine mit zwei voneinander unabhängigen Drehstromwicklungen versieht oder durch Umschaltung der Spulengruppen (*Dahlanderschaltung*). Eine Kombination beider Verfahren ist ebenso möglich. Für beide Verfahren kommen nur Käfigläufer in Frage, da Schleifringläufer eine feste Polpaarzahl haben.

Frequenzsteuerung

Aus der Grundgleichung (2.49) folgt u. a. dass die Drehzahl stufenlos über die Frequenz f_1 der Ständerspannung U_1 geändert werden kann. Dazu benötigt man ein Versorgungsnetz mit variabler Frequenz. Früher verwendete man dazu einen Umformersatz bestehend aus z. B. einem Gleichstrommotor und einem Synchrongenerator, der mit der entsprechenden Drehzahl betrieben wurde. Mittels Leistungselektronik ist es relativ einfach, »synthetisch« ein Drehstromnetz

mit variabler Frequenz und Spannung zu erzeugen. Man bezeichnet diese Geräte im allg. als *Frequenzumrichter*.

Idealerweise soll die ASM bei allen Drehzahlen ihr Nennmoment aufbringen können. Dazu muss, wie bereits mit Gleichung (2.48) gezeigt, der Drehfeldfluss Φ_d konstant bleiben. Man erreicht dies, indem man proportional mit der Frequenz die Klemmenspannung U_1 mitverändert (*U/f-Steuerung*).

Prinzipiell können f_1 und U_1 über ihre Nennwerte f_{1N} und U_{1N} erhöht werden. Damit wäre jedoch die abgegebene Leistung größer als die Nennleistung ($P_N = 2\pi \cdot n_N \cdot M_N, M_N = \text{const}$). Deshalb erfolgt die Spannungsanpassung nur bis zum Nennpunkt bei f_N, für höhere Drehzahlen bleibt $U_1 = U_{1N}$, der Hauptfluss nimmt nach $\Phi_d \sim U_{1N}/f_1$ ab, die Maschine arbeitet im sog. *Feldschwächbetrieb* (analog zur Gleichstrommaschine). Bei sehr kleinen Frequenzen/Drehzahlen (Anlauf) überwiegt der ohmsche Anteil der Wicklung gegenüber dem induktiven Anteil, die Spannung U_1 muss deshalb bei kleinen Frequenzen angehoben werden, um den Nennfluss Φ_N aufrecht zu erhalten (*IR-Anpassung*). Abb. 2.79 zeigt das Kennlinienfeld einer U/f-Steuerung.

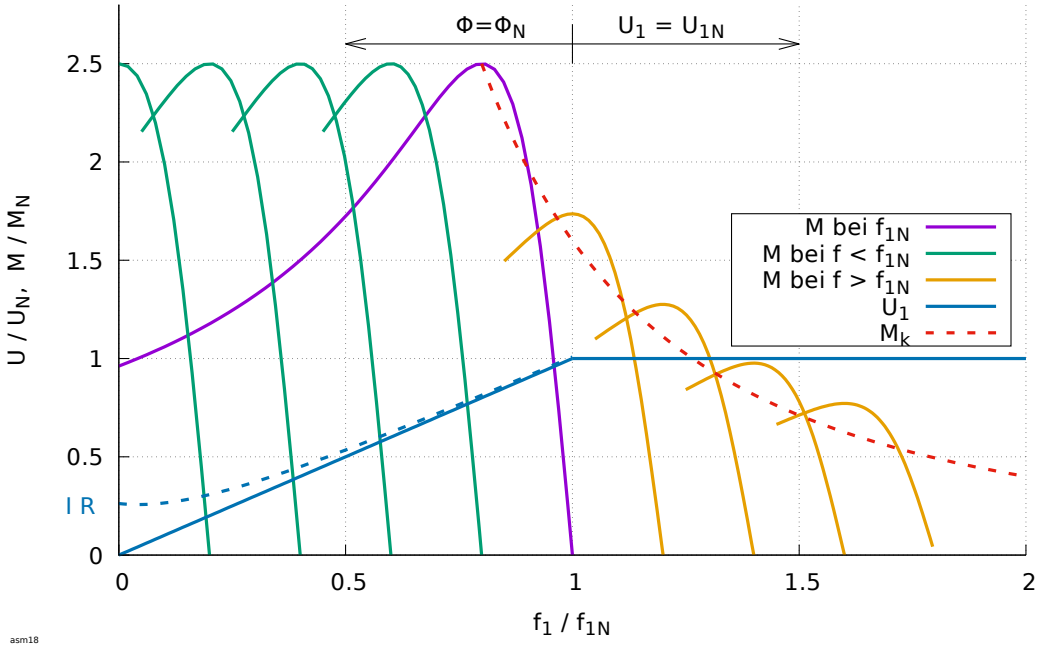


Abb. 2.79: U/f-Steuerung (normierte Darstellung)

☞ Der Eisenverlustwiderstand R_{Fe} im ESB ist spannungs- und frequenzabhängig.

2.5.10 Bremsen

Zum Abbremsen von Antrieben verwendet man mechanische und/oder elektrische Verfahren. Bei den elektrischen Bremsverfahren unterscheidet man zwischen Verlustbremsung (Gleichstrom, Gegenstrom) und Nutzbremsung mit Energierücklieferung (Generatorbetrieb). *Haltebremsen* ist nur mechanisch möglich. Elektrische Bremsen sind wartungs- und verschleißfrei.

Gleichstrombremsen

Legt man an die Ständerwicklung einer ASM eine Gleichspannung an, entsteht ein räumlich feststehendes, konstantes Luftspaltfeld (Abb. 2.80). Abhängig von der Drehzahl werden in den Läuferstäben (oder beim Schleifringläufer in der geschlossenen Läuferwicklung) Ströme induziert, die ihrer Ursache entegenwirken, also ein Bremsmoment erzeugen. Für die Höhe des Bremsmomentes ist die Relativbewegung zwischen Feld und Läufer maßgeblich, wegen des feststehenden Ständerfeldes entspricht der Schlupfdrehzahl die Betriebsdrehzahl. Rechnerisch bedeutet dies, dass bei der Berechnung des Ersatzschaltbildes der Schlupf s durch den Ausdruck $(1 - s)$ ersetzt werden muss.

Gegenstrombremsung

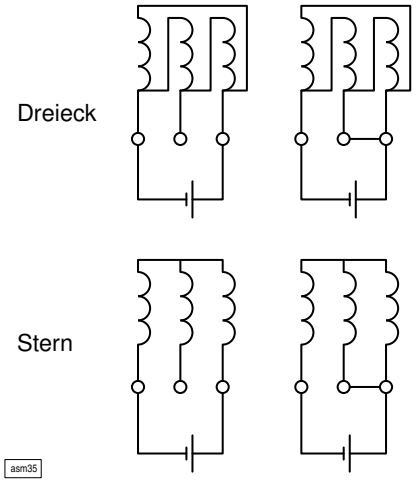


Abb. 2.80: Gleichstrombremsung

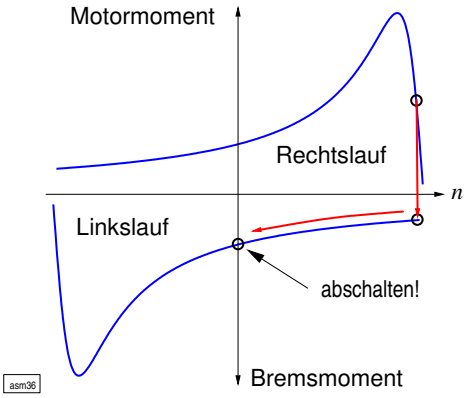


Abb. 2.81: Gegenstrombremsung

Vertauscht man im Motorbetrieb zwei Zuleitungen, ändert sich der Drehsinn der Maschine, sie arbeitet im Gegenlauf und entwickelt ein Bremsmoment (siehe auch Abb. 2.61). Zum Umschaltzeitpunkt beträgt der Schlupf etwa $s \approx 2$. Damit der Motor nicht über den Stillstand hinaus wieder in die entgegengesetzte Richtung anläuft, muss im Augenblick des Stillstandes die Netzspannung z. B. durch einen mit der Motorwelle gekuppelten Brems- oder Drehzahlwächter abgeschaltet werden (Abb. 2.81).

Der Motor nimmt im Gegenlauf Ströme auf, die über dem Anlaufstrom liegen. Durch Herabsetzten der Klemmenspannung oder durch Zuschalten von Vorwiderständen beim Schleifringläufer lässt sich der Ständerstrom begrenzen.

Generatorisches Bremsen

Bei übersynchronen Drehzahlen ($s < 0$) wechselt das Drehmoment sein Vorzeichen, die ASM muss von der Arbeitsmaschine angetrieben werden, sie wird zum Generator. Dabei speist sie Energie in das Netz zurück. Ist das Bremsmoment gleich dem Nennmoment, stellt sich eine Drehzahl ein, die um den Nennschlupf s_N über der Drehfelddrehzahl liegt. Bei Hebezeuge polt man zwei Motorzuleitungen um, die sich einstellende Senkgeschwindigkeit (*Senkbremsung*) ist etwa um $2 \cdot s \cdot n_1$ größer als im Hubbetrieb (bei gleicher Last).

Stillstandsbremsung läßt sich nur durch Änderung der Drehfeldfrequenz erzielen (Frequenzumrichter). Je nach Umrichtertyp kann die Bremsenergie in das Netz zurückgespeist werden.

Mechanisches Bremsen

Mechanische Bremsen können am Motor angebaute, elektrisch betätigte Magnetbremsen sein. Es gibt sie als Kegel-, Backen- oder Lamellenbremsen. Aus Sicherheitsgründen wird die Bremskraft durch eine Feder aufgebracht. Gelöst (*gelüftet*) werden sie elektrisch.

Bremsmotoren besitzen einen konischen Läufer und dazu passend eine konische Ständerbohrung. Der Läufer trägt an einem Ende eine Bremsscheibe und ist axial verschiebbar. Im ausgeschalteten Zustand drückt eine Feder die Bremsscheibe gegen die Bremsbacken, der Läufer ist blockiert. Beim Einschalten entsteht eine magnetische, axiale Kraft, die den Läufer in die Ständerbohrung zieht und damit die Bremse löst (Abb. 2.82).

Versuch 2.5.9 *Betriebsverhalten eines Schleifringläufers (Anlauf, Leerlauf, Belastung, Generatorbetrieb, Gegenstrombremsung)*

2.5.11 Linearmotor

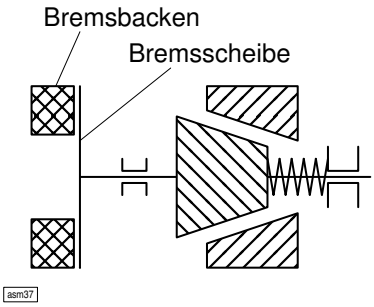


Abb. 2.82: Bremsmotor

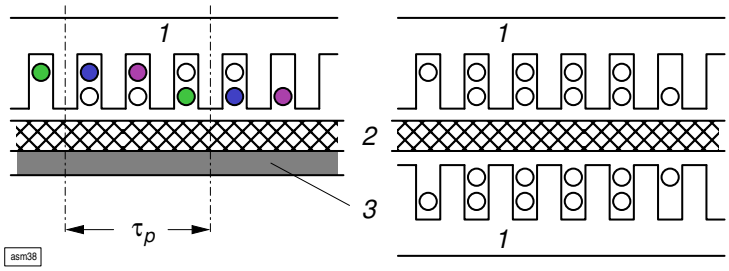


Abb. 2.83: Linearmotor

Liegt die Drehstromwicklung in einer Ebene (siehe Abschnitt Linearfeld (Wanderfeld)), spricht man von einem *Linearmotor*. Statt eines Drehfeldes bildet dieser Motortyp ein Wanderfeld aus. Man kann ihn sich dadurch entstanden denken, indem man die Ständerwicklung (1) aufschneidet und in einer Ebene abwickelt (*Induktor, Induktorkamm*). Als Läufer (2) kommt eine massive Schiene aus gut leitendem Material (Aluminium, Kupfer) in Frage. In der einseitigen Ausführung erhält die Schiene einen magnetischen Rückschluss aus Eisen (3). Bei der doppelseitigen Bauform, die aus zwei identischen Induktorkämmen (1) besteht, kann dieser Rückschluss entfallen. Gleichzeitig kompensieren sich die »radialen« Anziehungskräfte.

Versuch 2.5.10 *Vorführung eines Linearmotors*

2.6 Synchronmaschine

2.6.1 Aufbau

Die prinzipielle Funktionsweise einer Synchronmaschine (SM) wurde bereits im Abschnitt Drehfelder beschrieben.

Als Generator ist die Synchronmaschine der Hauptstromerzeuger unserer Energieversorgung mit Einheitsleistungen bis 1700 MVA, als Motor findet sie vom Uhrenantrieb bis zu Schwerantrieben mit Leistungen bis zu 30 MW Anwendung. Zusätzlich kann sie zur Blindleistungskompensation, meistens in Verbindung als Synchronmotor, eingesetzt werden (rotierender Phasenschieber).

Aus der Funktionsweise ergibt sich der Zusammenhang zwischen Frequenz und Drehzahl:

$$\boxed{n = n_0 = n_N = n_1 = \frac{f_1}{p}} \,. \tag{2.50}$$

Die SM rotiert mit einer Drehzahl, die nur von der Frequenz der Klemmenspannung und der Polpaarzahl abhängt. Für den Motorbetrieb bedeutet dies eine starke Einschränkung der Anwendungsgebiete bzw. besondere Maßnahmen für den Anlauf und die Drehzahlsteuerung.

Die Maschine besitzt eine Gleichstromwicklung, die das Erregerfeld erzeugt, und eine Drehstromwicklung, die mit einem Dreiphasennetz verbunden ist. Für die Wirkungsweise der SM ist es egal, welche der Wicklungen im Stator und im Rotor untergebracht ist. Je nach Anordnung der Erregerwicklung spricht man von einer *Innen-* oder *Außenpolmaschine* (Abb. 2.14, 2.15). Dabei spielt die Übertragung der Leistung vom bzw. zum Läufer (Auslegung der Schleifringe) die entscheidende Rolle. Aus diesem Grund kommen Außenpolmaschine nur für kleine Leistungen bis etwa 50 kVA in Frage (Abb. 2.84), z. B. für Notstromaggregate. Ausnahme bilden Erregermaschinen für die Synchronmaschine selbst.

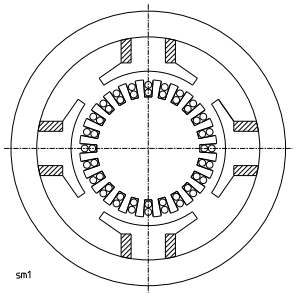


Abb. 2.84: Außenpolmaschine, $p = 2$

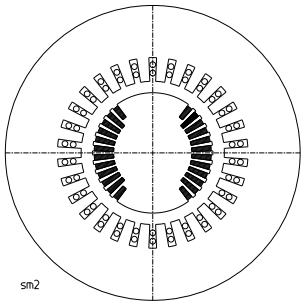


Abb. 2.85: Turboläufer, $p = 1$

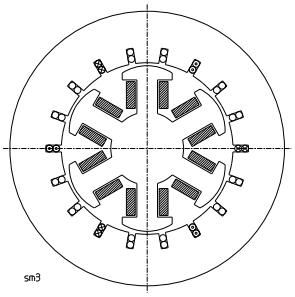


Abb. 2.86: Schenkelpolmaschine, $p = 3$

Bei den Innenpolmaschinen entscheidet die Polpaarzahl über zwei unterschiedliche Ausführungen: für 2- und 4-polige Maschinen führt man den Läufer als *Vollpol-* oder *Turboläufer* (Abb. 2.85), darüber hinaus als *Schenkelpol* (Abb. 2.86) aus. Daraus ergeben sich für Turbogeneratoren die typischen Drehzahlen 1500 und 3000 min^{-1} bei maximalen Einheitsleistungen von etwa 1700 MVA. Dabei erreicht man Läuferdurchmesser von maximal 1.20 m bei 2-poligen und 1.80 m bei 4-poligen Maschinen bei aktiven Läuferlängen von bis zu 10 m (2-polig) bzw. 8 m (4-polig).

Für Schenkelpolgeneratoren reichen die Drehzahlen herab bis auf etwa $60\,\mathrm{min}^{-1}$ bei Leistungen bis etwa 800 MVA und Läuferdurchmesser bis 16 m.

Das Erregerfeld kann auch durch Dauermagnete aufgebracht werden, findet aber nur bei Motoren bis ungefähr 10 kW Anwendung[23]. Im allgemeinen entfallen dann alle Einflußmöglichkeiten auf das Erregerfeld und beschränken die Maschine in der Steuerung ihres Betriebsverhaltens.

Zur Dämpfung von transienten Vorgängen (Laststöße, Stoßkurzschlüsse, Pendelungen) besitzen die Läufer von SM einen *Dämpferkäfig* oder eine *Dämpferwicklung*. Gleichzeitig verleiht der Dämpferkäfig der Maschine eine Eigenschaft der Asynchronmaschine, nämlich der *selbständige Anlauf* als Synchronmotor.

Eine Sonderform der Synchronmaschine stellt die *Klauenpolmaschine* dar, die man heute in jedem Personenkraftwagen als Drehstromlichtmaschine einsetzt und die mit typisch 12 Polen ausgestattet ist.

2.6.2 Betriebsverhalten

Die nachfolgenden Betrachtungen gelten für einen Vollpol-Synchrongenerator. Auf die Unterschiede zur Schenkelpolmaschine wird in einem gesonderten Abschnitt (siehe Kapitel Schenkelpolmaschine) eingegangen.

Induzierte Spannung

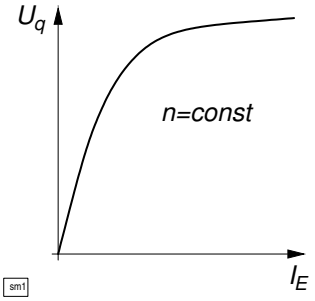
Den gleichstromerregten Läufer bezeichnet man als *Polrad*. Das Polrad induziert in einer Strangwicklung die *ideelle Polradspannung* U_p, die der im Leerlauf induzierten Quellenspannung entspricht.

Für die folgenden Betrachtungen wird angenommen, dass nur ein sinusförmiges Grundfeld vorhanden ist und somit auch die Spannung sinusförmig ist[24].

Die *Frequenz der Spannung* ist nach Gleichung (2.50) proportional zur Drehzahl n.

Die *Höhe der Spannung* hängt von zwei Faktoren ab:

- nach dem Induktionsgesetz ist die Spannung proportional zur zeitlichen Flussänderung und damit proportional zur Drehzahl n;
- der Fluss ist eine nichtlineare Funktion des Erregerstromes I_E und von der Magnetisierungskennlinie abhängig.



Für die induzierte Spannung U_q gilt folglich

$$\boxed{U_q \sim \Omega, \qquad U_q \nsim I_E} \qquad \text{mit} \quad \Omega = 2\pi \cdot n \,.$$

[23] Stand 2005

[24] Im Kapitel Oberfelder werden Verfahren beschrieben, mit denen man den zeitlichen Verlauf der Spannung nahezu sinusförmig machen kann.

Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm

Das Ersatzschaltbild der Synchronmaschine enthält im *stationären Betrieb* nur Elemente, die die Ständerseite der Maschine beschreiben. Im Gegensatz zur Asynchronmaschine fehlt die Relativbewegung (Schlupf) zwischen Läufer- und Ständerfeld, der stationäre Einfluss des Erregerfeldes wird durch die Polradspannung U_p ausgedrückt (Abb. 2.87).

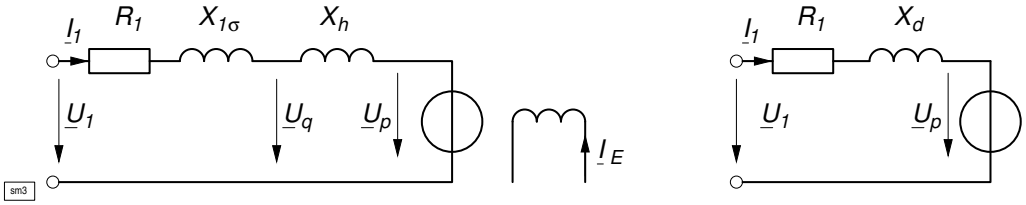


Abb. 2.87: Ersatzschaltbild der Vollpolmaschine

Den Streufluss (Nut-, Wickelkopfstreuung) berücksichtigt man mit der Streureaktanz $X_{1\sigma}$. Der Widerstand R_1 erfasst den Wirkwiderstand der Ständerwicklung, der vor allem bei großen Maschinen sehr viel kleiner als die Streureaktanz ist und oft vernachlässigt werden kann. Die bei Belastung auftretende Ankerrückwirkung schwächt die Wirkung des Erregerfeldes, den dadurch auftretenden Spannungsabfall zwischen der ideellen Polradspannung U_p und der induzierten Spannung U_q verursacht die Hauptreaktanz X_h. Streu- und Hauptreaktanz fas st man zur Synchronreaktanz X_d zusammen.

Aus dem Ersatzschaltbild lässt sich das Zeigerdiagramm der Synchronmaschine herleiten. Es wird das Verbraucher-Zählpfeilsystem zugrunde gelegt. Damit lassen sich an einem Diagramm die unterschiedlichen Belastungsfälle (Motor, Generator, kapazitive-, induktive Blindleistung) erklären. Die Spannung dient als Bezugspfeil und bildet mit dem Laststrom I_1 den Winkel φ (Abb. 2.88).

Klemmenspannung U_1 und Polradspannung U_p bilden den sog. *Polradwinkel* ϑ. Dieser Winkel ist von der Wirklast abhängig.

Versuch 2.6.1 *Eine Synchronmaschine wird mit einer fremderregten Gleichstrommaschine gekuppelt. Der Ankerkreis der GM muss entweder aus einer Batterie oder einem rückspeisefähigen Netzgerät gespeist werden. Die SM wird mit der GM auf Synchrondrehzahl hochgefahren und mit dem Drehstromnetz synchronisiert (siehe Versuch 2.6.3). Der Maschinensatz hat jetzt eine konstante von der Netzfrequenz vorgegebene Drehzahl.*

Durch Änderung des Erregerstroms der GM lässt sich die SM entweder als Motor mit der GM belasten (Erregerstrom erhöhen) oder als Generator von der GM antreiben (Erregerstrom verringern). Mit einem mit dem Netz synchronisierten Stroboskop lässt sich der Polradwinkel z. B. an der Kupplung beobachten.

Aus dem Zeigerdiagramm bzw. dem Ersatzschaltbild lässt sich die Spannungsgleichung der Synchronmaschine für den stationären Betrieb angeben:

$$\boxed{\underline{U}_1 = \underline{U}_p + \underline{I}_1(R_1 + \mathrm{j}\,(X_h + X_{1\sigma})) = \underline{U}_p + \underline{I}_1(R_1 + \mathrm{j}\,X_d)}\,. \tag{2.51}$$

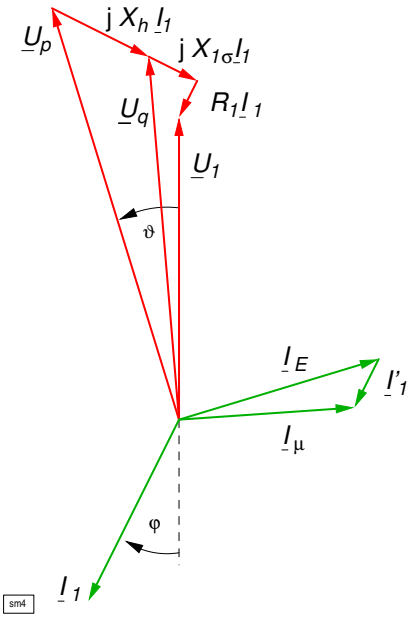


Abb. 2.88: Zeigerdiagramm

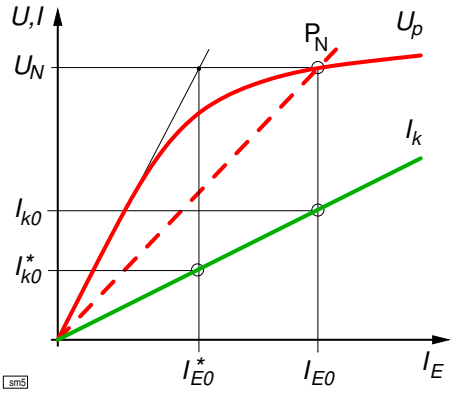


Abb. 2.89: Leerlauf- und Kurzschlusskennlinie

Synchronreaktanz

Zur Bestimmung der Synchronreaktanz führt man einen Leerlauf- und Kurzschlussversuch bei konstanter Nenndrehzahl in Abhängigkeit vom Erregerstrom I_E durch (Abb. 2.89).

Bei kleinen Erregerströmen steigt die Leerlaufspannung U_q linear mit dem Erregerstrom an, mit zunehmendem Strom macht sich die Sättigung bemerkbar, weicht die Leerlaufkennlinie von der sog. *Luftspaltgeraden* ab. Zur Erzeugung der Nennspannung (Betriebspunkt P_N) wird der Leerlauferregerstrom I_{E0} benötigt.

Beim dreipoligen Kurzschlussversuch wird der Ständerstrom I_k in Abhängigkeit vom Erregerstrom gemessen. Da die Polradspannung bei ungesättigter Maschine dem Erregerstrom direkt proportional ist (Luftspaltgerade), ist die Kurzschlusskennlinie eine Gerade. Bei I_{E0} beträgt $I_k = I_{k0}$.

Die Synchronreaktanz bestimmt sich aus dem Verhältnis U_p/I_k. Wie man den Kennlinien entnehmen kann, ist dieser Wert nur konstant für kleine Erregerströme bzw. wenn man einen linearen Zusammenhang zwischen Erregerstrom und Leerlaufspannung annimmt (Luftspaltgerade). Aus dem Quotienten U_N/I^*_{k0} erhält man den Wert der *ungesättigten Synchronreaktanz*.

Mit zunehmender Sättigung verändert sich die Synchronreaktanz, sie wird kleiner. Prinzipiell müs ste man zu jedem Erregerstrom einen anderen Wert für X_d einsetzen. Als Kompromiss ersetzt man die tatsächliche Leerlaufkennlinie durch eine Gerade durch den Betriebspunkt und berücksichtigt dadurch die Sättigung. Für die *gesättigte Synchronreaktanz* ergibt sich damit

$$\boxed{X_d = \frac{U_N}{I_{k0}}}\,. \tag{2.52}$$

Durch diese Linearisierung erhält man eine Proportionalität zwischen der induzierten Spannung und dem Erregerstrom.

Versuch 2.6.2 *Leerlauf- und Kurzschlussversuch an einer Synchronmaschine, Antrieb durch eine drehzahlregelbare Maschine (GM, ASM).*

Die Auswertung bestätigt das Diagramm in Abb. 2.89. Der Leerlaufversuch zeigt, dass bei konstanter Drehzahl der Verlauf der Leerlaufspannung $U_p(I_E)$ nicht-linear ist und mit steigendem Erregerstrom I_E die Magnetisierungskennlinie wiedergibt. Bei konstantem Erregerstrom ist die Spannung proportional zur Drehzahl. Der Kurzschlussversuch offenbart einen interessanten Sachverhalt: der Kurzschlussstrom ist unabhängig von der Drehzahl und proportional zum Erregerstrom der SM. Bei kleinen Drehzahlen oder beim Anlauf der kurzgeschlossenen SM entsteht ein großes Drehmoment.

Der Kurzschlussstrom errechnet sich entsprechend dem rechten ESB in Abb. 2.86 aus

$$I_k = \frac{\omega \cdot U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_d)^2}} \qquad \text{mit} \quad \omega L_d = X_d \,, \tag{2.53}$$

wobei $\omega \cdot U$ die Proportionalität von U_p zur Drehzahl ausdrückt. Bei hohen Drehzahlen dominiert in der Synchronrimpedanz $R_1 + \mathrm{j}\, X_d$ der induktive Anteil und R_1 ist vernachlässigbar. In Gleichung (2.53) hebt sich ω auf, I_K bleibt konstant und ist induktiv, das Drehmoment ist gering. Bei kleinen Drehzahlen fällt der ohmsche Anteil R_1 mehr ins Gewicht, der Wirkanteil in I_k wird größer, das Moment nimmt zu.

> Dieses Verhalten hat zur Entwicklung der *Drehstromlichtmaschine* geführt. Im Prinzip arbeitet sie als kurzgeschlossener Generator, wobei der Kurzschluss durch den Gleichrichter mit dem dahinter geschalteten Akkumulator[25] gebildet wird. Die Leerlaufspannung der Lichtmaschine ist wesentlich höher als die Batteriespannung[26]. Wegen der Linearität zwischen Erregerstrom und Kurzschlussstrom (= Ladestrom) lässt sich mit einer sehr einfachen Schaltung (Transistor) der Ladestrom kontrollieren, *unabhängig von der Drehzahl*. Ein Überladen des Akkumulators bei hohen Geschwindigkeiten und langen Strecken wird ebenfalls vermieden. Auch bei kleinen Drehzahlen (Leerlauf) wird der Akkumulator geladen, aber das Moment an der Lichtmaschine nimmt zu und kann bei einer kraftschlüssigen Verbindung (z. B. Keilriemen) unter Umständen zum Schlupf führen (Quietschen).

Inselbetrieb

Speist der Synchrongenerator alleine ein Drehstromnetz, liegt ein sog. *Inselbetrieb* vor. Der Erregerstrom steuert die Größe der Polrad- und damit der Ausgangsspannung U_1, die Drehzahl verändert ebenfalls die Ausgangsspannung und zusätzlich die Frequenz von U_1. Der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ stellt sich entsprechend der Netzimpedanz ein, der Polradwinkel ϑ ergibt sich aus dem Wirkleistungsanteil der erzeugten Leistung und hängt somit mit dem Leistungsfaktor zusammen. Mit zunehmendem Wirkanteil der Leistung muss dem Generator mechanische Leistung zugeführt werden, andernfalls sinkt die Drehzahl und damit die Frequenz in dem Drehstromnetz.

Hält man die Drehzahl und Erregung konstant, ergeben sich je nach Art und Größe der Belastung Kennlinien für die Ausgangsspannung U_1. Legt man das vereinfachte Ersatzschaltbild zugrunde und zeichnet dazu das Zeigerdiagramm, erkennt man, dass bei konstantem Ständerstrom I_1 der Spannungszeiger U_1 sich auf einem Kreis mit dem Radius $X_d \cdot I_1$ um U_p bewegt (Abb. 2.90).

[25] In unserem Sprachgebrauch wird der Akkumulator (Sekundärelement) meistens als »Batterie« (Primärelement) bezeichnet.

[26] Das erklärt, warum man bei laufendem Motor die Batterie nicht abklemmen soll.

Ähnlich wie beim Transformator sinkt bei induktiver Belastung die Spannung stärker als bei rein ohmscher, bei kapazitivem Strom steigt die Spannung an (Abb. 2.91).

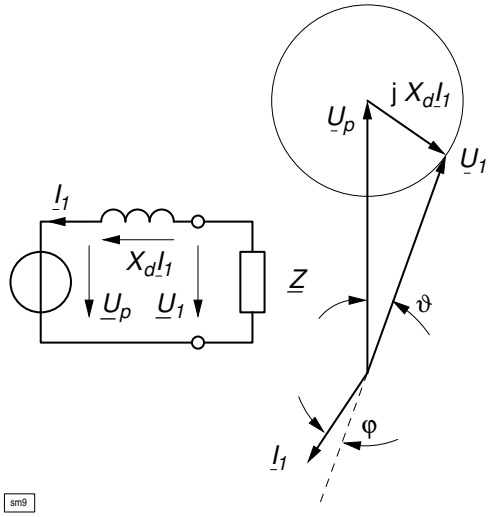


Abb. 2.90: Zeigerdiagramm

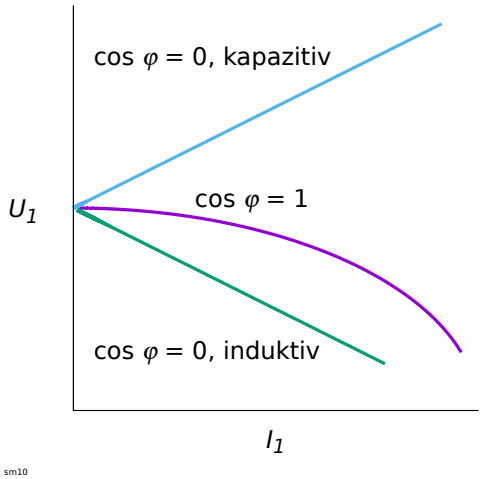


Abb. 2.91: Belastungskennlinien

Um die Spannung konstant zu halten, muss bei kapazitiver Last, z. B. bei leerlaufenden Freileitungen, der Erregerstrom verringert, bei induktiver Last wesentlich verstärkt werden (*Regulierkennlinien*).

Netzbetrieb

Die Verhältnisse ändern sich, wenn der Generator mit anderen Generatoren parallel arbeiten soll im sog. *Netzbetrieb*. Jetzt sind Klemmenspannung und Frequenz fest vorgegeben. Dies ist jedoch nur unter drei Voraussetzungen möglich:

1. Netz und Generator müssen die gleiche Spannung besitzen,
2. Netz und Generator müssen die gleiche Frequenz und Drehrichtung haben,
3. die Phasendifferenz zwischen Netz und Generator muss Null sein.

Nur in diesem Augenblick (!) darf der Generator mit seinen entsprechenden Klemmen »an das Netz gehen«. Man bezeichnet diesen Vorgang als *synchronisieren*.

Versuch 2.6.3 *Abb. 2.92 zeigt eine Schaltung, mit der eine Synchronmaschine mit dem Drehstromnetz synchronisiert werden kann. Zwischen Maschine und Netz befindet sich ein dreipoliger Leistungsschalter Q. Die Synchronisation erfolgt mit der sog.* Dunkelschaltung *mit Hilfe dreier Lampen parallel zu den Schaltkontakten des Leistungsschalters. Die SM wird mit einem drehzahlgeregelten Antrieb auf Synchrondrehzahl gebracht, Leistungsschalter geöffnet. Die Erregung der SM (Klemmen F1-F2) wird so eingestellt, dass das Voltmeter auf der Generatorseite die gleiche Spannung anzeigt wie auf der Netzseite (1. Bedingung). Bei richtiger Drehrichtung werden die drei Lampen* **gleichzeitig** *heller und dunkler, und zwar umso langsamer je näher sich die Drehzahl der Synchrondrehzahl nähert (2. Bedingung). Wenn alle drei Lampen dunkel sind (3. Bedingung) wird der Schalter Q geschlossen, die Maschine »ist am Netz«.*

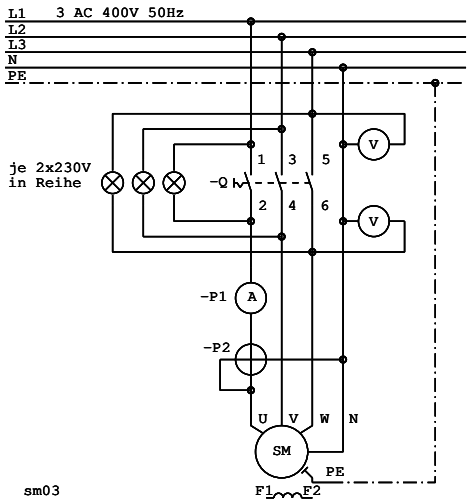


Abb. 2.92: Schaltung zur Synchronisation einer SM an ein Drehstromnetz

Mit der Dunkelschaltung lässt sich die Phasengleichheit nicht sehr genau ermitteln, besser ist ein Synchronoskop, welches die Phasendifferenz direkt anzeigt.

> In der Praxis benutzt man kombinierte Messgeräte, die die Überwachung der Bedingungen auf einen Blick erlauben: ein Doppelzungenfrequenzmesser zur groben Drehzahlanzeige, ein Doppelspannungsmesser und ein *Synchronoskop*. Bei dem Synchronoskop handelt es sich um ein Messgerät, welches die Phasenlagen zweier Drehstromnetze vergleicht und die Differenz mit einem drehenden Zeiger anzeigt. Der Zeiger dreht sich mit der Differenzdrehzahl zwischen Netz und Maschine, bei Phasengleichheit zeigt der Zeiger auf die Nullposition.

Ab diesem Zeitpunkt wird die Ausgangsspannung des Generators U_1 zur Netzspannung U_N und ist mehr oder weniger »starr«, d. h. sie kann sich in Größe und Phasenlage nicht mehr ändern. Daraus ergeben sich je nach Erregerstrom I_E und Wellenleistung verschiedene Betriebszustände, die man sich leicht über das vereinfachte Ersatzschaltbild am Zeigerdiagramm veranschaulichen kann (Abb. 2.93). Für den Ständerstrom erhält man

$$\underline{I}_1 = -\mathrm{j}\,\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_p}{X_d} = -\mathrm{j}\,\frac{\Delta\underline{U}}{X_d}\,.$$

Im *Leerlauf* sind Polradspannung U_p und Netzspannung U_1 gleich groß und in Phase. Mit $\Delta\underline{U} = 0$ ist auch $I_1 = 0$. Die Lage des Polrades ist identisch mit dem Stromzeiger I_E.

Führt man der Maschine mechanische Energie bei unverändertem Erregerstrom zu, dreht sich das Polrad aus der Leerlaufstellung heraus um den Polradwinkel ϑ in Drehrichtung bei gleicher Drehzahl. Die Differenzspannung $\Delta\underline{U}$ erzeugt einen um 90° nacheilenden Ständerstrom, der annähernd gegenphasig zur Netzspannung ist und damit einen von der Maschine abgegebenen Wirkstrom darstellt. Die Maschine arbeitet als *Generator*, sie wandelt die mechanische Leistung in elektrische Wirkleistung um und speist sie in das Netz.

Bei mechanischer Belastung der Synchronmaschine wird das Polrad verzögert, es stellt sich ein Polradwinkel gegen die Drehrichtung bei synchroner Drehzahl ein. Aufgrund des nacheilenden Polrades entsteht die Differenzspannung $\Delta\underline{U}$ und ein Ständerstrom I_1, der fast in Phase mit der Netzspannung ist. Die Maschine entnimmt dem Netz Wirkleistung, sie arbeitet als *Motor*.

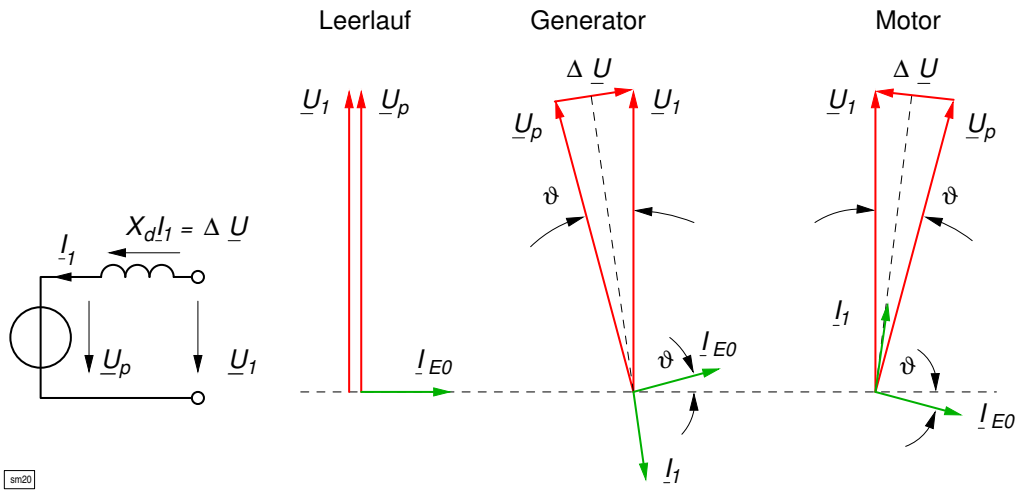


Abb. 2.93: Wirklastbetrieb der Synchronmaschine am Netz

Mit zunehmender Wellenbelastung (Motor oder Generator) verdreht sich das Polrad aus seiner Leerlaufstellung $\vartheta = 0$. Bei Entlastung geht das Polrad in die Leerlaufstellung zurück. Der theoretisch maximale Polradwinkel beträgt $90°_{\text{el}}$.

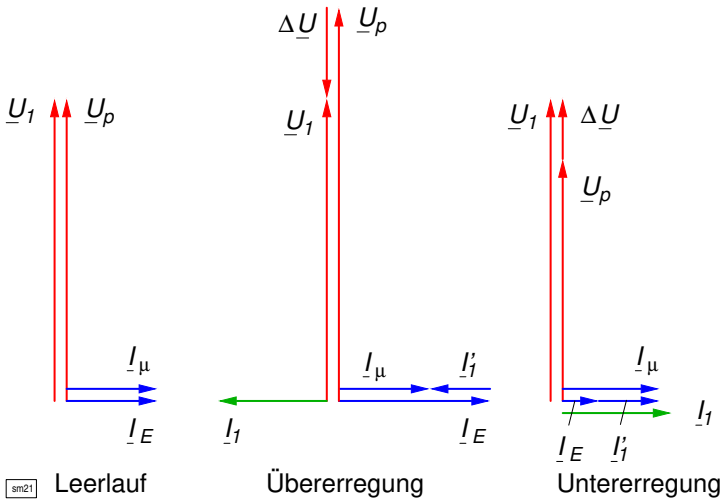


Abb. 2.94: Blindlastbetrieb der Synchronmaschine am Netz

Ändert man bei einer leerlaufenden Maschine nur den Erregerstrom, sind zwei Zustände möglich (siehe Abb. 2.94). Wird durch den Erregerstrom die Polradspannung größer als die Netzspannung gemacht ($U_p > U_N$), fließt wegen der Phasenlage von $\Delta\underline{U}$ ein reiner Blindstrom, der im Verbraucherzählpfeilsystem der Netzspannung um 90° voreilt. Die Synchronmaschine nimmt bei *Übererregung* kapazitiven Blindstrom auf, verhält sich also wie ein kapazitiver Verbraucher. Umgekehrt entsteht bei *Untererregung* ein induktiver Blindstrom, die Maschine verhält sich am Netz wie ein induktiver Verbraucher.

☞ Mit dem Drehmoment der Maschine wird die Wirkleistung, mit der Erregung die Blindleistung gesteuert.

Die Möglichkeit, neben dem Drehmoment auch die Blindleistung zu steuern, erlaubt es, die Synchronmaschine neben ihrer eigentlichen Aufgabe als Motor bzw. Generator zusätzlich als *Phasenschieber* einzusetzen. Im Generatorbetrieb betreibt man die Maschine praktisch immer übererregt, um die Blindleistung der Verbraucher im Netz zu decken. Im Motorbetrieb lässt sich durch Übererregung der Leistungsfaktor der Maschine ($\cos\varphi = 1$ ist möglich) und sogar zusätzlich der Gesamtleistungsfaktor der Anlage verbessern.

Die Zeigerdiagramme in Abbildung 2.95 zeigen die prinzipiell möglichen Betriebsarten einer Synchronmaschine am Netz. Als Referenz dient die Netzspannung U_1. Der ohmsche Spannungsabfall $I_1 \cdot R_1$ wird vernachlässigt. Der Stromzeiger I_1 kann sich in vier Quadranten bewegen.

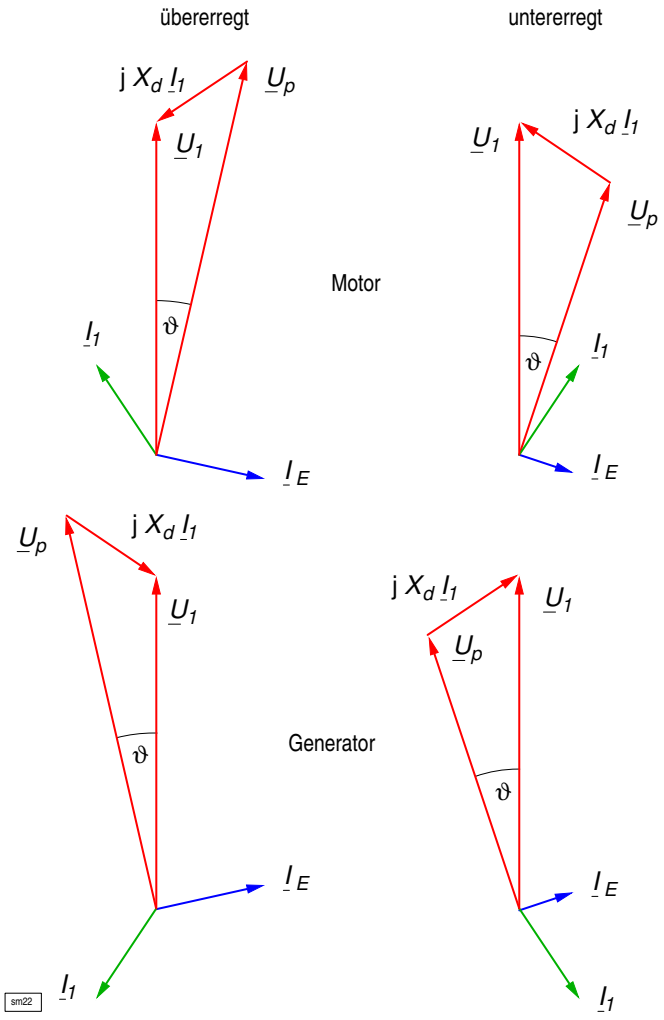


Abb. 2.95: Vierquadrantenbetrieb der Synchronmaschine am Netz

Stromortskurve

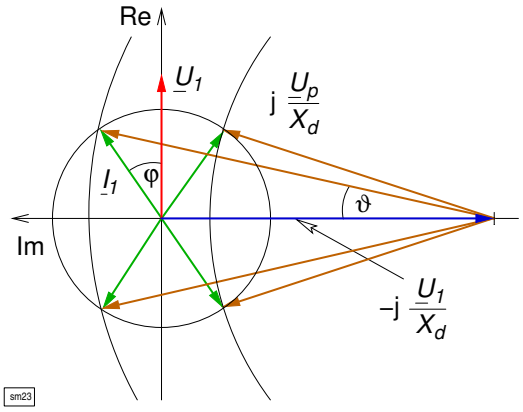
Vernachlässigt man den ohmschen Spannungsabfall und fasst Streu- und Hauptreaktanz zusammen zur Synchronreaktanz, lässt sich für Gleichung (2.51) vereinfacht schreiben

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_p + \mathrm{j}\, X_d \cdot \underline{I}_1 \ .$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\mathrm{j}\, X_d$, erhält man eine Gleichung für den Ständerstrom

$$\underline{I}_1 = \mathrm{j}\, \frac{\underline{U}_p}{X_d} - \mathrm{j}\, \frac{\underline{U}_1}{X_d} \ .$$

Legt man U_1 in die reelle Achse, ergibt sich die Ortskurve für den Ständerstrom I_1 aus den Schnittpunkten der Kreise mit I_1 als Radius um den Nullpunkt und den Kreisen mit dem Radius U_p/X_d um die Spitze des Zeigers $-\mathrm{j}\, U_1/X_d$.



Das Diagramm in Abb. 2.96 zeigt die Grenzen der Stromortskurve im Generatorbetrieb, wobei aus Gründen der Darstellung die Ortskurve in den 1. Quadranten gelegt wurde (Drehung um 180°).

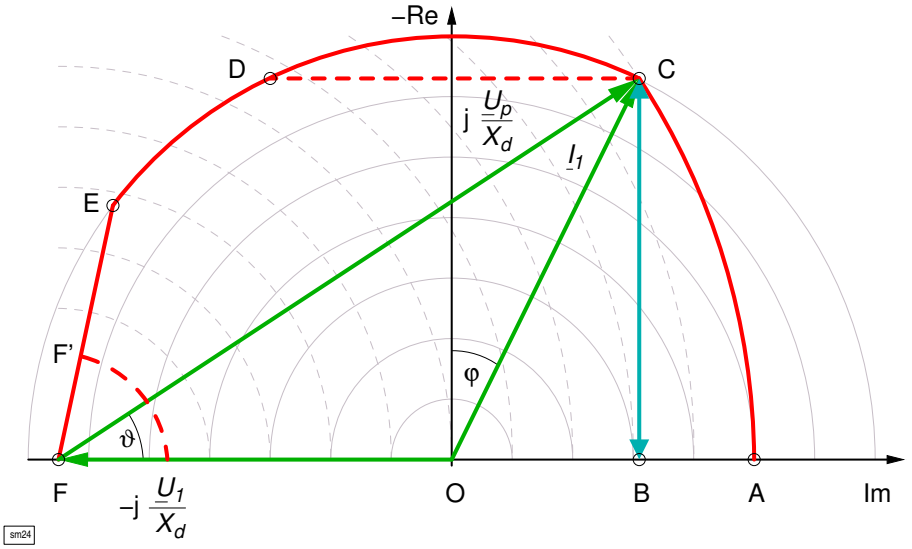


Abb. 2.96: Stromortskurve der Synchronmaschine

Der zulässige Betriebsbereich der Synchronmaschine liegt innerhalb der eingezeichneten Grenzlinien ACDEF, die durch folgende Größen bestimmt sind:

- max. Erregerstrom (Läufererwärmung, Teilkreis AC)
- max. Ständerstrom (Ständererwärmung, Teilkreis CE)
- u. U. max. Wellenleistung $S_N \cdot \cos\varphi_N$ (Strecke CD)
- theoretische *Stabilitätsgrenze* (Kippgrenze bei $\vartheta = 90°$, Lot auf Punkt F), im stationären Betrieb muss ein *Respektabstand* eingehalten werden, der bei einer Vollpolmaschine etwa bei einem Polradwinkel von $\vartheta = 75°$ liegt (Strecke EF)
- u. U. Mindesterregerstrom für Mindestkippmoment (Teilkreis durch F').

Der Respektabstand dient als Sicherheitsabstand zum Kippunkt und verhindert außerdem eine Aufheizung der Ständerendpartien bei Untererregung. Maximaler Erregerstrom und Ständerstrom treten im Schnittpunkt C auf, der im allg. den Nennbetriebspunkt darstellt und zu dem der Nennleistungsfaktor $\cos\varphi_N$ gehört.

Statt der Stromortskurve kann man auch das *Leistungsdiagramm* auswerten. Es entsteht durch Multiplikation der Ströme mit $3{\cdot}U_1$. Die Wirkleistung entnimmt man der Realteilachse (Lage des Spannungszeigers U_1), entsprechend wird die Blindleistung entlang der Imaginärachse angezeigt. Die Kreise um den Ursprung entsprechen konstanten Scheinleistungen.

Der Abstand OF im Stromdiagramm entspricht dem Verhältnis U_1/X_d, im Leistungsdiagramm ergibt sich der Abstand wie folgt. Wegen

$$Z_N = \frac{U_N^2}{S_N} = \frac{3\cdot U_1^2}{S_N} \qquad \text{folgt} \quad 3\cdot U_1^2 = Z_N \cdot S_N \,.$$

Da der Leistungsmaßstab durch Multiplikation mit $3\cdot U_1$ aus dem Strommaßstab hervorgeht, gilt für den Abstand OF im Leistungsdiagramm

$$\frac{3\cdot U_1^2}{X_d} = \frac{Z_N\cdot S_N}{X_d} = \frac{S_N}{x_d}\,.$$

Trägt man den Gesamtstrom der Maschine I_1 über den Erregerstrom I_E bei konstanter Wirklast P_2 auf, erhält man die sog. *V-Kurven* (siehe Abb. 2.97). Sie ergeben sich, wenn man in der Stromortskurve auf Parallelen zur imaginären Achse (entspricht konstantem Wirkstrom) die Länge von I_1 und $U_p/X_d \sim I_E$ berechnet. Für reine Wirkleistung ($\cos\varphi = 1$) wird I_1 minimal. Aus diesem Diagramm kann ein Kraftwerksbetreiber erkennen, wieviel Blindleistung er bei vorgegebener Wirkleistung übernehmen kann, ohne den zulässigen Ständerstrom zu überschreiten. Bei Untererregung darf die Stabilitätsgrenze nicht unterschritten werden.

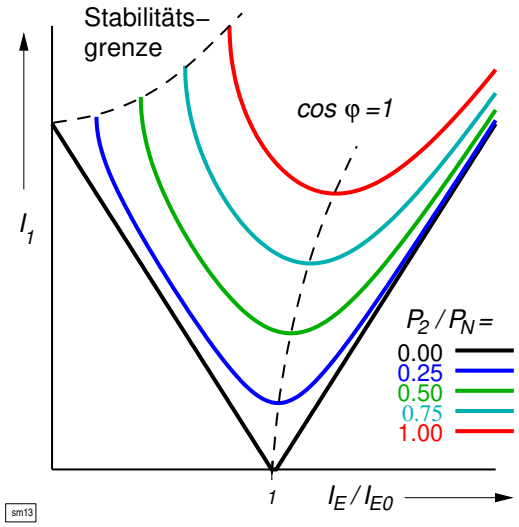


Abb. 2.97: V-Kurven

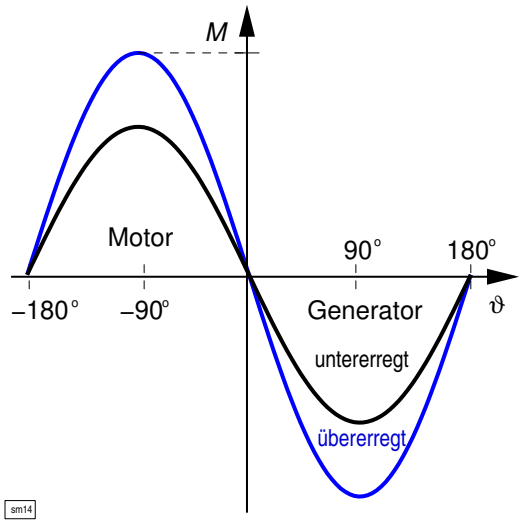


Abb. 2.98: Drehmoment

Drehmoment

Aus der Stromortskurve kann man für die Wirkkomponente des Ständerstromes folgende Beziehung ableiten:

$$I_1 \cdot \cos\varphi = -\frac{U_p}{X_d} \cdot \sin\vartheta \ .$$

Das Minuszeichen ergibt sich aus $\cos(180\,^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$. Die Wirkleistung der Maschine berechnet sich aus

$$P_1 = 3 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi = -3\ \frac{U_1\ U_p}{X_d}\ \sin\vartheta \tag{2.54}$$

Ersetzt man darin P_1 durch $2\pi \cdot n_1 \cdot M$, erhält man für das Moment der Synchronmaschine die Formel

$$\boxed{M = -\frac{3 \cdot U_1 \cdot U_p}{2\pi \cdot n_1 \cdot X_d} \cdot \sin\vartheta} \ .$$

Das Drehmoment der Vollpollmaschine in Abhängigkeit vom Polradwinkel verläuft bei konstanter Klemmen- und Polradspannung sinusförmig, das Kippmoment ist proportinal zur Polradspannung (siehe Abbildung 2.98).

3 Elektrische Maschinen – Vertiefung

3.1 Magnetischer Kreis

Referenzen: [8, 9, 10, 11]

3.1.1 Anwendungen des Durchflutungssatzes

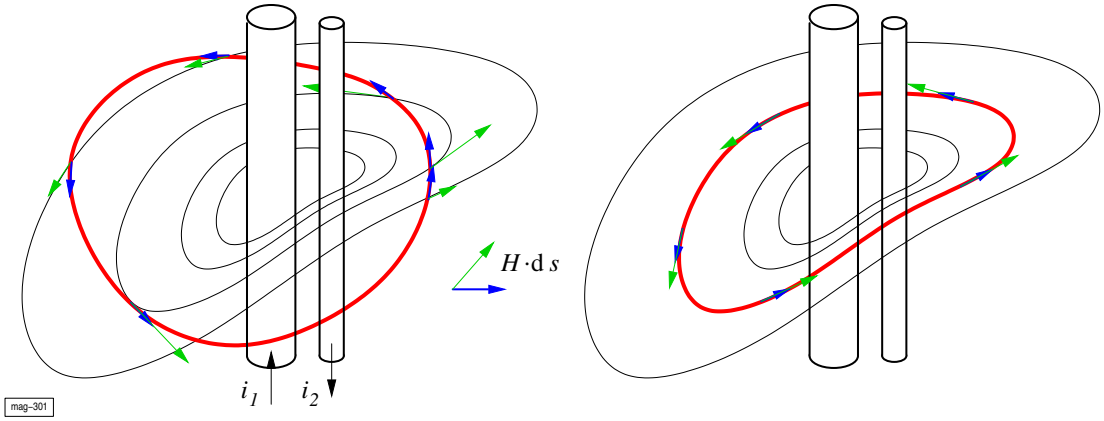


Abb. 3.1: Anwendung des Durchflutungssatzes mit unterschiedlichen Integrationswegen

Abb. 3.1 zeigt das Prinzip des Durchflutungsgesetzes (siehe Kapitel Magnetische Feldstärke und Durchflutung). Der geschlossene Integrationsweg kann beliebig verlaufen. Bei der Summenbildung ist das Punktprodukt des Feldvektors $\vec{H}$ mit dem Richtungsvektor $\mathrm{d}\vec{s}$ zu bilden (Abb. 3.1 links). Stehen beide Vektoren senkrecht aufeinander, liefern sie keinen Beitrag zum Integral. Verläuft der Integrationsweg entlang einer Linie $H = \text{const}$, vereinfacht sich die Summenbildung zu $H \cdot l$, wobei l die Länge der Feldlinie bedeutet (Abb. 3.1 rechts).

☞ Bei der Interpretation von Feldlinien ist die Definition zu beachten (siehe Kapitel Definitionen und Eigenschaften). Danach ist der magnetische Fluss zwischen zwei benachbarten Feldlinien gleich, d. h. zwischen zwei Feldlinien ist das Produkt $\vec{A} \cdot \vec{B} = \Phi$ konstant. Der Vektor $\vec{A}$ ist der Flächenvektor der Fläche, durch die der Fluss hindurchtritt, bei Feldlinienbilder ist dies die orthogonale Verbindung zwischen zwei benachbarten Feldlinien. Aus diesen Eigenschaften folgt: der Feldvektor $\vec{B}$ (bzw. $\vec{H}$ bei konstantem μ_r) ist nur auf parallel verlaufenden Feldlinien konstant.

In der Feldtheorie ergeben sich die B-Linien aus der Verbindung von Punkten mit gleichem *Vektorpotential* (siehe Kapitel Vektorpotential).

Die folgenden Beispiele demonstrieren die Anwendung anhand einfacher Geometrien.

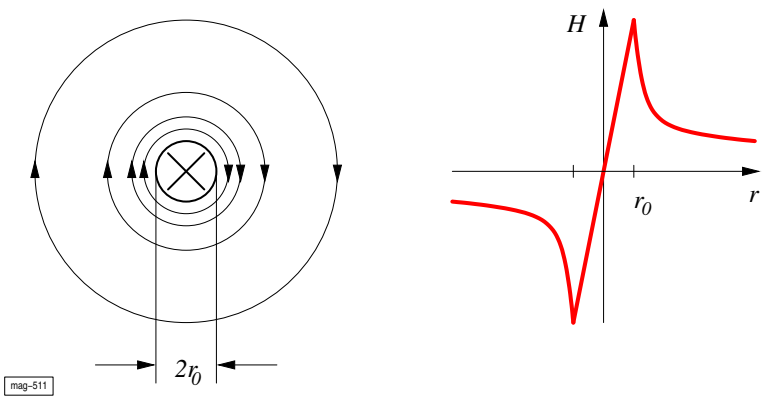


Abb. 3.2: Magnetische Feldstärke innerhalb und außerhalb eines Linienleiters

Geradliniger Linienleiter

Nach Abb. 3.2 gilt für $r \geq r_0$:

$$\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \sum I = I \qquad \Longrightarrow \qquad H \cdot 2\pi\, r = I \qquad \Longrightarrow \qquad H(r) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

Für $r \leq r_0$ gilt:

$$H\,2\pi\, r = \int_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A} = \frac{I}{\pi\, r_0^2}\,\pi\, r^2 = I\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad H(r) = \frac{I\, r^2}{2\pi\, r\, r_0^2} = \frac{I}{2\pi\, r_0^2} \cdot r$$

Das magnetische Feld existiert also auch innerhalb stromführender Leiter.

Zylinderspule (Solenoid)

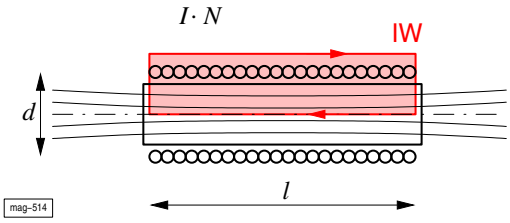


Abb. 3.3: Zylinderspule (Solenoid)

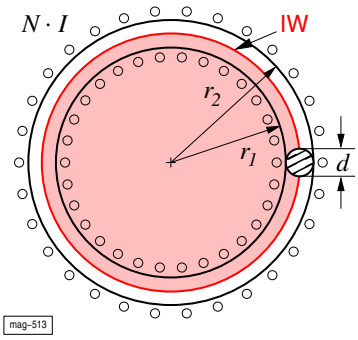


Abb. 3.4: Ringspule (Toroid)

Ist die Zylinderspule in Abb. 3.3 eng bewickelt und $l \gg d$ (homogenes Feld), umschließt eine Feldlinie N Windungen mit jeweils der Stromstärke I. Längs der mittleren Feldlinie muss wegen der Feldhomogenität (parallele Feldlinien mit konstantem Abstand) H konstant sein. Außerhalb der Spule weiten sich die Feldlinien auf, der Abstand zwischen zwei Feldlinien wird so groß, dass bei dem gewählten Integrationsweg (IW) das Feld außerhalb der Spule ≈ 0. Für das magnetische Feld in der Zylinderspule gilt dann

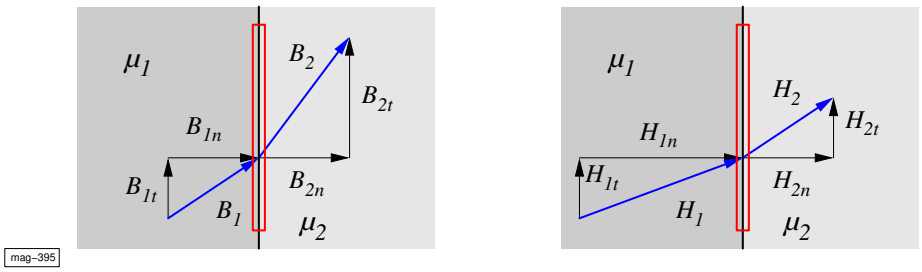
$$H = \frac{N \cdot I}{l}\,. \tag{3.1}$$

Ringspule (Toroid)

Ist die Ringspule gleichmäßig dicht bewickelt und ist der Ringdurchmesser $r_1 + r_2$ sehr viel größer als der Kerndurchmesser $d = r_2 - r_1$, ergibt sich nach Abb. 3.4

$$H(r) = \frac{N\,I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \qquad \text{für} \quad r_1 < r < r_2 \; .$$

3.1.2 Feldverlauf an Grenzflächen



mag-395

Abb. 3.5: Feldverlauf an den Grenzflächen zwischen Werkstoffen mit unterschiedlichen Permeabilitäten

Flussdichte

Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes wird durch die Gleichung $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ beschrieben. Wendet man diese Gesetzmäßigkeit auf einen kleinen Quader an einer Grenzfläche an (Abb. 3.5 links), erkennt man, dass die Normalkomponenten der magnetischen Flussdichten auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich werden müssen, wenn die Dicke des Quaders an der Grenzfläche gegen Null geht. Es gilt:

$$\boxed{B_{1\mathrm{n}} = B_{2\mathrm{n}} \; , \qquad \frac{B_{1\mathrm{t}}}{B_{2\mathrm{t}}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \; .$$

Magnetische Feldstärke

Wendet man den Durchflutungssatz $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ auf einen kleinen Umlauf an der Grenzfläche an (Abb. 3.5 rechts), verschwinden die Normalkomponenten des magnetischen Feldes je schmaler der Umlauf an der Grenzfläche wird und die tangentialen Komponenten der magnetischen Feldstärken auf beiden Seiten der Grenzfläche werden gleich. Daraus folgt:

$$\boxed{H_{1\mathrm{t}} = H_{2\mathrm{t}} \; , \qquad \frac{H_{1\mathrm{n}}}{H_{2\mathrm{n}}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}} \; .$$

Dieses Verhalten der magnetischen Größen an Grenzflächen zwischen zwei Werkstoffen **1** und **2** bezeichnet man auch als »magnetisches Brechungsgesetz«. Damit lässt sich z. B. erklären, weshalb Feldlinien von einem hochpermeablen Werkstoff nahezu senkrecht nach einem Werkstoff mit geringerer Permeabilität (Luft) verlaufen.

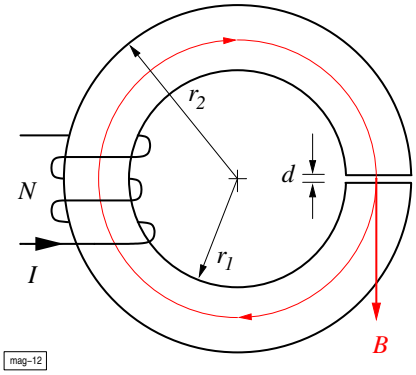


Abb. 3.6: C-Magnet

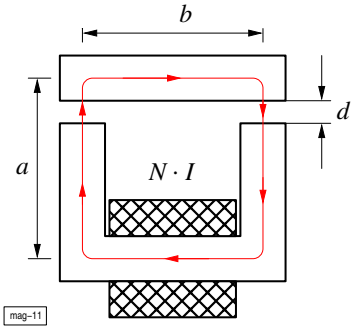


Abb. 3.7: UI-Kern

3.1.3 Berechnung linearer magnetischer Kreise

Die Abbildungen 3.6 und 3.7 zeigen einfache magnetische Kreise mit Eisenfüllungen. Setzt man eine konstante Permeabilität μ_r voraus, lassen sich solche Kreise linear berechnen. Unter den Annahmen, dass keine Streuung vorhanden ist und das Luftspaltfeld homogen ist, muss der Fluss $\Phi = B \cdot A$ überall im Kreis gleich sein. Bei gleichem Querschnitt A bedeutet dies, dass auch die Flussdichte längs einer mittleren Feldlinie konstant sein muss.

Nach dem magnetischen Brechungsgesetz (siehe Kapitel Feldverlauf an Grenzflächen) ist beim Übergang der Flussdichte von einem Material (z. B. Luft) in ein anderes Material (z. B. Eisen) die Normalkomponente der Flussdichte stetig. Tritt das Feld also senkrecht durch die Grenzfläche, muss auf beiden Seiten die Flussdichte gleich groß sein.

Bei beiden Beispielen gilt also $B_{\text{Eisen}} = B_{\text{Luft}} = B$.

Das gilt nicht für die magnetische Feldstärke H. Der Durchflutungssatz liefert

$$N \cdot I = H_{\text{Eisen}} \cdot l_{\text{Eisen}} + H_{\text{Luft}} \cdot l_{\text{Luft}}$$

wobei für l_{Eisen} und l_{Luft} die entsprechenden Feldlinienlängen einzusetzen sind. Wegen der Linearität zwischen B_{Eisen} und H_{Eisen} kann man direkt einen Zusammenhang zwischen I und B herstellen:

$$N \cdot I = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r}\, l_{\text{Eisen}} + \frac{B}{\mu_0}\, l_{\text{Luft}} \,.$$

Man erkennt sofort, dass zwischen B und I auch ein linearer Zusammenhang besteht. Dies trifft in der Praxis nur auf schwach erregte Eisenkreise ($B < 1\,\text{T}$) und eisenlose Anordnungen zu.

Für überschlägige Berechnungen wird vielfach $\mu_r \to \infty$ gesetzt. Wie man sieht, wird der Durchflutungsbedarf $N \cdot I$ in erster Linie durch den Luftspaltweg l_{Luft} bestimmt.

3.1.4 Nichtlinearer magnetischer Kreis

Etwas aufwändiger wird die Berechnung, wenn die Permeabiltät nicht konstant ist. Im allgemeinen gilt $\mu_r = f(H)$. In diesem Fall benötigt man die Magnetisierungskennlinie (MKL) $B = f(H)$.

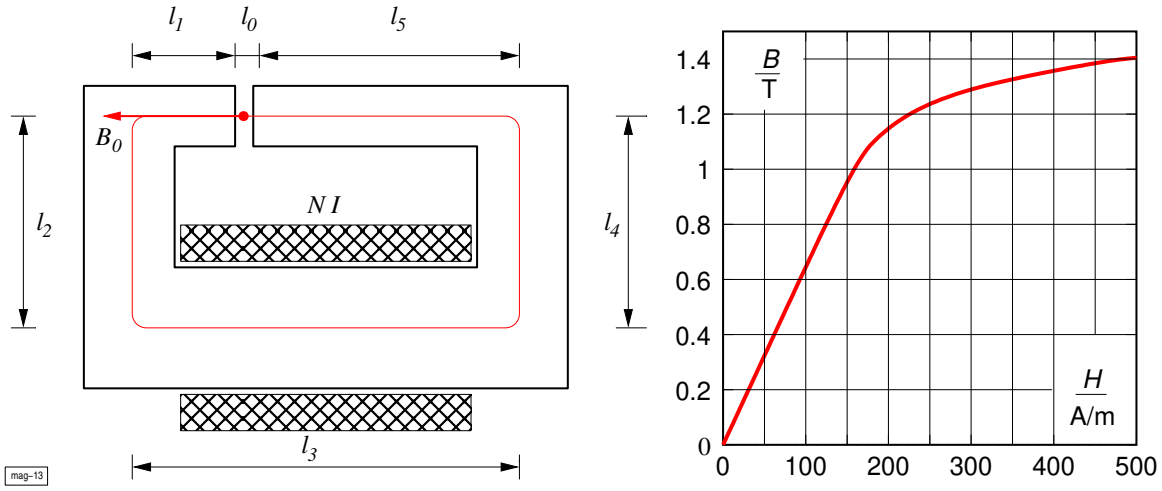


Abb. 3.8: Nichtlinearer Magnetkreis mit Magnetisierungskennlinie

Der Berechnungsgang für einen nichtlinearen Magnetkreis mit unterschiedlichem Querschnitt soll anhand der Anordnung nach Abb. 3.8 erläutert werden [8]. Der Eisenkern besteht aus einem Schenkel und mehreren Jochen mit unterschiedlichen Querschnitten. Gesucht ist die erforderliche Durchflutung $N \cdot I$, damit im Luftspalt eine Flussdichte von $B_0 = 1.4\,\mathrm{T}$ auftritt. Der Feldverlauf im Luftspalt wird als homogen vorausgesetzt. Außerdem soll die Streuung vernachlässigt werden.

Da keine Streuung auftreten soll, muss der Fluss in allen Teilen des Kreises konstant sein. Wegen der unterschiedlichen Querschnitte ist jedoch die Flussdichte nicht überall konstant, sondern berechnet sich aus $\Phi = B_0 \cdot A_0 = B_n \cdot A_n = \text{const}$. Man teilt den Kreis zweckmäßigerweise in einzelne Abschnitte ein entsprechend dem Schema in Tabelle 3.1.

Tabelle 3.1: Berechnungsschema für den nichtlinearen Magnetkreis in Abb. 3.8

n	$\frac{A_n}{A_0}$	$\frac{B_n}{\mathrm{T}}$	$\frac{H_n}{\mathrm{A/m}}$	$\frac{l_n}{\mathrm{m}}$	$\frac{H_n \cdot l_n}{\mathrm{A}}$
0	1	1.4	1114085	0.01	11121
1	1	1.4	500	0.4	200
2	1.25	1.12	160	0.5	80
3	1.5	0.934	150	1.0	150
4	1.25	1.12	160	0.5	80
5	1	1.4	500	0.59	295
				Summe:	**11946**

Hat man die Flussdichten B_n in den einzelnen Abschnitten ausgerechnet, erhält man die dazugehörigen Feldstärken H_n direkt aus der Magnetisierungskennlinie. Zum Schluss summiert man alle *magnetischen Spannungsabfälle* $H \cdot l$ auf und erhält die Gesamtdurchflutung, die nötig ist, um die gewünschte Luftspaltflussdichte B_0 zu erzeugen.

☞ Die Berechnung gestaltet sich relativ einfach, da es sich bei dieser Aufgabenstellung um die Reihenschaltung von magnetischen Spannungsabfällen handelt, die durch einen *gemeinsamen*, vorgegebenen Fluss erzeugt werden. Dies entspricht den häufigsten Problemstellungen bei der Auslegung elektrischer Maschinen.

Als schwieriger erweist sich die Aufgabe, die Flussdichte und den Fluss zu bestimmen, wenn die Durchflutung gegeben ist und der Kreis lineare und nichtlineare Abschnitte enthält. Mit diesem Thema befasst sich das Kapitel Einfluss des Luftspaltes.

Der nächste Schritt wäre, die genaue Windungszahl N zu ermitteln. Die bisherige Rechnung liefert nur das Produkt $I \cdot N$ (oft als Ampere-Windungszahl AW bezeichnet). Die Kunst besteht darin, die Windungszahl so zu bestimmen, dass die Anordnung möglichst ohne Vorwiderstand mit der gegebenen Betriebsspannung die erforderliche Durchflutung erzeugt. Mit zunehmender Windungszahl muss der Strom und kann der Drahtquerschnitt kleiner gewählt werden. Damit nimmt der Kupferwiderstand zu, der Betriebsstrom ab. Der prinzipielle Berechnungsgang zur Auslegung einer Wicklung bzw. Spule ist im Anhang Auslegung von Spulen beschrieben.

3.1.5 Einfluss der Sättigung

Jede stromführende Anordnung, die ein Magnetfeld erzeugt, besitzt eine Induktivität und wird auch durch eine solche in Ersatzschaltbildern dargestellt (siehe auch Kapitel Selbstinduktion, Induktivität).

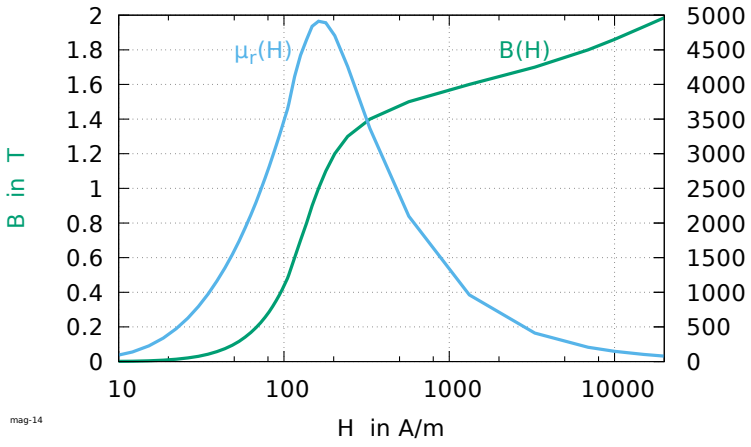


Abb. 3.9: Flussdichte und Permeabilität von Weicheisen

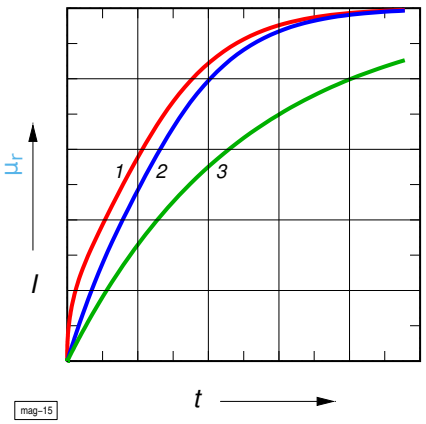


Abb. 3.10: Einschaltstrom

Abb. 3.9 zeigt den typischen Verlauf der Flussdichte $B(H)$ und der relativen Permeabilität $\mu_r(H)$ von Weicheisen im halblogarithmischen Maßstab. Die Permeabilität μ_r gibt im Prinzip die Steigung der Magnetisierungskennlinie (MKL) wieder (*differentielle Permeabilität*). Gleichzeitig ist sie auch ein direktes Maß für die Induktivität, denn

$$H \sim I, \quad B \sim \Phi \qquad \text{und} \qquad \mu_r \sim B/H \sim \Phi/I \sim L\,. \tag{3.2}$$

☞ Mit zunehmender Sättigung verringert sich die Induktivität.

An einem Beispiel soll die Auswirkung der Sättigung demonstriert werden [12, Beispiel V040]. Dazu wird eine konstante Gleichspannung an eine Induktivität gelegt und der Einschaltstrom

numerisch berechnet. Die Ergebnisse zeigt Abb. 3.10. Es wurden zwei unterschiedliche Magnetisierungskennlinien und eine konstante Magnetisierung zugrunde gelegt. Nimmt man konstante Permeabilität an, bleibt der Induktivitätswert konstant und der Einschaltstrom verläuft exponentiell (Kurve 3). Verläuft die MKL wie z. B. in Abb. 3.8 dargestellt zunächst linear und dann mit Sättigung, ergibt sich ein Stromverlauf entsprechend Kurve 2. Für sehr geringe Feldstärken nimmt die Permeabiltät jedoch wieder ab, wie man in Abb. 3.9 für $H < 200\,\mathrm{A/m}$ deutlich erkennen kann. Man bezeichnet diesen Bereich als *Anfangspermeabilität*. Den Einschaltstrom dazu zeigt Kurve 1. In der Praxis heißt dies, dass sich magnetische Anordnung bei sehr kleinen Erregungen wie gesättigte Magnete verhalten.

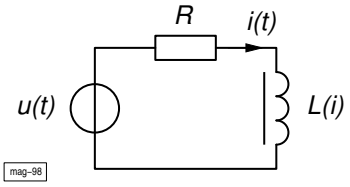
Zur Beurteilung der Zeitkonstante verwendet man oft den Einschaltstromverlauf an der Induktivität, indem man eine Tangente an die Kurve im Einschaltpunkt legt. Diese Methode würde vor allem bei Kurve 1 zu unzuverlässigen Aussagen führen.

Einen weiteren, nicht zu unterschätzenden Einfluss auf den Einschaltstrom haben die im Eisenkern aufgrund der Flussdichteänderung verursachten Wirbelströme. Ihre Wirkungen lassen sich normalerweise nur mittels numerischer Berechnungen erfassen.

Bei fast allen elektrischen Maschinen spielen Sättigungseffekte eine Rolle, z. B. für die Leerlaufkennlinien $U_0 = f(I_E)$ bei Synchron- und Gleichstromgeneratoren. Sie sind u. a. auch Ursache für Oberschwingungen, z. B. im Magnetisierungsstrom von Transformatoren. Eine analytische Behandlung ist im allg. aufwändig. Man verzichtet deshalb oftmals bei theoretischen Betrachtungen auf ihren Einfluss oder arbeitet mit Kompromisslösungen (siehe Kapitel Synchronreaktanz).

Die Tatsache, dass mit der Sättigung die Induktivität abnimmt, spielt bei der Auslegung von Glättungsdrosseln, aber auch z. B. beim Eintaktbetrieb von Ausgangsübertragern in der NF-Technik eine wichtige Rolle, Stichwort *Gleichstromvormagnetisierung*. Dazu soll folgende Anordnung untersucht werden (siehe auch [12, Beispiel V050]):

Die nebenstehende Schaltung besteht aus einer Spannungsquelle, die eine pulsierende Gleichspannung $u(t)$ liefert (wie bei einer Zweiweggleichrichtung), und einer verlustbehafteten Drosselspule mit Eisenkern.



Gesucht ist der Stromverlauf bei kleinem und großem Spulenstrom.

Abbildung 3.11 zeigt die Ergebnisse einer numerischen Berechnung. In das Diagramm wurde gleichzeitig die Magnetisierungskennlinie gezeichnet, und zwar so, dass die Ströme I_{RL} direkt auf die H-Achse der MKL projeziert werden können. Man erkennt, dass kleine Stromschwankungen $I_{RL0} \sim \Delta H_0$ zu großen Flussdichteänderungen ΔB_0 führen, je größer die Ströme werden umso mehr wandert der Arbeitspunkt in die Sättigung, dass Verhältnis $\Delta B/\Delta H$ wird immer kleiner, die differentielle Induktivität nimmt mit zunehmender Sättigung ab und damit auch die Glättungsfunktion der Drossel, die Welligkeit des Stromes nimmt zu.

Das lässt sich verhindern, in dem man die Drossel mit einem Luftspalt versieht. Dadurch wird der *Arbeitspunkt* in den linearen (steileren) Teil der MKL verlagert (siehe Kapitel Einfluss des Luftspaltes) und die Glättung verbessert.

Ähnliche Sachverhalte liegen bei NF-Ausgangsübertragern vor, bei denen dem NF-Signal eine Gleichspannung bzw. ein Gleichstrom überlagert ist. Um die Verzerrung gering zu halten, ist es wichtig, den Arbeitspunkt des Übertragers im linearen Teil der MKL zu halten.

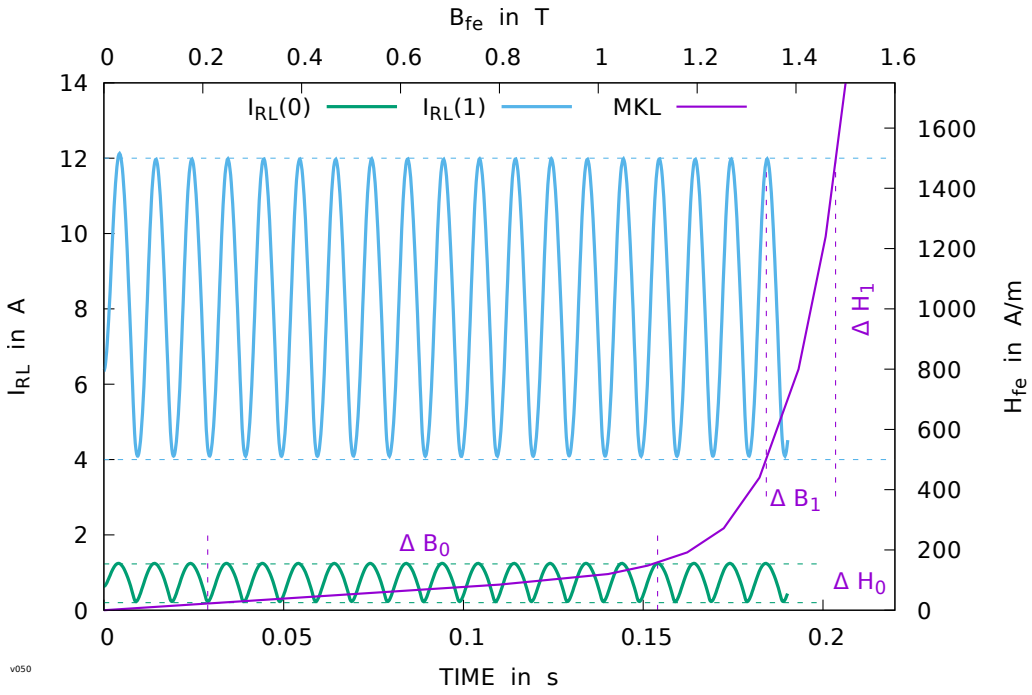


Abb. 3.11: Stromverlauf und Aussteuerung der Magnetisierungskennlinie

3.1.6 Weitere Einflussgrößen

Streuung

Je nach Ausnutzung und Beschaffenheit des magnetischen Kreises geht ein Teil des Flusses »verloren«. Den von der magnetischen Erregung erzeugten Gesamtfluss Φ teilt man demzufolge in zwei Anteile auf:

- als Nutz- oder *Hauptfluss* Φ_h bezeichnet man den Teil, der an der Energiewandlung teilnimmt. Dazu gehört z. B. der Teil des Ständerflusses, der den Luftspalt überquert und zur Drehmomentenbildung des Läufers beiträgt. Im Ersatzschaltbild werden diesem Fluss mindestens zwei gekoppelten *Hauptinduktivitäten* zugeordnet, die man unter bestimmten Umständen zu einer Induktivität zusammenfassen kann.
- Den verbleibenden Teil bezeichnet man als *Streufluss* Φ_σ und stellt ihn im Ersatzschaltbild durch eine nicht gekoppelte sog. *Streuinduktivität* dar.

Die Streuung wird durch den Streufaktor σ ausgedrückt:

$$\boxed{\sigma = \frac{\Phi_\sigma}{\Phi_h + \Phi_\sigma}} \,. \tag{3.3}$$

Sie wird um so größer je mehr ferromagnetisches Material in die Sättigung geht (die Permeabilität nimmt ab), vor allem in inhomogenen Bereichen (Ecken, Bohrungen, Luftspalte).

Luftspalt

An Luftspalten dehnt sich der Fluss auf eine größere Querschnittsfläche aus. Dadurch sinkt die mittlere Flussdichte im Luftspalt. Durch einen Korrekturfaktor

$$\boxed{k_L = \frac{A_L}{A_K} > 1}\,, \tag{3.4}$$

der das Verhältnis der angenommenen Luftspaltfläche A_L zu der geometrischen Fläche des Eisenkerns A_K beschreibt, kann man den Einfluss der Luftspaltausweitung berücksichtigen. Für Überschlagsrechnungen nimmt man für die Luftspaltfläche die Kernfläche plus einem Rand mit der Breite der Luftspaltlänge an.

Die Luftspaltinduktion ist jedoch nicht konstant. Bei parallelen Luftspalten ist die Flussdichte in der Mitte am größten und fällt zum Rand hin ab. Die Inhomogenität nimmt zu, wenn der Luftspalt vergrößert wird (siehe auch Kapitel Numerische Feldberechnung). Unvermeidbare Luftspalte treten z. B. bei geblechten Anordnungen auf. Hier geschieht der Flussübergang an den Stoßfugen, aber auch über benachbarte Bleche. Noch komplizierter ist der Sachverhalt bei Pulververbundwerkstoffen, bei denen man sich den Kern aus feinverteilten Luftspalten zusammengesetzt vorstellen muss. Berücksichtigt werden diese Einflüsse durch Einfügen fiktiver Luftspalte bzw. eine korrigierte (*gescherte*) Permeabilität.

Eisenfüllfaktor

Kernbleche sind zur Vermeidung von Wirbelströmen einseitig elektrisch isoliert. Beim Stapeln bilden sich zusätzliche Luftschichten zwischen den Blechen. Dadurch wird die wirksame Eisenquerschnittsfläche verringert. Der Eisenfüllfaktor (*Stapelfaktor*) ist als das Verhältnis des wirksamen magnetischen Kernquerschnitts A_{Fe} zum geometrischen Kernquerschnitt A_K definiert:

$$\boxed{k_{\mathrm{Fe}} = \frac{A_{\mathrm{Fe}}}{A_k} < 1}\,. \tag{3.5}$$

Je nach Blechdicke, -sorte und Pressung liegt der Eisenfüllfaktor im Bereich von $0.8 < k_{\mathrm{Fe}} < 0.97$.

3.1.7 Einfluss des Luftspaltes

Nimmt man die Magnetisierungskennlinie eines geschlossenen Eisenkreises entsprechend Abb. 3.12 auf und berücksichtigt auch die Verluste, erhält man die Hystereseschleife a) in Abb. 3.13 mit der Remanenz B_r und der Koerzitivfeldstärke H_c.

Fügt man in diesen Kreis einen Luftspalt ein und nimmt die gleiche Kennlinie auf, ergibt sich eine neue, geneigte (*gescherte*) Hystereseschleife b). Im Prinzip geht die Kennlinie a) durch Scherung in die Kennlinie b) über. Der Scherungswinkel ist proportional zum Verhältnis Luftspaltlänge zu Eisenweglänge, also l_L/l_{Fe}.

Scherungsabhängig sind die Remanenz B_r^* und die Permeabilitäten, *scherungsunabhängig* die Koerzitivfeldstärke H_c, Sättigungsinduktionen und Verluste (= Flächeninhalte der Hystereseschleifen).

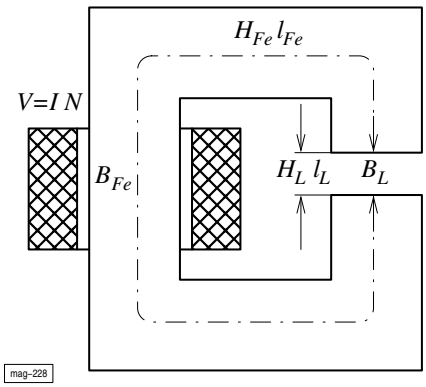


Abb. 3.12: Magnetkreis mit Luftspalt

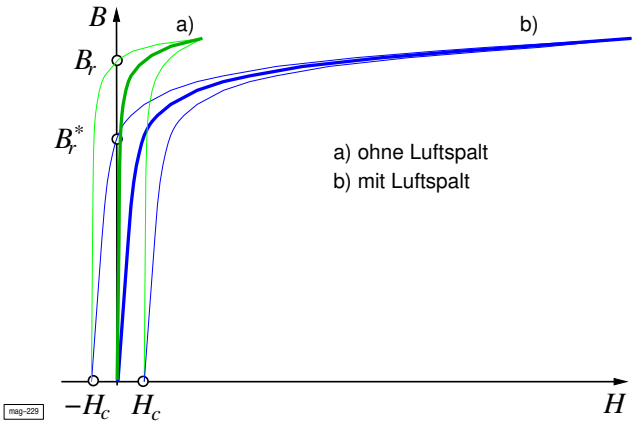


Abb. 3.13: Hystereseschleife mit Scherung

Für die wirksame Permeabilität μ_r^* eines gescherten Kreises ergibt sich

$$\mu_r^* = \frac{1}{\frac{1}{\mu_r} + \frac{l_L}{l_{\mathrm{Fe}}}} \ ,$$

d. h. an Stelle des Luftspalts rechnet man mit der gescherten Permeabilität μ_r^*.

Ist bei einem Magnetkreis mit Luftspalt die Durchflutung $\Theta = V = I \cdot N$ vorgegeben und sollen die Flussdichten B_L und B_{Fe} berechnet werden, ergibt sich das Problem, dass in der Durchflutungsgleichung

$$V = H_{\mathrm{Fe}} \cdot l_{\mathrm{Fe}} + H_L \cdot l_L = \frac{B_{\mathrm{Fe}}}{\mu_0 \mu_r} \cdot l_{\mathrm{Fe}} + \frac{B_L}{\mu_0} \cdot l_L = H_{\mathrm{Fe}} \cdot l_{\mathrm{Fe}} + \frac{B_L}{\mu_0} \cdot l_L \tag{3.6}$$

H_L und H_{Fe} unbekannt sind und voneinander abhängen. Bringt man diese Gleichung in die Form $B = B_L = f(H_{\mathrm{Fe}})$, ergibt sich

$$B = \frac{\Theta \cdot \mu_0}{l_L} - \frac{l_{\mathrm{Fe}} \cdot \mu_0}{l_L} \ H_{\mathrm{Fe}} \ .$$

Diese Gleichung nimmt für die Achsenabschnitte $H_{\mathrm{Fe}} = 0$ den Wert

$$B(0) = \frac{\Theta \cdot \mu_0}{l_L}$$

und für $B = 0$ den Wert

$$H_{\mathrm{Fe}} = \frac{\Theta}{l_{\mathrm{Fe}}}$$

an und stellt die *Luftspaltgerade* $B_L = f(H_{\mathrm{Fe}})$ dar. Sie beschreibt den Verlauf der Flussdichte im Magnetkreis in Abhängigkeit von H_{Fe} (Abb. 3.14). Zeichnet man in das gleiche Diagramm die Magnetisierungskennlinie für das Eisenmaterial $B_{\mathrm{Fe}} = f(H_{\mathrm{Fe}})$, schneiden sich die beiden Kennlinien in dem Punkt H_{Fe}, bei dem $B_L = B_{\mathrm{Fe}}$ ist. Eingesetzt in Gleichung (3.6) erhält man den Wert für H_L, den man auch aus dem Diagramm in Abb. 3.14 ablesen kann.

Die Effekte der Streuung, Luftspaltausweitung und des Eisenfüllfaktors lassen sich durch eine geänderte Luftspaltgeraden berücksichtigen. Mit Hilfe der Gleichungen (3.3), (3.4) und (3.5) kann man den geänderten Fluss Φ_L^* und die Flussdichte B_L^* bestimmen. Für die Luftspaltgerade

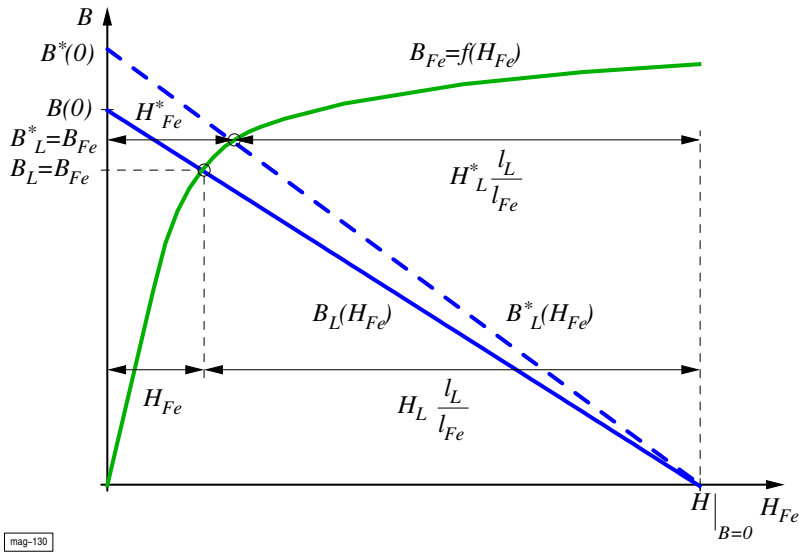


Abb. 3.14: Luftspaltgerade und Magnetisierungskennlinie

ergibt sich daraus nur ein neuer Achsenabschnitt $B^*(0)$. Durch Gleichsetzen von $B_L^* = B_{\mathrm{Fe}}$ erhält man einen neuen Schnittpunkt mit der Magnetisierungskennlinie.

Bei der analytischen Berechnung ist man oft auf empirische Korrekturfaktoren angewiesen (Luftspaltausweitung, Streuung). Wesentlich genauere Ergebnisse liefern numerische Magnetfeldberechnungen (siehe Kapitel 3.1.9). Die Korrekturen entfallen, da solche Rechnungen den Feldverlauf unter Berücksichtigung der Magnetisierungskennlinien und der Geometrie der Anordnung bestimmen können. Im allg. gibt man die Erregung vor und lässt sich die Magnetfelder ausrechnen.

3.1.8 Elektrisches Ersatzschaltbild

In der Elektrotechnik gibt es das gleiche Problem bei Gleichstromkreisen mit nichtlinearen Widerständen. Wegen der Analogien zwischen elektrischen Stromkreisen und Magnetkreisen benutzt man häufig das elektrische Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises und lässt sich die Magnetfeldgrößen z. B. mit Hilfe eines Netzwerkanalyseprogrammes berechnen.

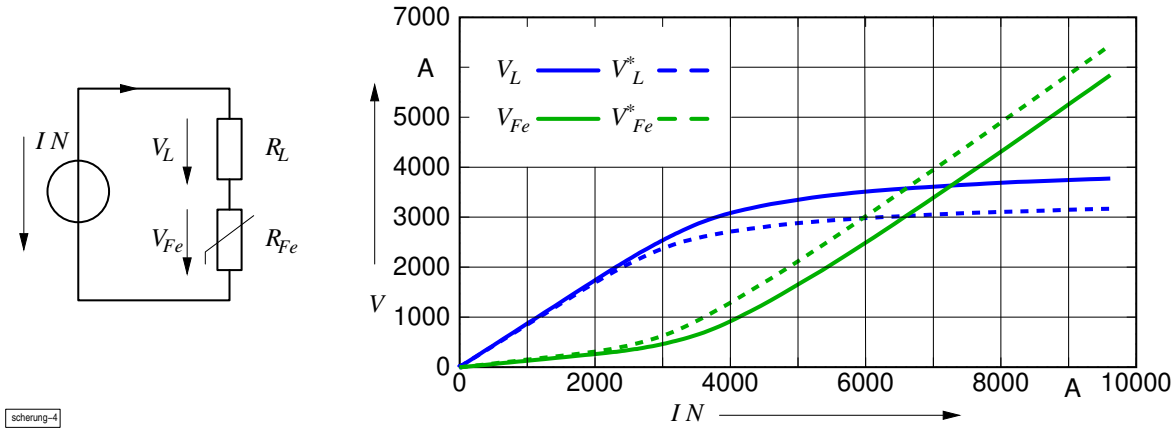


Abb. 3.15: Ersatzschaltbild und Durchflutungsbedarf für den Magnetkreis in Abb. 3.12

Abb. 3.15 zeigt das Ersatzschaltbild und die Ergebnisse für den einfachen Magnetkreis mit Luftspalt und Magnetisierungskennlinie von Abb. 3.12. Die Spannungsquelle entspricht der Erregung $V = \Theta = I \cdot N$. Für die magnetischen Widerstände findet man

$$R_L = \frac{l_L}{\mu_0 \cdot A_L} , \qquad R_{\mathrm{Fe}} = \frac{l_{\mathrm{Fe}}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_{\mathrm{Fe}}} .$$

Die Nichtlinearität von R_{Fe} steckt in $\mu_r(H_{\mathrm{Fe}})$. Zur Erinnerung: dem Spannungsabfall an R_{Fe} entspricht $V_{\mathrm{Fe}} = H_{\mathrm{Fe}} \cdot l_{\mathrm{Fe}}$, dem Strom durch R_{Fe} entspricht der Fluss $\Phi = B_{\mathrm{Fe}} \cdot A_{\mathrm{Fe}}$.

Eleganter und in den meisten Fällen numerisch besser ist es, den nichtlinearen Eisenwiderstand durch eine Stromquelle J_{Fe} zu ersetzen, deren Strom ($\equiv \Phi$) von der anliegenden Spannung ($\equiv V_{\mathrm{Fe}}$) entsprechend der Magnetisierungskennlinie abhängt:

$$J_{\mathrm{Fe}} = A_{\mathrm{Fe}} \cdot B_{\mathrm{Fe}}(H_{\mathrm{Fe}}) \qquad \text{mit} \qquad H_{\mathrm{Fe}} = \frac{V_{\mathrm{Fe}}}{l_{\mathrm{Fe}}} .$$

Die Ergebnisse in Abb. 3.15 zeigen, wie sich die magnetischen Spannungsabfälle V_L und V_{Fe} in Abhängigkeit von der Erregung $I \cdot N$ aufteilen unter der Annahme, dass keine Streuung vorhanden ist ($B_L = B_{\mathrm{Fe}}$). Bei ungleichen Querschnitten oder Streuflüssen sind die Flussdichten im Eisen und in Luft unterschiedlich, die strichlierten Ergebnisse wurden für $B_{\mathrm{Fe}} = 1.2\, B_L$ errechnet.

3.1.9 Numerische Feldberechnung

Im Jahre 1862 veröffentlichte Maxwell vier Gleichungen, die die gesamten elektromagnetischen Erscheinungen mathematisch in einheitlicher Form beschreiben. Sie verknüpfen die vier Feldgrößen $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}$ und $\vec{B}$ miteinander. Zur Lösung dieser *Maxwellschen Gleichungen* sind drei weitere Materialgleichungen erforderlich (siehe auch [13, Anhang]). Alle Formeln der Elektrotechnik basieren auf diesen Gleichungen.

Es gibt verschiedene Lösungsansätze, mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen elektromagnetische Felder numerisch zu berechnen. Das weitverbreiteteste Verfahren besteht darin, das Feldproblem zu *diskretisieren*, d. h. das zu untersuchende Feldgebiet in kleine Elementarbereiche zu unterteilen, innerhalb derer die physikalischen Größen als konstant angenommen werden. Zwei Diskretisierungsmethoden sollen hier genannt werden: die *Finiten Elemente (FE)*, bei denen man den Rechenbereich mit einem Dreiecksgitternetz versieht und die *Finiten Differenzen (FD)*, die ein orthogonales Gitternetz verwenden [4] (siehe auch Anhang Numerische Feldberechnung).

Beide Verfahren erlauben es, zwei- und dreidimensionale Strukturen mit (fast) beliebiger Materialverteilung zu untersuchen.

Die numerische Feldberechnung soll am Beispiel des magnetischen Kreises nach Abb. 3.8 demonstriert werden. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, nutzt man möglichst Symmetrien der zu untersuchenden Struktur aus. Im vorliegenden Fall wurde dazu der Luftspalt in die geometrische Mitte des Eisenkerns verlegt[1]. Die Magnetisierungskennlinie wurde berücksichtigt. Abb. 3.16 zeigt die berechnete Feldverteilung. Das rechte Diagramm zeigt den Flussverlauf $|B|$ im Luftspalt ($y = 1$) und im Eisen direkt am Luftspalt ($y = 5.5$).

Hinweis zur Darstellung in Abb. 3.16 rechts: die Flussverteilung im Eisen und in der Luft sind in Wirklichkeit kontinuierlich. Die Feldberechnung liefert aber nur diskrete Werte. Dem wird durch die Darstellung als »Treppenkurve« Rechnung getragen. Eine Interpolation wäre zeichnerisch

[1] Durch diese Maßnahme verändert sich der Durchflutungsbedarf nicht.

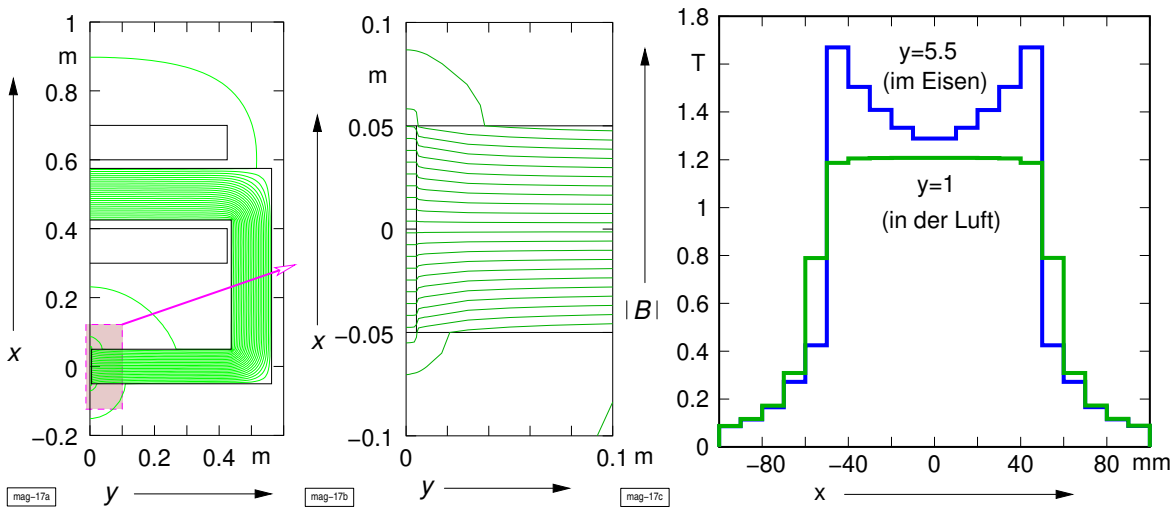


Abb. 3.16: Gesamter Feldverlauf und Luftspaltfeld

möglich, würde aber das Ergebnis verfälschen, da die Art der Interpolation problemabhängig ist.

Das Druckprotokoll der Feldberechnung in Abb. 3.17 zeigt die absoluten Flussdichten $|B|$ am Luftspalt. Die Materialkontour des Eisens verläuft auf den Gitterlinien $y = 0.005$ und $x = \pm 0.05$. Man beachte, dass $|B| = \sqrt{B_n^2 + B_t^2}$ sowohl die normalen als auch tangentialen Anteile der Flussdichte enthält.

Die Ergebnisse zeigen, dass nicht alle Feldlinien den Luftspalt überqueren (Streufelder) und dass das Feld im Luftspalt und in den Ecken des Eisenkerns inhomogen ist.

> Das Ausdrucken von Zahlenkolonnen erscheint im ersten Augenblick veraltet, da interaktive Techniken gezielter und schnellere Übersicht verschaffen können. Feldlinienbilder gehören dazu. Sie geben aber nur den Flussverlauf wieder, aus dem Feldlinienbild lassen sich nicht direkt die Werte der für die Konstruktion viel wichtigeren Flussdichten ablesen.

Bei homogenen Feldern muss die Flussdichte überall die gleiche Richtung und Größe besitzen. Dies ist nur bei »glatten« Konturen möglich, z. B. in der Luftspaltmitte großer Polschuhe, bei denen die Polflächen sehr viel größer sind als der Luftspalt, oder in langen Eisenkernen (Joche, Schenkel, Anker) mit konstantem Querschnittsprofil. In diesem Fall ist eine analytische Berechnung relativ einfach, da $\vec{B}$ und $\vec{A}$ immer in einem konstanten Winkel zueinander stehen, im allg. senkrecht.

An Stellen, an denen sich die Konturen ändern, entstehen inhomogene Felder, der Winkel zwischen $\vec{B}$ und $\vec{A}$ ist ortsabhängig. Eine genaue Berechnung ist analytisch kaum möglich.

Das »Aufweiten« des Luftspaltfeldes verringert die Flussdichte im Luftspalt, da sich der gleiche Fluss auf eine größere Fläche verteilt. Dieser Effekt tritt bei allen rotierenden Maschinen im Luftspalt und an den Nutöffungen auf und wird durch den sog. *Carterschen Faktor* korrigiert. Für die Überhöhungen an den Eisenecken sind die Querkomponenten von $|B|$ verantwortlich, die das Feld seitlich aus dem Eisen drücken. Den gleichen Sachverhalt trifft man im Nut-/Zahnbereich elektrischer Maschinen an (z. B. Zahnentlastung).

X	Y = .00000	.00100	.00200	.00300	.00400	.00500	.00600	.00700
.06000	3.07617E-01	3.05456E-01	3.01020E-01	2.94078E-01	2.84271E-01	2.71107E-01	2.60018E-01	
.05000	7.88772E-01	7.97014E-01	8.13759E-01	8.39526E-01	8.75106E-01	4.24794E-01	3.92055E-01	
.04000	1.18647E+00	1.19028E+00	1.19796E+00	1.20963E+00	1.22549E+00	1.66843E+00	1.63681E+00	
.03000	1.20492E+00	1.20509E+00	1.20540E+00	1.20577E+00	1.20609E+00	1.50329E+00	1.49236E+00	
.02000	1.20644E+00	1.20645E+00	1.20647E+00	1.20650E+00	1.20652E+00	1.40716E+00	1.40143E+00	
.01000	1.20692E+00	1.20692E+00	1.20693E+00	1.20694E+00	1.20695E+00	1.33250E+00	1.33739E+00	
.00000	1.20711E+00	1.20711E+00	1.20712E+00	1.20712E+00	1.20713E+00	1.28774E+00	1.30010E+00	
-.01000	1.20711E+00	1.20711E+00	1.20711E+00	1.20712E+00	1.20713E+00	1.28840E+00	1.30062E+00	
-.02000	1.20691E+00	1.20691E+00	1.20692E+00	1.20693E+00	1.20694E+00	1.33443E+00	1.33901E+00	
-.03000	1.20642E+00	1.20643E+00	1.20645E+00	1.20648E+00	1.20650E+00	1.40862E+00	1.40273E+00	
-.04000	1.20489E+00	1.20506E+00	1.20536E+00	1.20573E+00	1.20606E+00	1.50456E+00	1.49357E+00	
-.05000	1.18628E+00	1.19012E+00	1.19786E+00	1.20963E+00	1.22562E+00	1.67014E+00	1.63845E+00	
-.06000	7.85314E-01	7.93776E-01	8.10951E-01	8.37339E-01	8.73706E-01	4.26902E-01	3.94762E-01	

Abb. 3.17: Verteilung der Flussdichte $|B|$ am Luftspalt (Werte in T)

Mit Hilfe der numerische Feldberechnung lassen sich auch die Kräfte auf ferromagnetische Materialien bestimmen (siehe …auf ferromagnetische Stoffe). Eine Abhandlung über die Methoden zur Kraftberechnung findet man im Anhang Das Drehmoment in elektrischen Maschinen.

Die Feldberechnung liefert jedoch nicht nur elektromagnetische Größen sondern auch Sekundärgrößen wie Gewicht, Oberfläche, Preise, etc. der eingesetzten Materialien. Damit besteht die Möglichkeit, elektromagnetische Geräte nach Zielvorgaben automatisch zu optimieren.

3.1.10 Konstruktive Ausführungen

Referenzen: [14, 15]

Erregerfeld

Gleichstrom- und Synchronmaschinen erzeugen das Erregerfeld mit ausgeprägten Polen. Während man Gleichstrommaschinen immer als Außenpolmaschinen baut, kommen bei den Synchronmaschinen für kleine Leistungen Außen-, für alle größeren Leistungen nur Innenpolmaschinen zur Anwendung. Die beiden grundsätzlichen Anordnungen am Beispiel einer vierpoligen Maschine zeigt Abb. 3.18. Der magnetische Kreis besteht in allen Fällen aus dem Joch (unbewickelter Eisenkern) und den Polen mit Polkern und Polschuh. Der Polkern trägt im allgemeinen die gleichstromgespeiste Erregerwicklung und kann massiv ausgeführt werden. Die Polschuhe blecht man normalerweise, da in ihnen durch die Nutung des Ankers der Fluss *pulsiert* und Wirbelströme verursacht (Zusatzverluste). Die Befestigung am Gehäuse bzw. an der Läuferwelle geschieht am einfachsten durch Schrauben (Abb. 3.19). Bei großen Schenkelpolen reichen diese Befestigungen

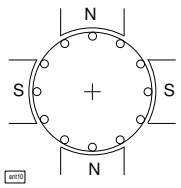
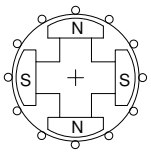


Abb. 3.18



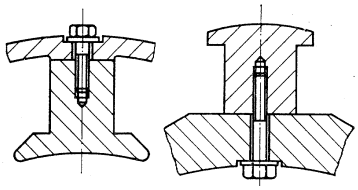


Abb. 3.19

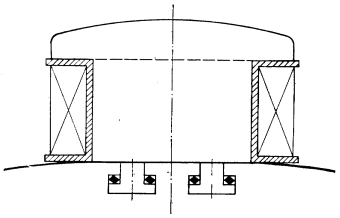


Abb. 3.20

wegen der großen Fliehkräfte nicht mehr aus. Dort verwendet man dann Konstruktionen nach Abb. 3.20 mit Schwalbenschwanz- oder Hammerkopfklauen.

Zur Vermeidung von Wirbelströmen bei zeitlich sich ändernden Erregerfeldern, z. B. bei Wechselstrommaschinen (Universalmotoren), muss der gesamte Erregermagnetkreis aus Blechen gefertigt werden. Abb. 3.21 zeigt das vollständiges Ständerblech für eine zweipolige Gleichstrommaschine in eckiger Ausführung mit Wendepolen. Zur Verringerung des Luftspaltes bringt man die

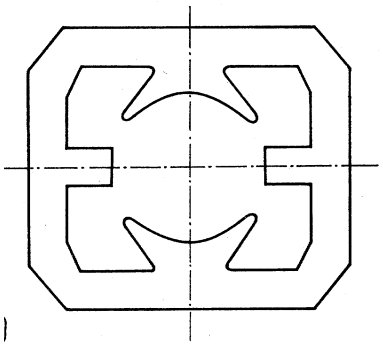


Abb. 3.21

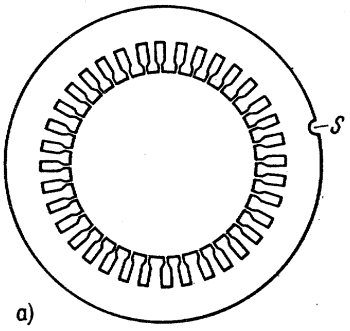


Abb. 3.22

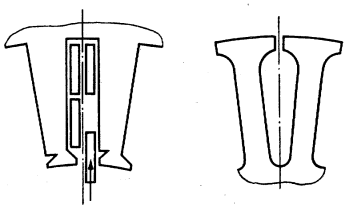


Abb. 3.23

Leiterschleife innerhalb des Läufers oder des Ständers unter – sie wird zu einer *Wicklung*. Dabei erfolgt die Unterbringung der Wicklungen in *Nuten*. Abb. 3.22 zeigt ein solches Ständerblech.

☞ Diese Wicklungen liegen in einem zeitlich sich ändernden Feld, so dass das sie umgebene Eisen immer geblecht sein muss (Haupt- oder Ankerwicklung).

Die Nutenform kann unterschiedlich sein. Einerseits muss die Öffnung so groß sein, dass die Wicklung eingelegt werden kann. Andererseits verursachen zu große Nutöffnungen Luftspaltschwankungen, die sich als Induktionsänderungen äußern und zu zusätzlichen Verlusten führen (*Pulsationsverluste*). Außerdem wirken sie wie eine Vergrößerung des Luftspalts mit den entsprechenden Folgen. Abb. 3.23 zeigt links eine halbgeschlossene Ständernut mit parallelen Nutflanken und unsymmetrischem Nutschlitz, der gerade so groß ist, dass ein Rechteckleiter eingelegt werden kann. Bei der rechten Nutform werden die einzelnen Leiter der Wicklung »eingeträufelt« (*Träufelwicklung*). Zum Schutz der Rotorwicklungen gegen Fliehkräfte werden die Nuten bei größeren Maschinen mit Nutenverschlusskeilen verschlossen. Bei Asynchronmaschinen mit Käfigläufer sind die Nuten ganz geschlossen.

Wicklungen

Die Wicklungen für die Erregerpole werden separat auf einen Wickelkörper aufgebracht und auf den isolierten Polkern geschoben (Abb. 3.20). Bei Ständerblechen mit gestanzten Polen

(Abb. 3.21) muss die Wicklung mit speziellen Wickelmaschinen hergestellt werden.

Die Wicklungen, die die Leiterschleife darstellen, verlaufen bei einer zweipoligen Maschine im Prinzip diametral und bilden eine *Durchmesserwicklung*. Mit zunehmender Polpaarzahl wird aus der Durchmesserwicklung geometrisch gesehen eine gesehnte Wicklung. Im Folgenden werden einige typische Wicklungsanordnungen beschrieben.

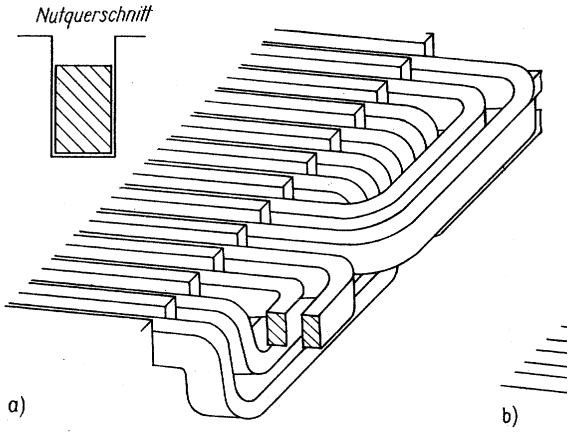


Abb. 3.24: Zweiebenen-Einschichtwicklung

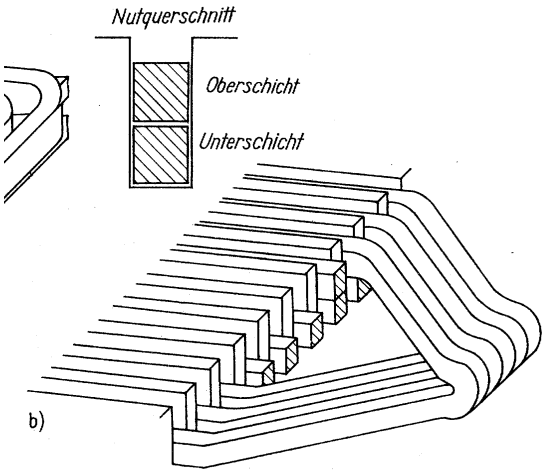


Abb. 3.25: Zweischichtwicklung

Bei der *Einschichtwicklung* liegt eine Spulenseite der Wicklung in einer Nut (Abb. 3.24), bei der *Zweischichtwicklung* dagegen liegen zwei Spulenseiten verschiedener Wicklungen übereinander (Abb. 3.25). Eine Spulenseite einer Wicklung liegt in der Oberschicht, die andere Spulenseite in der Unterschicht.

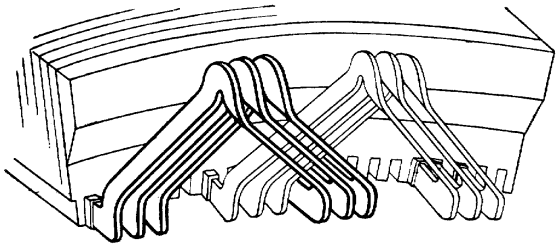


Abb. 3.26: Gesehnte Einschichtwicklung

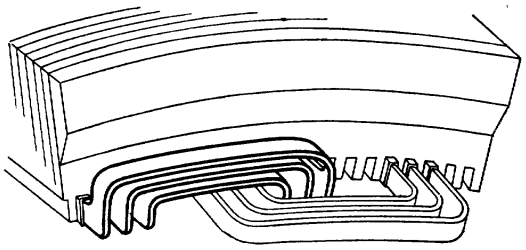


Abb. 3.27: Einschichtwicklung

Man unterscheidet Spulen mit gleicher Weite (Abb. 3.25 und 3.26), die sich kostengünstiger herstellen lassen, oder ungleicher Weite (Abb. 3.24 und 3.27). Letztere besitzen eine gemeinsame Spulenachse. Je nach Wicklungsausführung hat der *Wickelkopf* (der Raum außerhalb des Blechpaketes) unterschiedliches Aussehen. Für größere Ströme bestehen die Wicklungen aus massiven Stäben, Hohleitern (zur Kühlung) oder Kunststäben (»Roebelstäbe«) zur Vermeidung von Wirbelstromverlusten. Eine Besonderheit stellt die *Evolventenwicklung* dar, die vorwiegend bei großen Synchronmaschinen, Turbogeneratoren anzufinden ist. Dabei werden die Stäbe der Ständerwicklung durch den Wickelkopf auf einer räumlichen Evolvente geführt, die die Eigenschaft hat, dass der Abstand zum Nachbarstab im Wickelkopf konstant ist (Abb. 3.94). Diese Konstruktion bewirkt, dass sich die Stromkräfte im Fehlerfall (Kurzschluss) gleichmäßig über

den Wickelkopf verteilen und nicht zu Deformationen der Wickelköpfe führen[2].

3.1.11 Streufelder

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen *Haupt-/Nutzflüssen*, die zur Drehmomentbildung bzw. Spannungsinduktion beitragen, und *Streuflüssen*, die »nutzlos« sind und – falls sie nicht konstant sind – Verluste erzeugen. Bei Maschinen mit ausgeprägten Erregerpolen (Abb. 3.28)

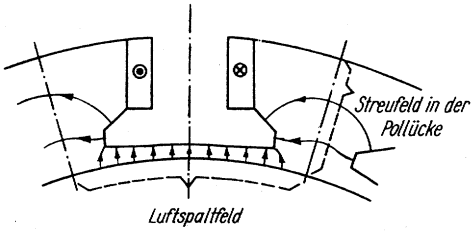


Abb. 3.28: Streufeld bei einem ausgeprägten Erregerpol

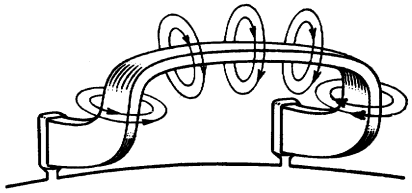


Abb. 3.29: Wickelkopfstreuung

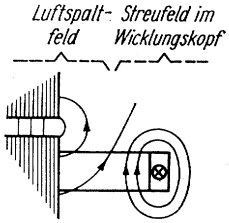


Abb. 3.30: Luftspalt- und Streufeld

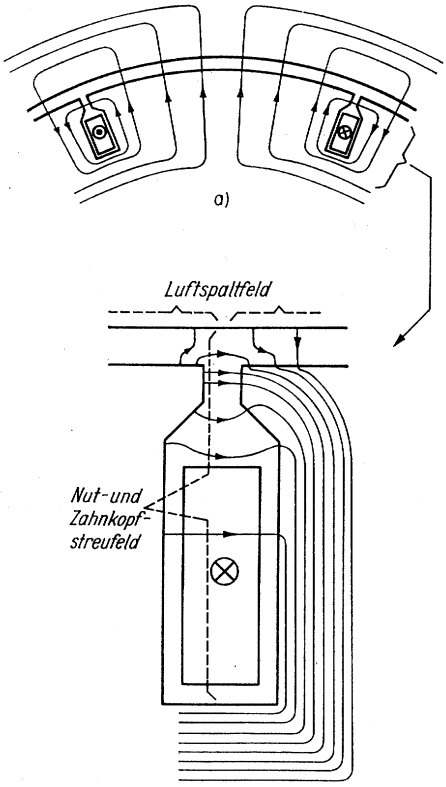


Abb. 3.31: Streufeld im Nut- und Zahnkopfraum

teilt sich das Erregerfeld in das *Luftspaltfeld* (Nutzfluss) und das *Streufeld in der Pollücke* auf. Liegt die Wicklung in Nuten, entstehen Streufelder im Nut- und Zahnkopfbereich (Abb. 3.31). Weiterhin erzeugen die Leiter im Wickelkopf die *Wickelkopf-* oder *Stirnstreuung* (Abb. 3.29 und 3.30).

☞ Jeder durch einen Strom verursachte Magnetfluss lässt sich in einem Ersatzschaltbild (ESB) durch eine Induktivität darstellen.

Während bei gleichbleibendem Fluss (Gleichstromerregung) diese Induktivitäten nur bei dynamischen Vorgängen (z. B. Lastwechsel) in Erscheinung treten, müssen bei allen Wechselstrommaschinen grundsätzlich die Haupt- und Streuflüsse durch *Haupt- und Streuinduktivitäten* berücksichtigt werden.

[2]Die Stromkräfte ändern sich mit dem Quadrat der Abstände.

Der *Hauptfluss* stellt den gemeinsamen Fluss zwischen magnetischen Anordnungen dar. Entsprechend muss im ESB die *Hauptinduktivität* mit einer anderen Hauptinduktivität gekoppelt sein. Unter bestimmten Voraussetzungen kann man diese Hauptinduktivitäten zu einer Induktivität zusammenfassen (siehe Transformator, Asynchronmaschine).

Streuinduktivitäten sind mit keiner anderen Induktivität gekoppelt.

Bildnachweis:

[14]: Abbildungen 3.19, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.28, 3.30, 3.31

[15]: Abbildungen 3.26, 3.27, 3.29

3.2 Gleichstrommaschine – Teil 2

3.2.1 Ankerwicklungen

Eine Gleichstrommaschine entwickelt ein Moment, wenn alle am Ankerumfang verteilten Leiterströme unter einem Pol in eine Richtung und unter dem entgegengesetzten Pol in entgegengesetzter Richtung fließen (Kapitel Aufbau und Wirkungsweise). Für den Gleichstromgenerator entstehen bei einer Drehbewegung in allen Leiterstäben unter einem Pol in eine Richtung weisende Leiterspannungen, unter dem entgegengesetzten Pol zeigen die Leiterspannungen in die entgegengesetzte Richtung (Kapitel Elektromagnetische Induktion). Der Stromwender (Kollek-

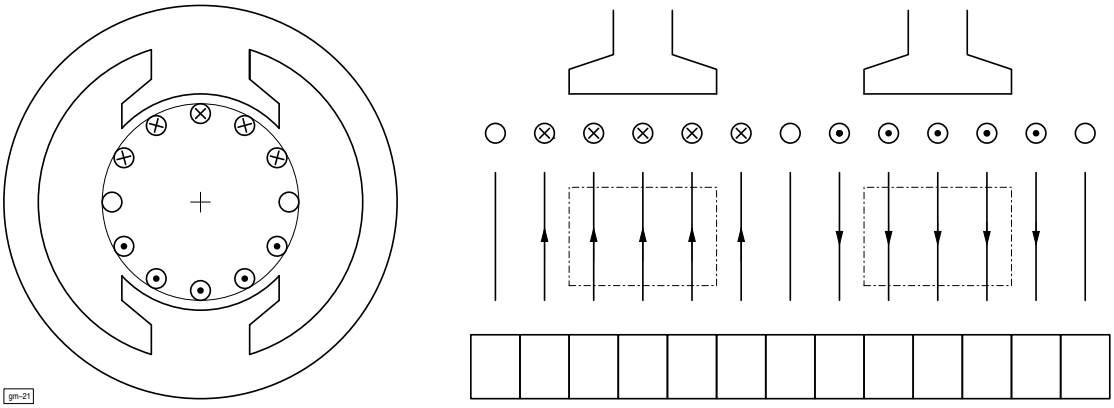


Abb. 3.32: 2-polige Gleichstrommaschine mit abgewickelter Trommelwicklung

tor, Kommutator) stellt die elektrische Verbindung zwischen den feststehenden Bürsten und den rotierenden Leiterstäben her. Als Ankerwicklung bezeichnet man die Verbindung der Leiterstäbe untereinander und mit dem Stromwender so, dass die oben genannten Bedingungen erfüllt werden. Aus Gründen der Übersicht zeichnet man Wicklung, Stromwender und Erregerpole als »Abwicklung« (Abb. 3.32).

Das Gebiet der Gleichstrom-Ankerwicklungen ist sehr umfangreich. Im Folgenden werden nur die Wicklungsausführungen besprochen, die zum grundlegenden Verständnis notwendig sind.

Die heute nicht mehr verwendete *Ringwicklung* von Pacinotti (1868) bestand aus einer Ringspule mit Eisenkern, die wie ein Speichenrad sich zwischen den Erregerpolen drehen konnte. Da der Innenraum der Ringspule fast feldfrei war, trugen die Leiter auf der Innenseite nicht zur Energiewandlung bei. Die schlechte Ausnutzung (es wurde nur eine Stromrichtung ausgenutzt) und die aufwendige Herstellung der Ringwicklung (»Durchfädeln«) schränkten die Verbreitung des Ringankers ein.

Die von Hefner-Alteneck im Jahre 1872 entwickelte und heute noch verwendete *Trommelwicklung* vermeidet diese Nachteile. Hin- und Rückleiter befinden sich jeweils unter entgegengesetzten Erregerpolen (Abb. 3.32). Die Wicklung wird doppelt so gut wie die Ringwicklung ausgenutzt. Bei mittleren bis großen Maschinen verwendet man als Wicklung Stäbe, die vorgefertigt in den Anker eingelegt werden. Kleinere Maschinen erhalten eine Drahtwicklung, die man maschinell »einlegt«.

Die Trommelwicklung muss in sich geschlossen sein. Hin- und Rückleiter bilden eine *Spule*. Der Abstand zwischen Hin- und Rückleiter (*Spulenweite* y_1) muss $\leq \tau_p$ sein. Man unterscheidet zwei Arten:

- Schleifenwicklung und
- Wellenwicklung.

Für die formelmäßige Beschreibung der Wicklungen führt man folgende Größen ein:

p : Polpaarzahl

Q : Nutenzahl

K : Lamellenzahl des Stromwenders

N_s : Windungszahl/Spule

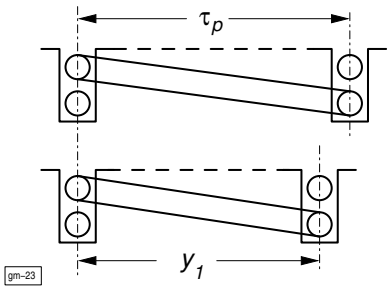


Abb. 3.33: Spulenweite

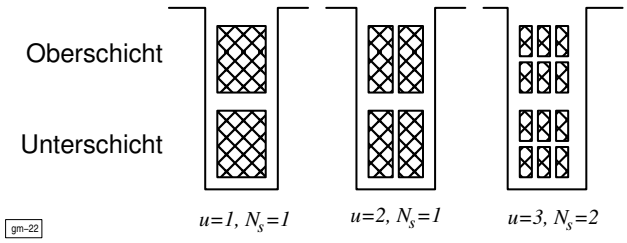


Abb. 3.34: Ankernutquerschnitt

Praktische alle Gleichstrommaschinen erhalten eine *Zweischichtwicklung* indem man den Hinleiter einer Spule und den Rückleiter einer anderen Spule in dieselbe Nut legt (Abb. 3.33). Dadurch ergibt sich, dass die Anzahl der Spulen gleich der Lamellenzahl ist. In den Darstellungen der Ankerwicklungen verwendet man die Lamellenzahl zur Numerierung der Spulen und gibt alle Abstände in *Lamellenschritten* an.

Im allg. wählt man die Nutenzahl Q kleiner als die Lamellenzahl K. Das Verhältnis

$$\boxed{u = \frac{K}{Q}}$$

gibt an, wieviel Spulenseiten einer Schicht in einer Nut liegen (Abb. 3.34). Da in einer Nut sowohl Hin- als auch Rückleiter untergebracht sind und die Spule aus N_s Windungen besteht, liegen insgesamt $2 \cdot u \cdot N_s$ Leiter in einer Nut. Die Gesamtzahl der am Ankerumfang wirkenden Leiterstäbe ergibt sich aus

$$\boxed{z_A = 2 \cdot K \cdot N_s}\,.$$

Die Polteilung τ_p einer $2p$-poligen Maschine beträgt $K/2p$ Lamellen (Abb. 3.32 und 3.33). Ist die Spulenweite $y_1 = K/2p$, erhält man eine *Durchmesserwicklung*, ist $y_1 < K/2p$ liegt eine *gesehnte Wicklung* vor.

$$\boxed{y_1 = \frac{K}{2p} \Longrightarrow \text{Durchmesserwicklung}, \qquad y_1 < \frac{K}{2p} \Longrightarrow \text{Sehnenwicklung}}$$

Wird das Ende einer Spule unmittelbar mit dem Anfang der benachbarten verbunden, spricht man von einer *Schleifenwicklung*(Abb. 3.35). Die gestrichelten Linien deuten die Verbindungen zwischen den Leiterstäben an, wenn eine Spule aus mehr als einer Windung besteht ($N_s > 1$). Der Übersicht wegen wurden nicht alle Spulen und Verbindungen eingezeichnet. Deutlich erkennt

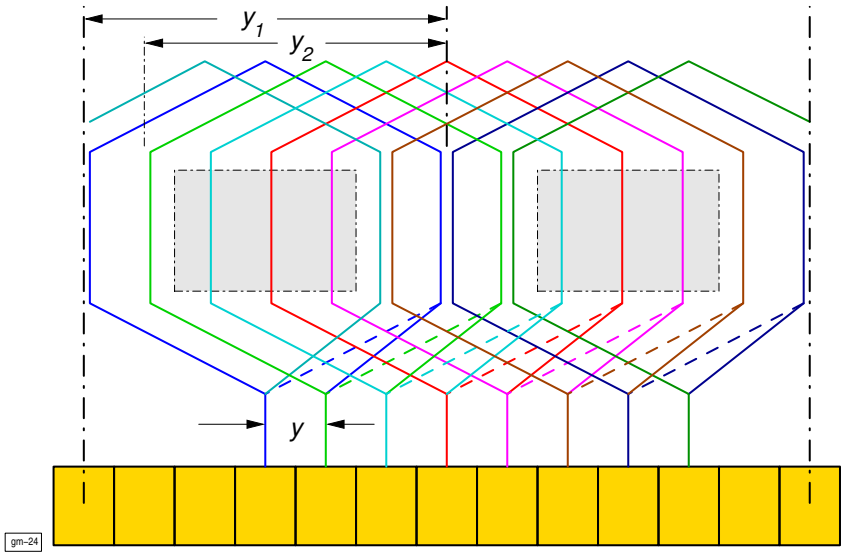


Abb. 3.35: Schleifenwicklung (gestrichelte Verbindungen gelten für $N_s > 1$)

man, dass in jeder Nut zwei Schichten entstehen (in der Abbildung durch dicht nebeneinander gezeichnete Leiter dargestellt). Den Abstand y_2 bezeichnet man als *Schaltschritt*, zusammen mit der Spulenweite y_1 bilden sie den *Kollektor-* oder *Stromwenderschritt* y. Es gilt die Beziehung:

$$\boxed{y = y_1 - y_2 = 1 \qquad \text{(Schleifenwicklung)}} \; .$$

Die Gesamtwindungszahl N zwischen zwei benachbarten Kohlebürsten (das entspricht einer Polteilung) beträgt:

$$N = \frac{K \cdot N_s}{2p} = \frac{z_A}{4p} \qquad \text{(Schleifenwicklung)} \; .$$

Zwischen zwei benachbarten Lamellen liegen N_s Windungen. Schleifenwicklungen haben soviele Bürstenpaare wie Polpaare. An jeder Bürste teilt sich der Ankerstrom in zwei Zweige auf. Da alle gleichnamigen Bürsten parallel geschaltet sind, besteht zwischen dem Leiterstrom I_s und dem Ankerstrom I_A die Beziehung:

$$I_s = \frac{I_A}{2p} \qquad \text{(Schleifenwicklung)} \; .$$

Die Schleifenwicklung verwendet man vorwiegend für Maschinen kleiner Spannung und hoher Strombelastbarkeit. Die Wicklung kann nur ausgeführt werden, wenn das Verhältnis Q/p ganzzahlig ist.

Bei der *Wellenwicklung* werden die Spulen aller Polpaare in Reihe geschaltet, bevor man – um eine Lamelle verkürzt – auf die Ausgangsposition trifft (Abb. 3.36). Für den Stromwenderschritt gilt deshalb

$$\boxed{y = \frac{K-1}{p} = y_1 + y_2 \qquad \text{(Wellenwicklung)}} \; .$$

Die Gesamtwindungszahl ist unabhängig von der Polpaarzahl:

$$N = \frac{K \cdot N_s}{2} = \frac{z_A}{4} \qquad \text{(Wellenwicklung)} \; .$$

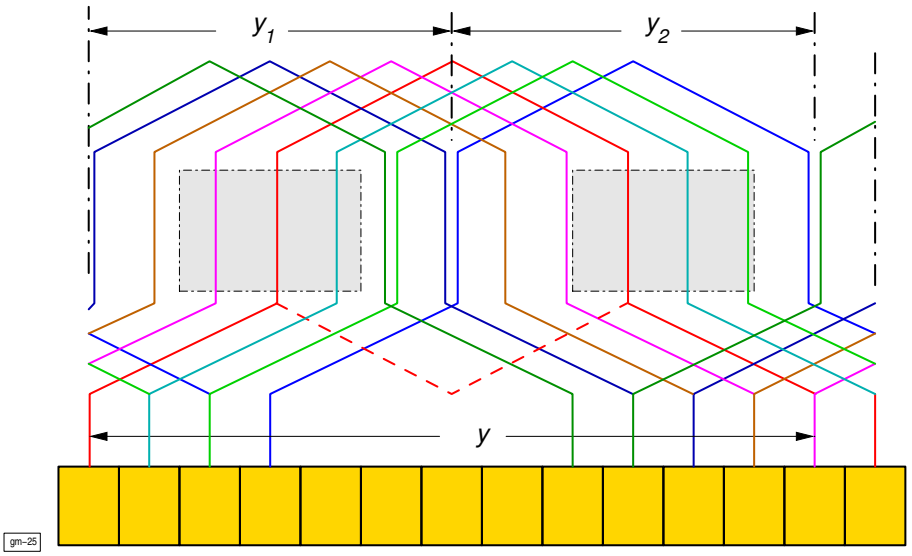


Abb. 3.36: Wellenwicklung (gestrichelte Verbindungen gelten für $N_s > 1$)

Zwischen zwei benachbarten Lamellen liegen $N_s \cdot p$ Windungen. Durch die Reihenschaltung der Spulen aller Polpaare hat die Wellenwicklung nur zwei parallele Ankerzweige, unabhängig von der Polpaarzahl. Damit genügen auch zwei Bürsten. Der Spulenstrom ergibt sich zu

$$I_s = \frac{I_A}{2} \qquad \text{(Wellenwicklung)} \; .$$

Wellenwicklung verwendet man vorzugsweise für Maschinen mit hohen Spannungen und geringen Strömen.

Beide Wicklungsausführungen lassen sich durch die Anzahl a der parallelen Ankerzweige beschreiben: Windungszahl zwischen benachbarten Bürsten

$$\boxed{N = \frac{K \cdot N_s}{2a} = \frac{z_A}{4a}}$$

Leiterstrom

$$\boxed{I_s = \frac{I_A}{2a}}$$

Windungszahl zwischen benachbarten Lamellen

$$\boxed{N_L = N_s \, \frac{p}{a}} \; .$$

Für eine Schleifenwicklung gilt $a = p$, für eine Wellenwicklung $a = 1$.

3.2.2 Magnetische Felder

Für das Drehmoment bzw. für die induzierte Spannung ist in erster Linie das radiale Luftspaltfeld verantwortlich. Es setzt sich aus dem Erregerfeld und dem Ankerfeld zusammen. Durch die Überlagerung beider Felder kommt es zur *Ankerrückwirkung*.

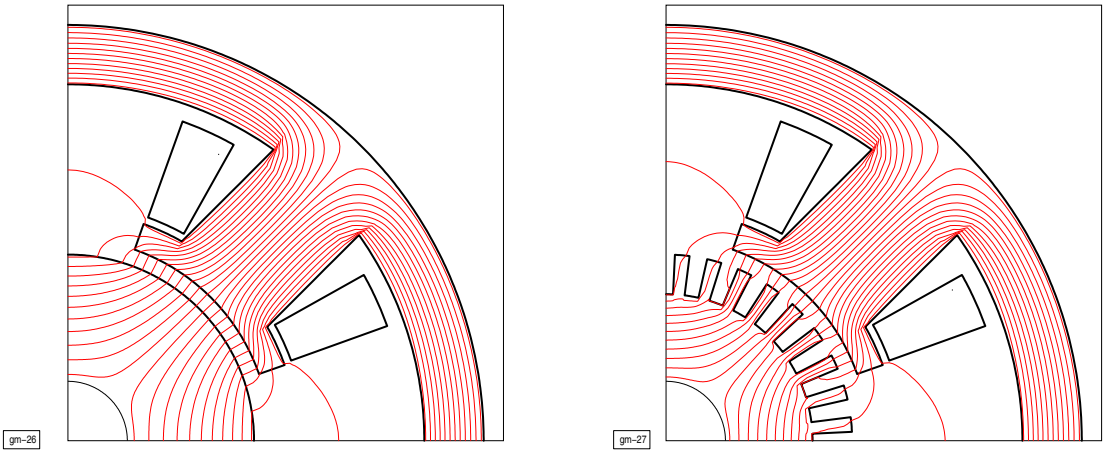


Abb. 3.37: Feldverlauf bei glattem und genutetem Anker

Erregerfeld

Abbildung. 3.37 zeigt die berechneten Flussverläufe einer 4-poligen Gleichstrommaschine im Bereich einer Polteilung bei glattem und genutetem Anker ohne Ankerstrom (*Erregerlängsfeld*). Den Luftspaltfluss erhält man aus dem Integral $\int B(x) \cdot l \cdot \mathrm{d}x$ mit der wirksamen, axialen Ankerlänge l. Ersetzt man die Fläche unter der *Erregerfeldkurve* durch ein flächengleiches Rechteck (Abb. 3.38), ergibt sich für den Gesamtfluss

$$\boxed{\Phi = B_m \cdot \tau_p \cdot l = B_L \cdot \alpha \cdot \tau_p \cdot l}\,. \tag{3.7}$$

Das Verhältnis von mittleren zur maximalen Induktion $\alpha = B_m/B_L$ wird *ideeller Polbedeckungsfaktor* genannt (typische Werte 0.65 – 0.70). Die maximalen Luftspaltinduktionen B_L reichen von 0.5 bis 1 T.

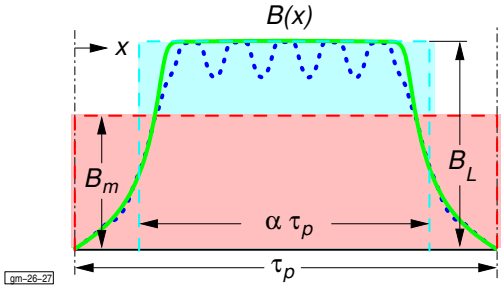


Abb. 3.38: Flussdichte im Luftspalt bei glattem und genutetem Anker

Bedingt durch die Nutung des Ankers schwankt die Luftspaltinduktion (Abb. 3.38 strichlierter Verlauf). Bei gleichem Erregerstrom (= H) fällt die mittlere Luftspaltinduktion B_m geringer aus als bei glatter Ankeroberfläche (nicht eingezeichnet). Die Abweichung ist abhängig von der Luftspaltweite δ, der Nutöffnung und Nutteilung und wird durch den sog. *Carterschen Faktor* k_c korrigiert. Man geht dabei von einer glatten Ankeroberfläche aus, rechnet aber mit dem erweiterten, ideellen Luftspalt $\delta_i = \delta \cdot k_c$ $(1.03 < k_c < 1.3)$.

Die Induktionsschwankungen sind von der Nutenzahl Q und der Drehzahl n bzw. Ω abhängig und pulsieren mit der Frequenz $f = \Omega \cdot Q$ vorwiegend an der Oberfläche der Polschuhe. Zur Verminderung der Wirbelstromverluste blecht man deshalb die Polschuhe.

☞ Das Erregerlängsfeld ist belastungsunabhängig.

Ankerfeld

Betrachtet man die Stromverteilung im Anker nach Abb. 3.32 links, erkennt man, dass die Ankerströme ein eigenes Magnetfeld bilden, welches senkrecht zum Erregerfeld verläuft. Abb. 3.39 zeigt den berechneten Feldverlauf einer Gleichstrommaschine ohne Erregerstrom mit glattem Anker. Dieses *Ankerquerfeld* schließt sich fast vollständig über die Polschuhe. Zur Abschätzung der Luftspaltinduktion ersetzt man die Leiterströme der einzelnen Nuten durch einen equivalenten *Ankerstrombelag* A:

$$\boxed{A = \frac{I_a \cdot z_a}{2a \cdot d_A \cdot \pi}} \qquad \text{mit} \quad d_A = \text{Ankerdurchmesser} .$$

Abb. 3.40 zeigt den Verlauf des Ankerstrombelages $A(x)$ über zwei Polteilungen. Man erkennt, dass der Strom in der Pollücke, der sog. *neutralen Zone*, sein Vorzeichen wechselt.

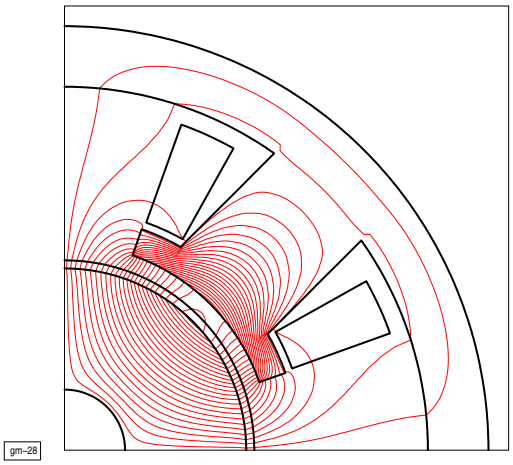


Abb. 3.39: Ankerquerfeld

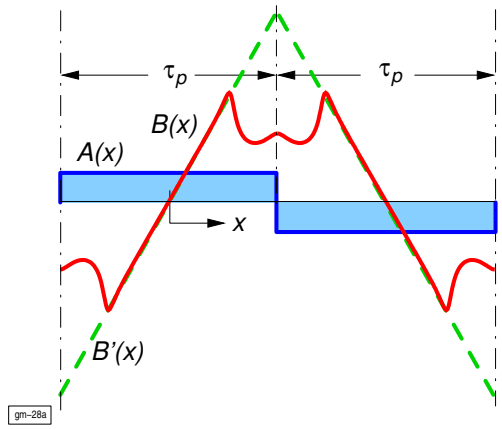


Abb. 3.40: Luftspaltindukion des Ankerquerfeldes

Nach dem Durchflutungssatz gilt:

$$\Theta = \sum_j I_j \approx \sum_i H_i \cdot s_i = \sum_i V_i .$$

Wendet man den Durchflutungssatz auf das Luftspaltfeld an, vernachlässigt die magnetischen Spannungsabfälle V_i im Eisen ($\mu_r = \infty$) und wählt $x = 0$ als Bezugspunkt, ergibt sich mit δ als Luftspaltweite für den halben Feldlinienweg

$$H \cdot \delta = A \cdot x \qquad \text{und daraus} \qquad H = A \, \frac{x}{\delta} .$$

Daraus erhält man die Felderregerkurve des Ankers

$$\boxed{B(x) = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \cdot A(x) \, \frac{x}{\delta}} .$$

Für konstantes δ hätte das Ankerfeld im Prinzip den in Abb. 3.40 strichliert eingezeichneten Verlauf $B'(x)$. Tatsächlich stellt sich der Feldverlauf $B(x)$ ein, da der Luftspalt in der Pollücke sehr groß wird.

☞ Das Ankerquerfeld ist belastungsabhängig.

Ankerrückwirkung

Erregerlängsfeld und Ankerquerfeld treten gleichzeitig auf, wobei sich der Einfluss der Ankerströme erst bei Belastung bemerkbar macht. Lässt man die Sättigung des Eisens außer Acht, kann man beide Felder addieren. Der resultierende Feldverlauf ist asymmetrisch. Als Folge davon verschiebt sich die neutrale Zone. Abhilfe schaffen *Wendepole* und bei größeren Maschinen zusätzlich *Kompensationswicklungen*. Berücksichtigt man die Sättigung, tritt bei hohen Belastungsströmen zusätzlich noch eine Feldschwächung auf (siehe Kapitel Ankerrückwirkung), die man durch die folgende Formel berücksichtigen kann:

$$\Phi(I_A) = \Phi_0 \left[1 - a \left(\frac{I_A}{I_{AN}}\right)^2\right] .$$

Der Faktor a ist von der Bauweise der Maschine abhängig (z. B. $a = 0.05$).

Anhang A.4 enthält die Feldberechnung einer Gleichstrommaschine, bei der diese Effekte untersucht werden.

Induzierte Spannung

Nach dem Induktionsgesetz (Kapitel Elektromagnetische Induktion) wird in einem Leiterstab der Länge l, der sich mit der Geschwindigkeit v durch ein Magnetfeld B_m bewegt, eine Spannung induziert:

$$\begin{aligned} U_i &= 2 \cdot B_m \cdot l \cdot v \\ &= 2 \cdot B_m \cdot l \cdot 2 \cdot \tau_p \cdot p \cdot n \\ &= 4 \cdot B_m \cdot \tau_p \cdot l \cdot p \cdot n \qquad \text{und mit Gleichung (3.7)} \\ &= 4 \cdot \Phi \cdot p \cdot n \end{aligned} \tag{3.8}$$

Zwischen zwei benachbarten Bürsten befinden sich N Windungen. Daraus ergibt sich für die induzierte Ankerspannung (*Quellenspannung*):

$$\boxed{U_q = 4 \cdot N \cdot p \cdot n \cdot \Phi = \frac{z_A}{a}\, p \cdot n \cdot \Phi} .$$

Tatsächlich ist die induzierte Spannung U_i nicht konstant sondern ein Abbild der Feldkurve[3] (Abb. 3.38 rechts). Die Gesamtspannung U_q resultiert aus der geometrischen Summe aller um eine Nutteilung versetzten Leiterspannungen und weist deshalb eine geringe Welligkeit auf, die von der Anzahl der Nuten/Pol abhängt.

Eine wichtige Größe ist die *Lamellen-* oder *Stegspannung*. Sie tritt zwischen zwei benachbarter Lamellen auf. Nimmt man eine gleichmäßige Verteilung der Klemmenspannung U_A über die Kollektorlamellen zwischen zwei benachbarter Bürsten an, ergibt sich für den Mittelwert der Lamellenspannung

$$\boxed{U_s = U_A \frac{2p}{K} = 2 \cdot N_s \frac{p}{a} \cdot B_m \cdot l \cdot v} . \tag{3.9}$$

[3] Das ergibt sich, wenn man in Gleichung (3.8) statt B_m die vom Ort und damit von der Zeit abhängige Induktion $B(x)$ einsetzt.

Die tatsächliche Lamellenspannung richtet sich nach der Feldkurve ($B(x)$ statt B_m in Gleichung (3.9)) und weist je nach Feldverzerrung infolge der Ankerrückwirkung vor allem unter der Polkante bis zu 50 % größere Werte auf als U_s nach Gleichung (3.9).

Für die Betriebssicherheit der Maschine darf diese Spannung nicht zu groß werden, da sonst die Gefahr besteht, dass sich durch Staubablagerung und Kohleabrieb auf dem Kollektor ein Lichtbogen bildet, der sich u. U. zum Rundfeuer ausweiten und zur Zerstörung des Kollektors führen kann. Man lässt im allg. als maximale Lamellenspannung

- 16 V bei Maschinen ohne Wendepol- und Kompensationswicklung
- 20 V bei Maschinen mit Wendepol- und Kompensationswicklung

zu.

3.2.3 Kommutierung

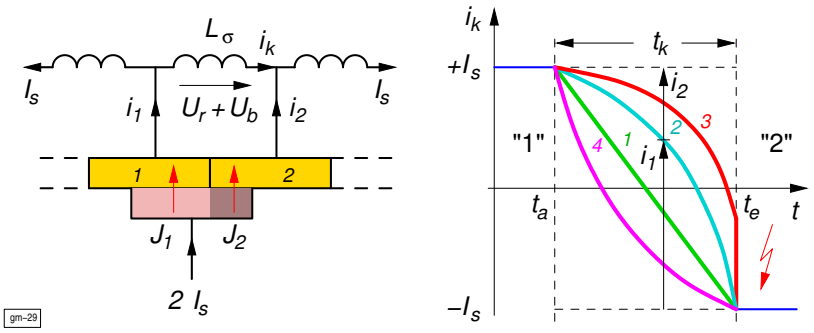


Abb. 3.41: Stomverläufe in einer kurzgeschlossenen Ankerspule

Durchläuft eine Ankerspule die neutrale Zone, muss in ihr die Stromrichtung gewechselt werden, d. h. in dieser Position muss die Kommutierung stattfinden. Abb. 3.41 zeigt ein Ersatzschaltbild der an der Kommutierung beteiligten Ankerspulen. Da der von der Kommutierung erzeugte Fluss nicht mit dem Erregerfeld reagiert, wird die dazugehörige Spule mit L_σ bezeichnet. Zur besseren Anschauung wird für die folgenden Betrachtungen angenommen, dass die Bürstenbreite nicht größer als die Lamellenbreite ist. In der Praxis überdecken die Bürsten im allg. mehrere Lamellen.

Vor Beginn der Kommutierung ($t \le t_a$) steht die Bürste vollständig auf Lamelle 1. Der Bürstenstrom ist eingeprägt und beträgt $2\,I_s$. Er teilt sich auf in die beiden gleichgroßen Spulenströme I_s, die links und rechts wegfließen. Es gilt: $i_1 = 2\,I_s,\ i_2 = 0,\ i_k = I_s$.

Sobald die Bürste Lamelle 2 berührt ($t_a < t < t_e$), ist die dazwischenliegende Ankerspule kurzgeschlossen. Steht die Bürste vollständig auf Lamelle 2 ($t \ge t_e$), gilt: $i_1 = 0,\ i_2 = 2\,I_s,\ i_k = -I_s$. Die für die Stromwendung in der Ankerspule L_σ verfügbare *Stromwende-* oder *Kommutierungszeit* $t_k = t_e - t_a$ ist von der Bürstenbreite und der Drehzahl abhängig.

Vernachlässigt man die Spuleninduktivität L_σ, ändert sich der Spulenstrom i_k linear von $+I_s$ nach $-I_s$ entsprechend Kurve 1 (*Widerstandskommutierung*). Die Stromdichten J_1 und J_2 an den Kontaktflächen zwischen Bürste und Lamellen bleiben konstant, da sich mit den Strömen i_1 und i_2 auch die Stromflächen gleichsinnig ändern.

In der Praxis kann man die Spuleninduktivität nicht vernachlässigen. Durch die Strom- bzw. Flussänderung entsteht die *Stromwende-* oder *Reaktanzspannung* U_r, die ihrer Ursache entgegenwirkt und die Stromänderung verzögert. Außerdem wird in der kurzgeschlossenen Ankerspule durch das Ankerquerfeld B_A (Abb. 3.40) die sog. *Querfeldspannung* U_b induziert, die die gleiche Richtung hat wie die Reaktanzspannung. Den verzögerten Stromverlauf bezeichnet man als *Unterkommutierung* (Kurve 2). Als Folge der Unterkommutierung ist der Strom i_1 gegen Ende der Kommutierung größer als bei der linearen Kommutierung. Dadurch wird die Stromdichte J_1 an der ablaufenden Bürstenkante größer als ihr Mittelwert. Es steigt die Gefahr des *Bürstenfeuers*.

Sind Querfeld- und Reaktanzspannungen zu groß, schafft es der Spulenstrom i_1 nicht, bis zum Ende der Kommutierungszeit Null zu werden (Kurve 3). Durch die mechanische Stromunterbrechung mit Lamelle 1 wird der Strom abgerissen und es entsteht ein Lichtbogen, der auf Dauer zur Zerstörung des Kommutators führt.

Zur Vermeidung der Unterkommutierung muss man versuchen, die Spannungen U_r und U_b zu unterdrücken. Das gelingt mit einem zusätzlichen Feld in den Pollücken, welches das Ankerquerfeld B_A dort aufhebt. Dazu erhält die Maschine in den neutralen Zonen zusätzlich *Wendepole*, deren Wicklungen gegensinnig vom lastabhängigen Ankerstrom durchflossen werden. In der Praxis macht man das Wendepolfeld sogar noch etwas stärker und erreicht damit eine *Überkommutierung* (Kurve 4).

Anhang A.4 behandelt den Einfluss von Wendepolen auf das resultierende Luftspaltfeld.

3.2.4 Kennlinienfeld einer GM

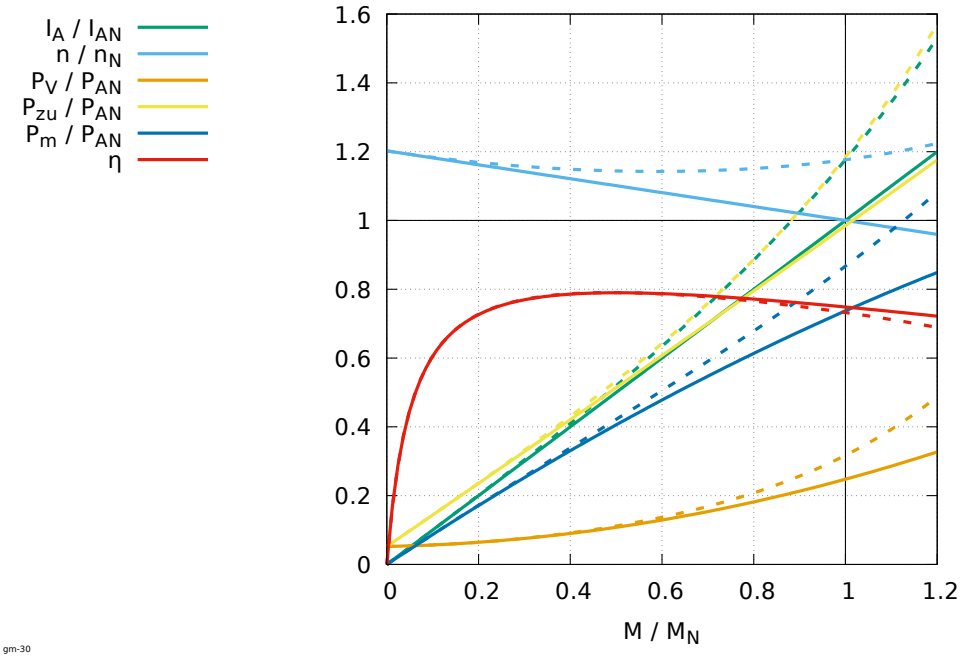


Abb. 3.42: Belastungskennlinien einer fremderregten Gleichstrommaschine (Alle Größen beziehen sich auf ihre Nennwerte. Die strichlierten Kennlinien gelten bei Feldschwächung infolge Ankerrückwirkung. P_{AN} ist die Ankernennleistung $U_{AN}\,I_{AN}$.

Die Belastungskennlinien einer fremderregten Gleichstrommaschine in Abb. 3.42 zeigen die Verluste P_V, den Ankerstrom I_A, auf- und abgegebene Leistung P_{zu} und P_m sowie den Wirkungsgrad η in Abhängigkeit vom Wellenmoment M. Die Größen lassen sich aus den Grundgleichungen für den *stationären Betrieb* (siehe Kapitel Grundgleichungen) herleiten.

Ausgehend von den Nenndaten $P_N, U_{AN}, I_{AN}, n_N, U_{EN}, I_{EN}$ sowie Messungen für $R_A, 2\,U_B$ und P_{Fe} lässt sich folgender Formelplan aufstellen:

$$
\begin{aligned}
M_N &= \frac{60 \cdot P_N}{2\,\pi \cdot n_N} \\
c_1 &= \frac{U_{AN} - I_{AN} \cdot R_A}{n_N} \\
c_2 &= \frac{M_N}{I_{AN}} \qquad (3.10) \\
I_A(M) &= \frac{M}{c_2} \qquad (3.11) \\
P_B(M) &= 2\,U_B \cdot I_A(M) \\
P_{\mathrm{Cu}}(M) &= R_A \cdot (I_A(M))^2 \\
P_E &= U_{EN} \cdot I_{EN} \\
P_V(M) &= P_{\mathrm{Cu}}(M) + P_{\mathrm{Fe}} + P_B(M) + P_E \qquad (3.12) \\
n(M) &= \frac{U_{AN} - R_A \cdot I_A(M)}{c_1} \\
P_m(M) &= \frac{2\,\pi \cdot n(M)}{60} \cdot M \\
P_{\mathrm{zu}}(M) &= P_m(M) + P_V(M) \\
\eta(M) &= \frac{P_m(M)}{P_{\mathrm{zu}}(M)}
\end{aligned}
$$

Will man die Feldschwächung durch die Ankerrückwirkung berücksichtigen, muss man Gleichung (3.11) ersetzen durch

$$
I_A(M) = \frac{M}{c_2 \left[1 - a \left(\frac{M}{M_N}\right)^2\right]} \qquad \text{z. B. mit} \quad a = 0.1\ .
$$

Bei diesem Berechnungsgang wurden die drehzahlabhängigen Reibungsverluste als konstant angenommen und dadurch berücksichtigt, dass man die Konstante c_2 in Gleichung (3.10) aus dem Wellenmoment M_N und nicht aus M_i bestimmt. Vereinfachend werden auch in Gleichung (3.12) drehzahlunabhängige Eisenverluste angenommen, was man bei den geringen Drehzahländerungen hinnehmen kann.

Die Verluste teilen sich in lastabhängige (P_{Cu}, P_B) und lastunabhängige Anteile ($P_{\mathrm{Fe}}, P_E, P_{\mathrm{Rbg}}$) auf. Die abgegebene Leistung P_m ist von der Drehzahl abhängig. Durch die Ankerrückwirkung und der damit verbundenen Feldschwächung kommt es zu einer Drehzahlerhöhung bei Belastung, die zu einem instabilen Betrieb führen kann. Die Maschine erreicht ihren höchsten Wirkungsgrad im Teillastbetrieb.

3.2.5 Dynamisches Verhalten

Soll das dynamische Verhalten der GM untersucht werden (Schalthandlung, Laststoß), müssen alle Energiespeicher des Antriebes berücksichtigt werden. Dazu gehören die Anker- und Erre-

gerinduktivitäten sowie die Massenträgheitsmomente aller rotierenden Teile.

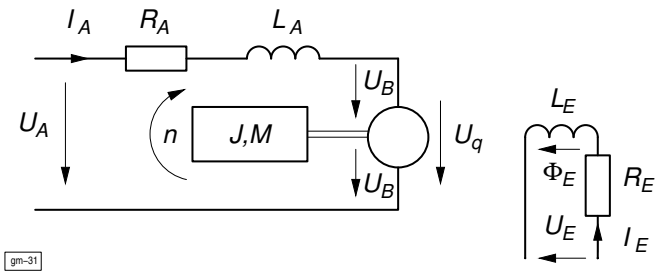


Abb. 3.43: Dynamisches Ersatzschaltbild einer fremderregten Gleichstrommaschine

Entsprechend dem dynamischen Ersatzschaltbild einer fremderregten Gleichstrommaschine (Abb. 3.43) gilt folgendes System von Differentialgleichungen:

$$u_a = u_q + R_A \cdot i_A + L_A \frac{\mathrm{d}i_A}{\mathrm{d}t} + 2\,u_B$$

$$u_e = R_E \cdot i_E + L_E \frac{\mathrm{d}i_E}{\mathrm{d}t}$$

$$M = M_L + J \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \tag{3.13}$$

$$u_q = c_1 \cdot \Phi_E \cdot \Omega$$

$$M = c_2 \cdot \Phi_E \cdot i_A \tag{3.14}$$

$$u_B = f(i_A) \tag{3.15}$$

$$\Phi_E = f(i_E, i_A) \tag{3.16}$$

Errger- und Ankerkreis stehen magnetisch senkrecht aufeinander und sind deshalb nicht induktiv miteinander gekoppelt. Berücksichtigt man die Magnetisierungskennlinie und Ankerrückwirkung nach Gleichung (3.16) sowie die stromabhängige Bürstenübergangsspannung nach Gleichung (3.15) wird dieses Gleichungssystem nichtlinear.

Hinweis: Bei den Momentengleichungen (3.13) und (3.14) wurden die Reibungsmomente nicht berücksichtigt.

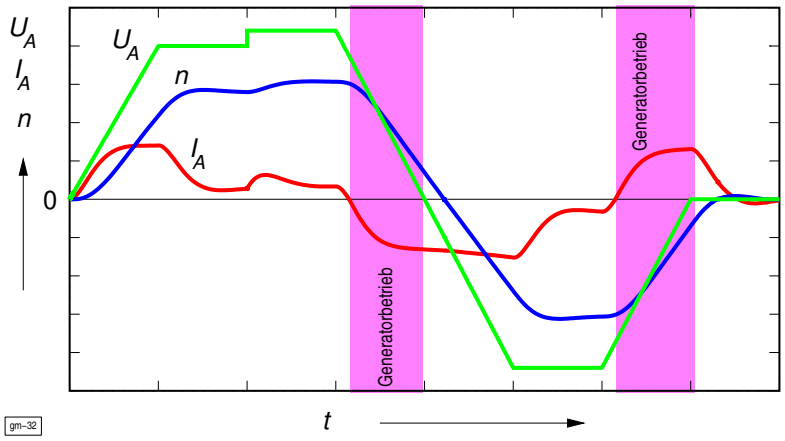


Abb. 3.44: Simuliertes Lastspiel einer fremderregten Gleichstrommaschine

Abb. 3.44 zeigt den zeitlichen Verlauf der Drehzahl und des Ankerstromes in Abhängigkeit von der Ankerspannung. Dort, wo das Produkt $I_A \cdot U_A$ negativ wird, arbeitet der Antrieb generatorisch.

In der Praxis stattet man Gleichstromantriebe mit einer Drehzahl- und Stromregelung aus. Statt das Übertragungsverhalten der Maschine aus dem Ersatzschaltbild nach Abb. 3.43 zu berechnen, fasst man den Antrieb einschließlich Stromversorgung als Regelstrecke auf und beschreibt das System mittels Übertragungsfunktionen (→ *Geregelte Gleichstromantriebe*).

3.3 Transformator – Teil 2

3.3.1 Wicklungssinn

Zur Beurteilung der Polaritäten der Ein- und Ausgangsspannungen ist der Wicklungssinn der Spulen maßgebend (siehe Abb. 3.45). Diesen kennzeichnet man mittels der *Punktregel*: die Klemmen, die mit einem Punkt versehen sind, besitzen die gleiche Polarität. Um die Punkte einem

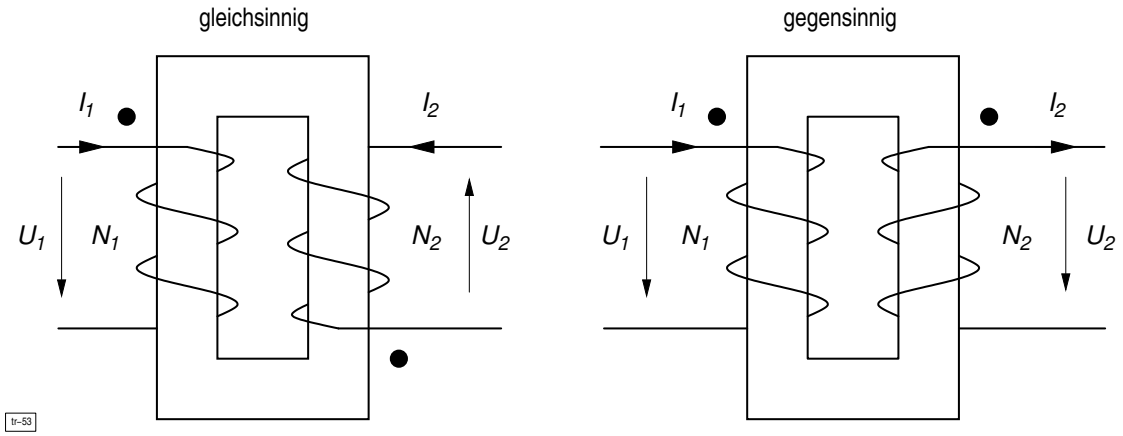


Abb. 3.45: Wicklungssinn

Paar gekoppelter Spulen zuzuordnen, geht man folgendermaßen vor:

- Punkt an die Primärklemme setzen, in die der Strom i_1 hineinfließt;
- Richtung von Φ_{1h} bestimmen (Rechte-Hand-Regel);
- Φ_{2h} fließt nach der Lenzschen Regel entgegengesetzt;
- Richtung von i_2 bestimmen, der Φ_{2h} verursacht;
- Punkt an die Sekundärklemme setzen, an der i_2 herausfließt.

Die Polaritäten der Spannungen ergeben sich aus dem verwendetenen Zählpfeilsystem.

3.3.2 T-Ersatzschaltbild

Allgemein lassen sich für beliebige Windungszahlen N_1 und N_2 die Eigeninduktivitäten L_1 und L_2 aufspalten in

$$L_1 = L_{1h} + L_{1\sigma} \qquad\qquad L_2 = L_{2h} + L_{2\sigma}\ .$$

Damit kann man ein Ersatzschaltbild zeichnen, bei dem nur die Hauptinduktivitäten L_{1h} und L_{2h} ideal miteinander gekoppelt sind, die Streuinduktivitäten $L_{1\sigma}$ und $L_{2\sigma}$ sind überhaupt nicht gekoppelt (Abbildung 3.46).

Für die Berechnung ist es ungünstig, wenn Primärseite und Sekundärseite galvanisch getrennt sind, da man dann die Kopplung zwischen den beiden Hauptinduktivitäten berücksichtigen muss.

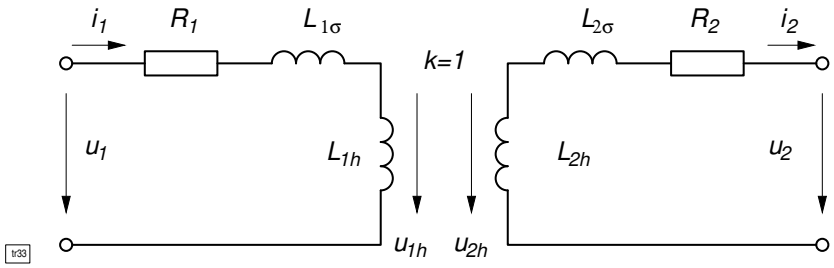


Abb. 3.46: Ersatzschaltbild mit getrennter Primär- und Sekundärseite

Statt dessen bezieht man die sekundäre Hauptinduktivität L_{2h} auf die primäre Hauptinduktivität L_{1h}:

$$L'_{2h} = L_{2h} \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \ddot{u}^2\, L_{2h} \qquad \text{mit} \quad \ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}\,.$$

Praktisch bedeutet dieser Schritt, dass die Sekundärspule jetzt die gleiche Windungszahl hat wie die Primärspule. Mit dieser Umrechnung sind beide Induktivitäten und die Hauptspannungen u_{1h} und u'_{2h} gleich groß und man kann die Induktivitäten L_{1h} und L'_{2h} galvanisch miteinander zur Hauptinduktivität $L_{1h} = L_h$ zusammenfassen (Abbildung 3.47). In diese Umrechnung

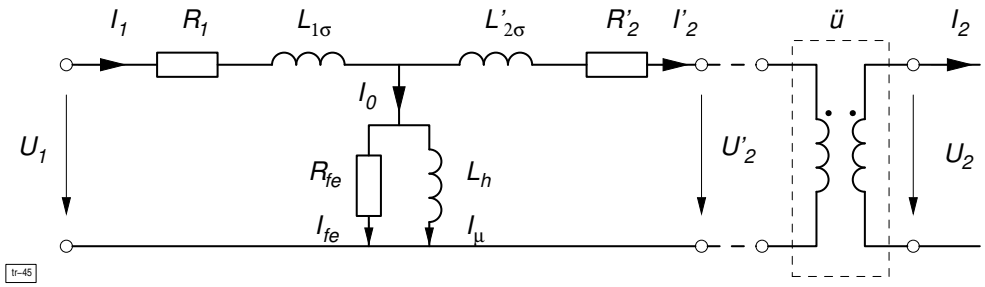


Abb. 3.47: Vollständiges T-Ersatzschaltbild

müssen auch alle sekundären Größen miteinbezogen werden:

$$u'_{2h} = \ddot{u}\, u_{2h} \quad (= u_h) \tag{3.17}$$

$$i'_2 = \frac{1}{\ddot{u}}\, i_2$$

$$R'_2 = \ddot{u}^2\, R_2$$

$$L'_{2\sigma} = \ddot{u}^2\, L_{2\sigma} \tag{3.18}$$

Die mit einem Strich (') gekennzeichneten Größen nennt man *reduzierte* oder *transformierte Größen*.

Die *Eisenverluste* des Transformators werden durch einen ohmschen Widerstand R_{fe} berücksichtigt, der parallel zur Hauptinduktivität geschaltet wird[4].

Das hergeleitete T-Ersatzschaltbild bildet einen verlustbehafteten Transformator nach mit dem Übersetzungsverhältnis 1:1. Um den realen Transformator wieder zu erhalten, wird dem T-Ersatzschaltbild ein idealer Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} : 1$ nachgeschaltet, der die reduzierten Größen gemäß der Gleichungen (3.17) bis (3.18) auf die Originalwerte

[4]Dieser Widerstand ist nicht Teil des Transformators, also reell nicht vorhanden und nicht direkt messbar. Seine Entstehung wird im Abschnitt Magnetisierungsstrom und magnetischer Fluss erläutert.

zurücktransformiert und die galvanische Trennung zwischen Primär- und Sekundärwicklung bewirkt.

☞ Ein Transformator kann von beiden Seiten betrieben werden.

Zur Berechnung im Zeitbereich lässt sich folgendes Gleichungssystem aufstellen (Richtung von i_2' beachten):

$$u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_{1\sigma}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_h\frac{\mathrm{d}i_\mu}{\mathrm{d}t} \tag{3.19}$$

$$u_2'(t) = -R_2' i_2'(t) - L_{2\sigma}'\frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t} + L_h\frac{\mathrm{d}i_\mu}{\mathrm{d}\,t}$$

$$i_0(t) = i_1(t) - i_2'(t) = i_\mu(t) + i_{fe}(t)\ . \tag{3.20}$$

Man bezeichnet i_0 als *Leerlaufstrom* und i_μ als *Magnetisierungsstrom.*

Nach dem Durchflutungsgesetz gilt für die magnetsiche Feldstärke H längs einer beliebigen Feldlinie der Länge l im Eisenkern:

$$\oint_C H\,\mathrm{d}\,l = N_1\cdot i_1 - N_2\cdot i_2 = N_1\cdot i_\mu = \Theta\ . \tag{3.21}$$

Das Minuszeichen in Gleichung (3.21) stammt aus der Lenzschen Regel. Die durch den Strom i_2 hervorgerufene Flussänderung wird durch einen entgegengetzten Strom i_1 (entsprechend der eingezeichneten Stromrichtung und des Wickelsinns) kompensiert, damit das Durchflutungsgesetz gewahrt bleibt.

Den Ausdruck $\oint H\,\mathrm{d}\,l$ in Gleichung (3.21) bezeichnet man auch als *magnetische Spannung* Θ. Sie ist die »treibende Kraft« für den magnetischen Fluss analog zur Spannung in einem elektrischen Stromkreis. Je kleiner der *magnetische Widerstand* des Eisenkerns wird ($\mu \to \infty$), desto geringer wird Θ ($\Theta \to 0$). Man erhält einen idealen Transformator, für den gilt:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\ddot{u}}\ .$$

Der immer vorhandene magnetische Widerstand macht es erforderlich, dass eine magnetische Erregung vorhanden sein muss, um diesen Widerstand zu überwinden. Diese notwendige Erregung bezeichnet man als Magnetisierungsstrom I_μ. Die Höhe des Magnetisierungsstromes ist ein Maßstab für die Qualität des Eisens (μ_r) und des magnetischen Kreises (Luftspalte).

Im allgemeinen wird der Transformator mit sinusförmiger Spannung betrieben. Die Gleichungen (3.19) bis (3.20) lauten dann im Frequenzbereich:

$$\underline{U}_1 = R_1\,\underline{I}_1 + \mathrm{j}\,X_{1\sigma}\,\underline{I}_1 + \mathrm{j}\,X_h\,\underline{I}_\mu$$

$$\underline{U}_2' = -R_2'\,\underline{I}_2' - \mathrm{j}\,X_{2\sigma}'\,\underline{I}_2' + \mathrm{j}\,X_h\,\underline{I}_\mu$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2' = \underline{I}_\mu + \underline{I}_{fe}\ .$$

3.3.3 Gegeninduktivitäten

Für zwei Spulen, die miteinander induktiv gekoppelt sind (siehe Funktionsprinzip) lässt sich das folgende Gleichungssystem aufstellen:

$$\Phi_1 = \Phi_{1h} + \Phi_{1\sigma} - \Phi_{2h} = (L_{1h} + L_{1\sigma})\,i_1 - L_{2h}\,i_2 \tag{3.22}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{2h} + \Phi_{2\sigma} - \Phi_{1h} = (L_{2h} + L_{2\sigma})\,i_2 - L_{1h}\,i_1\ . \tag{3.23}$$

Ist i_2 eingeprägt (technisch nicht sinnvoll), kann der Gesamtfluss dadurch entweder vergrößert (gleichsinnige Kopplung: $\Phi_{1h} + \Phi_{2h}$) oder verkleinert werden (gegensinnige Kopplung: $\Phi_{1h} - \Phi_{2h}$).

Beim Transformator ergibt sich die Richtung von i_2 *automatisch* durch die angeschlossene Belastung. Nach dem Induktionsgesetz und der Lenzschen Regel wird in der Sekundärspule eine Spannung induziert, die einen Strom verursacht, der so gerichtet ist, dass er seiner Ursache entgegenwirkt, d. h. den Fluss schwächt ($\Phi_{1h} - \Phi_{2h}$).

Mit den *Selbstinduktivitäten*

$$L_1 = L_{1h} + L_{1\sigma} \qquad\qquad L_2 = L_{2h} + L_{2\sigma}$$

sowie den *Gegeninduktivitäten*

$$M_{12} = L_{2h} \qquad\qquad M_{21} = L_{1h}$$

lassen sich die Gleichungen (3.22) und (3.23) umschreiben:

$$\Phi_1 = L_1\, i_1 - M_{12}\, i_2 \qquad\qquad \Phi_2 = L_2\, i_2 - M_{21}\, i_1 \ .$$

Bei konstanter Permeabilität μ gilt $M_{12} = M_{21} = M$.

Für einen Transformator nach Abb. 3.45 erhält man mit den Wicklungsverlusten die Spannungsgleichungen

$$\begin{aligned} u_1 &= i_1 \cdot R_1 + \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = i_1 \cdot R_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= -i_2 \cdot R_2 - \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -i_2 \cdot R_2 - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \ , \end{aligned}$$

das dazugehörige Ersatzschaltbild zeigt Abbildung 3.48.

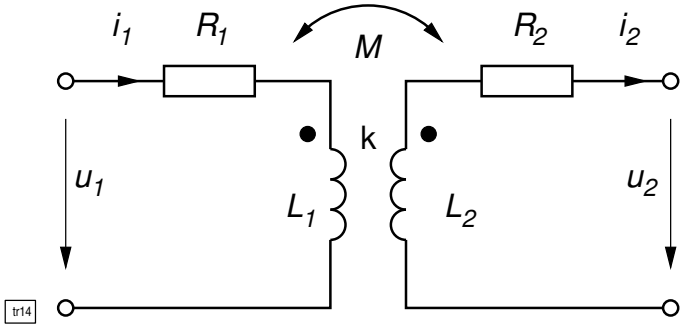


Abb. 3.48: Ersatzschaltbild mit Gegeninduktivitäten

Statt der Aufteilung der Flüsse in Haupt- und Streuflüsse, führt man einen *Kopplungskoeffizienten* k ein, der das Verhältnis von Haupt- zum Gesamtfluss angibt:

$$k_1 = \frac{\Phi_{1h}}{\Phi_1} \qquad k_2 = \frac{\Phi_{2h}}{\Phi_2} \qquad k = \sqrt{k_1\, k_2} \qquad \text{mit } 0 \le k \le 1 \ .$$

Es lässt sich zeigen, dass für die Gegeninduktivität M gilt:

$$M = k \sqrt{L_1\, L_2} \ .$$

Man kann die Streuflüsse auch als Teile der Hauptflüsse durch die sogenannte *Streuziffer* σ ausdrücken:

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_{1\sigma}}{\Phi_1} \qquad \sigma_2 = \frac{\Phi_{2\sigma}}{\Phi_2} \qquad \sigma \approx \sigma_1 + \sigma_2 \qquad \text{mit } 0 \le \sigma \le 1 \,.$$

Zwischen k und σ besteht der Zusammenhang

$$k_1 = 1 - \sigma_1 \qquad\qquad k_2 = 1 - \sigma_2 \,,$$

wegen $k = \sqrt{k_1\, k_2}$ folgt

$$k^2 = 1 - \sigma \,.$$

☞ Für Leistungstransformatoren wird $k \to 1$ bzw. $\sigma \to 0$ angestrebt.

3.3.4 Vergleich Gegeninduktivitäten und T-Ersatzschaltbild

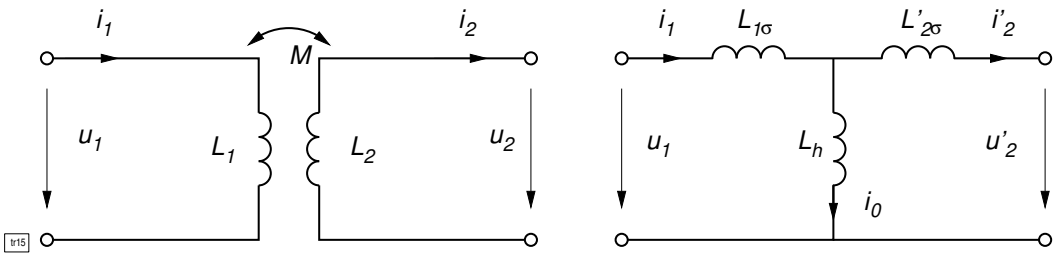


Abb. 3.49: Vergleich T-Ersatzschaltbild und Gegeninduktivitäten

Für die Schaltung mit gekoppelten Induktivitäten ohne Wicklungsverluste gilt (Abb. 3.49 links):

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{3.24}$$

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \,. \tag{3.25}$$

Die zwei Maschenumläufe beim T-Ersatzschaltbild (Abb. 3.49 rechts) ergeben

$$u_1 = L_{1\sigma}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_h\frac{\mathrm{d}i_0}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2' = -L_{2\sigma}'\frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t} + L_h\frac{\mathrm{d}i_0}{\mathrm{d}t} \,.$$

Für das T-Ersatzschaltbild gilt $i_0 = i_1 - i_2'$ und man erhält

$$u_1 = L_{1\sigma}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_h\left(\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t}\right) = (L_{1\sigma} + L_h)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_h\frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2' = -L_{2\sigma}'\frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t} + L_h\left(\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t}\right) = L_h\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - (L_{2\sigma}' + L_h)\frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t} \,.$$

Berücksichtigt man die Übersetzungsverhältnisse beim T-Ersatzschaltbild (siehe Ersatzschaltbild des realen Transformators)

$$L_{\ldots}' = \frac{L_{\ldots}}{\ddot{u}^2} \qquad\qquad u_{\ldots}' = \frac{u_{\ldots}}{\ddot{u}} \qquad\qquad i_{\ldots}' = \ddot{u}\; i_{\ldots}$$

lassen sich die beiden letzten Gleichungen durch reale Größen ausdrücken:

$$u_1 = (L_{1\sigma} + L_h)\,\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - \ddot{u}\; L_h\;\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \ddot{u}\; L_h\;\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - (L_{2\sigma} + \ddot{u}^2\; L_h)\,\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\;.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit den Gleichungen (3.24) und (3.25) findet man schließlich

$$\begin{aligned} L_h &= \frac{M}{\ddot{u}} \\ L_{1\sigma} &= L_1 - \frac{M}{\ddot{u}} \\ L_{2\sigma} &= L_2 - \ddot{u}\; M \end{aligned} \tag{3.26}$$

bzw.

$$\begin{aligned} M &= \ddot{u}\; L_h \\ L_1 &= L_{1\sigma} + \frac{M}{\ddot{u}} \quad\Longrightarrow\quad L_{1h} = \frac{M}{\ddot{u}} \\ L_2 &= L_{2\sigma} + \ddot{u}\; M \quad\Longrightarrow\quad L_{2h} = \ddot{u}\; M\,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Das T-Ersatzschaltbild reduziert die Schaltung aus gekoppelten Induktivitäten zu einer Schaltung aus ungekoppelten Spulen. Beide Schaltungen verhalten sich gleich, wenn die Schaltungsparameter beider Schaltungen die Gleichungen (3.26) und (3.27) erfüllen.

3.3.5 Differentialgleichungssystem

Aus dem im vorigen Abschnitt entwickelten Modell ergibt sich für jede Seite des Transformators

$$u_1 = i_1 R_1 + \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} \tag{3.28}$$
$$u_2 = i_2 R_2 + \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\;. \tag{3.29}$$

Im allgemeinen sind die einspeisenden Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ vorgegeben und es werden die zeitlichen Verläufe der Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ gesucht. Es ist daher zweckmäßig, zur Lösung der Gleichungen (3.28) und (3.29) die Flüsse Φ_1 und Φ_2 als Systemvariablen einzuführen und die Ströme i_1 und i_2 zu eliminieren:

$$\Phi_1 = \Phi_{1h} + \Phi_{1\sigma} - \Phi_{2h} = (L_{1h} + L_{1\sigma})\; i_1 - L_{2h}\; i_2$$

$$L_{2h} i_2 = i_1 (L_{1h} + L_{1\sigma}) - \Phi_1$$
$$i_2 = \frac{i_1 (L_{1h} + L_{1\sigma}) - \Phi_1}{L_{2h}}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \Phi_{2h} + \Phi_{2\sigma} - \Phi_{1h} = (L_{2h} + L_{2\sigma})\; i_2 - L_{1h}\; i_1 \\ &= \frac{(L_{2h} + L_{2\sigma})\Big[i_1 (L_{1h} + L_{1\sigma}) - \Phi_1\Big]}{L_{2h}} - L_{1h} i_1 \end{aligned}$$

$$\Phi_2 L_{2h} = i_1(L_{1h} + L_{1\sigma})(L_{2h} + L_{2\sigma}) - \Phi_1(L_{2h} + L_{2\sigma}) - L_{1h}L_{2h}i_1$$
$$\Phi_2 L_{2h} + \Phi_1(L_{2h} + L_{2\sigma}) = i_1(L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma})$$

$$i_1 = \frac{\Phi_2 L_{2h} + \Phi_1(L_{2h} + L_{2\sigma})}{L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma}} \tag{3.30}$$
$$i_2 = \frac{\Phi_1 L_{1h} + \Phi_2(L_{1h} + L_{1\sigma})}{L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma}} \,. \tag{3.31}$$

Eingesetzt in die Gleichungen (3.28) und (3.29) erhält man schließlich das Dgl-System in der Form $\dot{\Phi} = f(\Phi, u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} &= u_1 - R_1 \frac{\Phi_2 L_{2h} + \Phi_1(L_{2h} + L_{2\sigma})}{L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma}} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} &= u_2 - R_2 \frac{\Phi_1 L_{1h} + \Phi_2(L_{1h} + L_{1\sigma})}{L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma}} \,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dieses System beschreibt die Flüsse in Abhängigkeit der einspeisenden Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$. Mit den Lösungen Φ_1 und Φ_2 lassen sich dann mit Hilfe der Gleichungen (3.30) und (3.31) die Ströme berechnen.

Das Dgl-System gilt für jeden zeitlichen Verlauf von u_1 bzw. u_2. Es bietet sich besonders an, wenn die Spannungen nicht sinusförmig sind. Weiterhin lassen sich recht einfach die Sättigungserscheinungen im Eisen berücksichtigen, in dem man z. B. nichtlineare Induktivitäten $L = f(I)$ in die Dgl. einsetzt.

Ist die Sekundärseite des Transformators mit einer passiven Last (statt $u_2(t)$) belastet — das ist der Normalfall — vereinfacht sich Gleichung (3.29) zu

$$0 = i_2 \, (R_2 + Z_{\mathrm{Last}}) + \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} \,.$$

In Gleichung (3.32) fällt der Term u_2 weg und der Widerstand R_2 muss durch den Gesamtwiderstand der Sekundärseite $R_2 + Z_{\mathrm{Last}}$ ersetzt werden.

Anhang Simulation der Transformatorersatzschaltungen enthält Ergebnisse numerischer Simulationen für die verschiedenen Transformatormodelle.

3.3.6 Zeigerdiagramm

Voraussetzung: sinusförmige Wechselgrößen!

Fluss und Spannung

Bei einer idealen Induktivität eilt der Strom der Spannung um den Winkel $\pi/2$ hinterher. Da der Strom proportional zum Fluss ist, stehen die Zeiger der Spannung und des Flusses rechtwinklig aufeinander[5]. Beim Transformator trifft das auf den Magnetisierungsstrom I_μ und der Hauptspannung U_h zu (Abb. 3.50).

[5] Der rechte Winkel zwischen U und Φ ergibt sich auch aus dem Induktionsgesetz $u_i = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Differentiation nach der Zeit bedeutet Drehung um +90°.

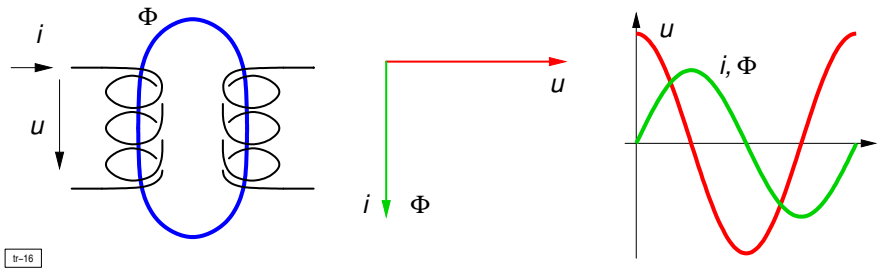


Abb. 3.50: Zeigerdiagramm von Fluss und Spannung

Vollständiges Zeigerdiagramm

Das vollständigen Zeigerdiagramm enthält alle Spannungsabfälle des T-Ersatzschaltbildes.

Leerlauf

Das Zeigerdiagramm nach Abbildung 3.51 ergibt sich aus den Daten des Leerlaufversuches.

1. Ausgangsposition: $U_{10}, I_{10}, \varphi_0$
2. wegen $U_{10} = I_{10}(R_1 + \mathrm{j}\, X_{\sigma 1}) + U_h \Longrightarrow I_{10}R_1 \parallel I_{10}$
3. $\mathrm{j}\, I_{10}X_{\sigma 1} \perp I_{10}R_1$
4. U_h
5. $I_\mu \perp U_h$
6. $I_{fe} \parallel U_h$

Lastfall

Aus den Lastdaten U_2', I_2' und $\cos\varphi_2$, dem Leerlaufstrom I_0 und den ESB Parametern lassen sich U_1, I_1, U_h und $\cos\varphi_1$ konstruieren (Abb. 3.52).

1. Ausgangsposition: U_2', I_2', φ_2
2. $I_2'R_2' \parallel I_2'$
3. $\mathrm{j}\, I_2'X_{\sigma 2}' \perp I_2'$
4. $U_h = U_2' + I_2'(R_2' + \mathrm{j}\, X_{\sigma 2}')$
5. $I_\mu \perp U_h$
6. $I_{fe} \parallel U_h$
7. $I_0 = I_\mu + I_{fe}$
8. $I_1 = I_0 + I_2'$
9. $I_1R_1 \parallel I_1$
10. $\mathrm{j}\, I_1X_{\sigma 1} \perp I_1$
11. $U_1 = U_h + I_1(R_1 + \mathrm{j}\, X_{\sigma 1})$
12. $\varphi_1 = \angle(U_1, I_1)$

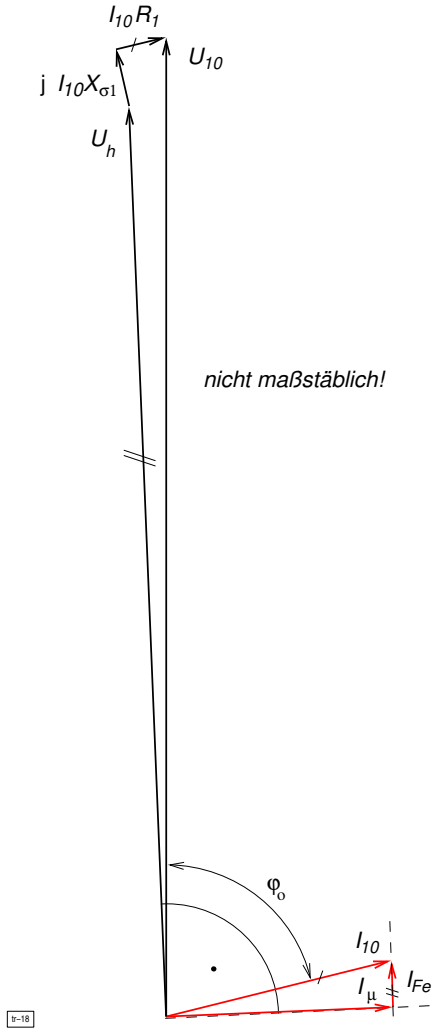


Abb. 3.51: Zeigerdiagramm im Leerlauf

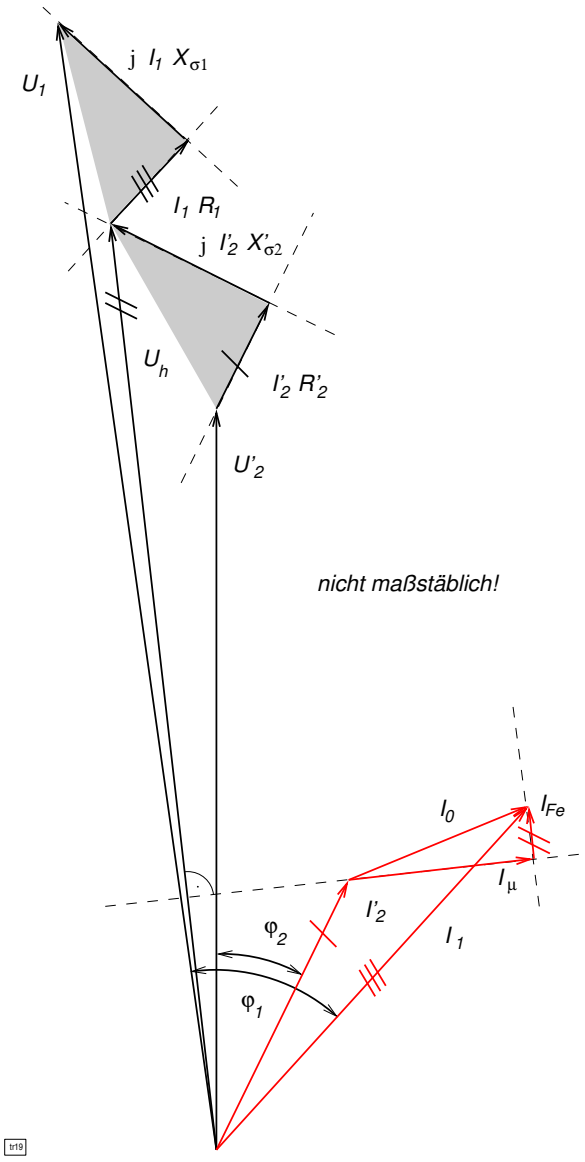


Abb. 3.52: ...und im Lastfall

Die von $\mathrm{j}\,I_1X_{1\sigma} \perp I_1R_1$ und $\mathrm{j}\,I_2'X_{2\sigma}' \perp I_2'R_2'$ gebildeten Dreiecke sind etwa gleichgroß. Wegen des zusätzlichen Leerlaufstromes und der Streureaktanzen ist $\cos\varphi_1 < \cos\varphi_2$. Die Konstruktion des Zeigerdiagramms verläuft von $U_2', I_2', \cos\varphi_2 \rightarrow U_1, I_1, \cos\varphi_1$. Der umgekehrte Weg ist etwas komplizierter und wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

Vereinfachtes Zeigerdiagramm

Da der Leerlaufstrom fast lastunabhängig und sein Einfluss bei wachsender Belastung gering ist, führt seine Vernachlässigung zu nur geringen Fehlern und es gilt $\underline{I}_2' = \underline{I}_1$. Die Spannungsabfälle an $R_1, X_{\sigma 1}, R_2'$ und $X_{\sigma 2}'$ können vektoriell zusammengefasst werden. Daraus ergeben sich das vereinfachte Ersatzschaltbild und das Zeigerdiagramm mit der Längsimpedanz $R + \mathrm{j}\,X$ nach Abb. 3.53.

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 R + \mathrm{j}\,I_1 X + \underline{U}_2'$$

Den Unterschied zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2'$ bildet die Hypotenuse $\Delta\underline{U}$ eines rechtwinkligen Dreiecks

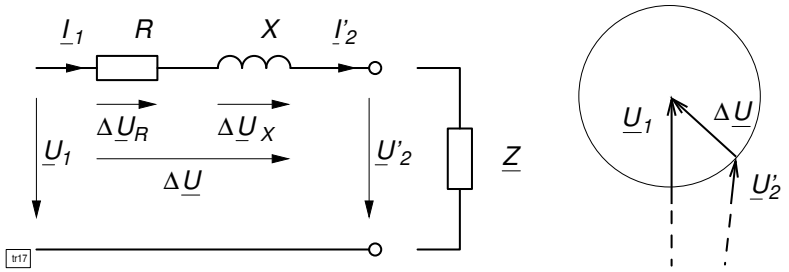


Abb. 3.53: Vereinfachtes Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm

(*Kappsches Dreieck*), dessen Katheten von den Spannungsabfällen $\Delta\underline{U}_R$ und $\Delta\underline{U}_X$ gebildet werden. Das *Seitenverhältnis* des Dreiecks wird durch die aus dem Kurzschlussversuch ermittelten Längsimpedanz gebildet:

$$\boxed{\tan\varphi_k = \frac{X}{R}}\,.$$

Die *Größe* des Dreiecks ist proportional zum Laststrom $\underline{I}_2'(=\underline{I}_1)$. Die *Lage* des Dreiecks wird durch die Art des Verbrauchers ($\cos\varphi_2$) bestimmt.

$$\Delta\underline{U} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2' = \Delta\underline{U}_R + \Delta\underline{U}_X$$
$$\Delta U = I\sqrt{R^2 + X^2} \qquad (= U_{1k} \text{ bei } I = I_{1N})\,.$$

Je nach Lage von $\underline{I}_2'$ beschreibt $\Delta\underline{U}$ einen Kreis um die Spitze von $\underline{U}_1$ mit dem Radius ΔU.

Die Konstruktion des Zeigerdiagrammes bei Vorgabe von $U_1, I_2', \varphi_2, \Delta U_R$ und ΔU_X zur Bestimmung von U_2' erweist sich als etwas schwierig (Abb. 3.54):

Bezugslage (0°) sei die vertikale Achse, die mit I_2' den Winkel φ_2 bildet. Um den Fußpunkt von I_2' auf der Vertikalen wird ein Kreisbogen mit dem Radius von U_1 geschlagen. Das Kappsche Dreieck wird so gezeichnet, dass die Kathete ΔU_R die gleiche Richtung hat wie I_2'. ΔU ergibt sich aus der Lage der Hypotenuse des Kappschen Dreiecks. U_2' erhält man dadurch, dass ΔU entlang der vertikalen Achse parallel verschoben wird, bis die Spitze von ΔU auf dem Kreisbogen von U_1 liegt.

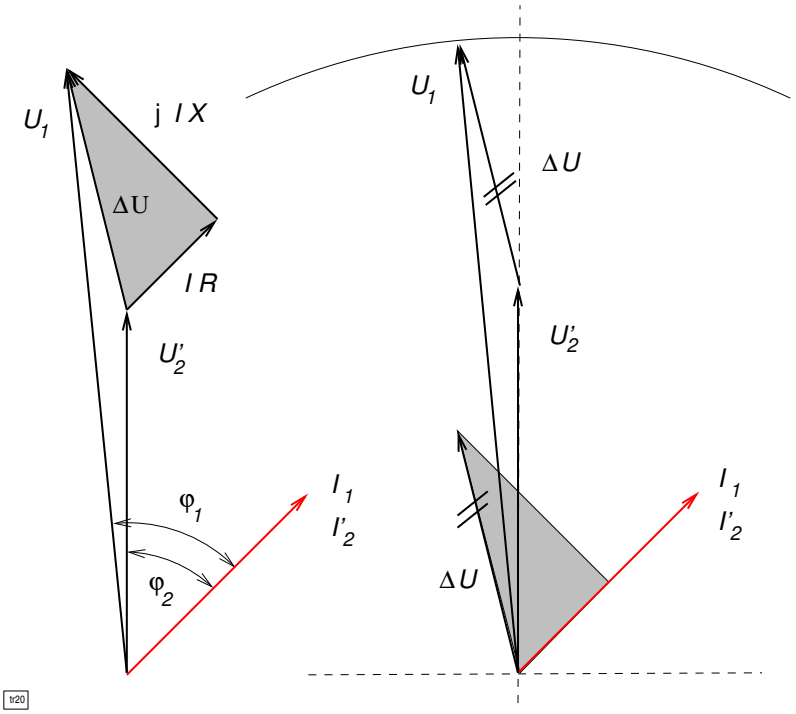


Abb. 3.54: Konstruktion des Zeigerdiagrammes

Aus dem Kurzschlußversuch ergeben sich:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_k &= \frac{P_{1k}}{U_{1k} I_{1k}} \\
\Delta U &= U_{1k} \\
\Delta U_R &= \Delta U \cos\varphi_k = \frac{P_{1k}}{\cos\varphi_k I_{1k}} \cos\varphi_k = \frac{P_{1k}}{I_{1k}} \\
\Delta U_X &= \Delta U \sin\varphi_k = \Delta U_R \tan\varphi_k = \sqrt{\Delta U^2 - \Delta U_R^2}\,.
\end{aligned}$$

Die Teilspannungen ΔU_R und ΔU_X können ebenfalls als *relative Größen* angegeben werden:

$$\boxed{u_r = u_k \cos\varphi_k} \qquad \boxed{u_x = u_k \sin\varphi_k}\,.$$

Nach DIN/VDE 0532 Teil 10 darf man für $u_k < 4\,\%$ und für Überschlagsrechnungen das Zeigerdiagramm weiter vereinfachen mit der Annahme $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ und $\underline{U}_1 \parallel \underline{U}'_2$ (siehe Abb. 3.55). Für die Spannungsänderung U'_φ zwischen Primär- und Sekundärspannung erhält man:

$$U'_\varphi = \Delta U_R \cos\varphi_2 + \Delta U_X \sin\varphi_2$$

$$\boxed{u_\varphi(\varphi_2) = \frac{U'_\varphi}{U_{1N}} = u_r \cos\varphi_2 + u_x \sin\varphi_2 = \frac{U_1 - U'_2}{U_{1N}}}\,. \tag{3.33}$$

☞ Die relativen Größen $(i_0, u_k, u_x, u_r, u_\varphi)$ gelten unabhängig vom Übersetzungsverhältnis.

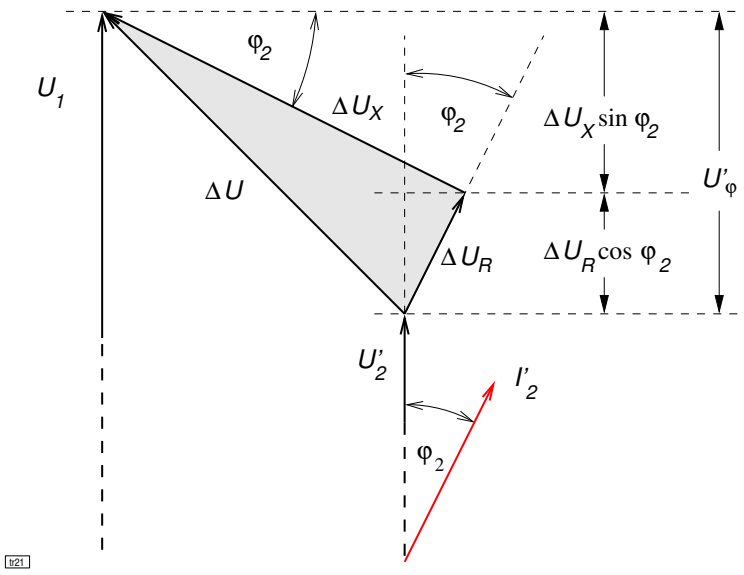


Abb. 3.55: Zeigerdiagramm mit $U_1 \parallel U_2'$

Aus Gleichung (3.33) ergibt sich

$$\begin{aligned} u_\varphi U_{1N} &= U_1 - U_2' \\ U_2' &= U_1 - u_\varphi U_{1N} \qquad \text{und mit } U_1 = U_{1N} \text{ erhält man} \\ U_2' &= U_1 (1 - u_\varphi) \, . \end{aligned}$$

Berücksichtigt man das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$

$$U_2 = \ddot{u} U_2' \qquad\qquad U_1 \approx U_h = \ddot{u} U_{20}$$

erhält man schließlich die Ausgangsspannung U_2 in Abhängigkeit vom sekundären Leistungsfaktor $\cos\varphi_2$ und der relativen Belastung I_2/I_{2N}

$$\boxed{U_2(\varphi_2, I_2) = U_{20} \left(1 - u_\varphi(\varphi_2) \frac{I_2}{I_{2N}}\right)} \quad \text{mit } u_\varphi(\varphi_2) \text{ nach Gleichung (3.33)} \, .$$

Mit den Teilspannungen ΔU_R und ΔU_X kann man bei vorgegebener Belastung I_2' und $\cos\varphi_2$ sowie bekanntem U_1 die Ausgangsspannung U_2' graphisch ermitteln.

Abbildung 3.56 zeigt die Ausgangsspannung U_2 eines Transformators mit der Leerlaufspannung $U_{20} = 230\,\mathrm{V}$ in Abhängigkeit des sekundären Leistungsfaktors bei sekundärem Nennstrom.

3.3.7 Drehstromtransformatoren

Zur Erzeugung und Verteilung der elektrischen Energie wird das Drehstromsystem verwendet. Zur Anpassung an die unterschiedlichen Spannungen werden Drehstromtransformatoren benötigt. Im Prinzip lassen sich dafür drei gleiche Einphasentransformatoren einsetzen. Bei großen Leistungen (Höchstspannungsnetzen) wählt man tatsächlich aus Transportgründen und zwecks Reservehaltung diesen Weg (Transformatorbank). Anderenfalls ist es wirtschaftlicher, Drehstromtransformatoren als eine Einheit zu bauen.

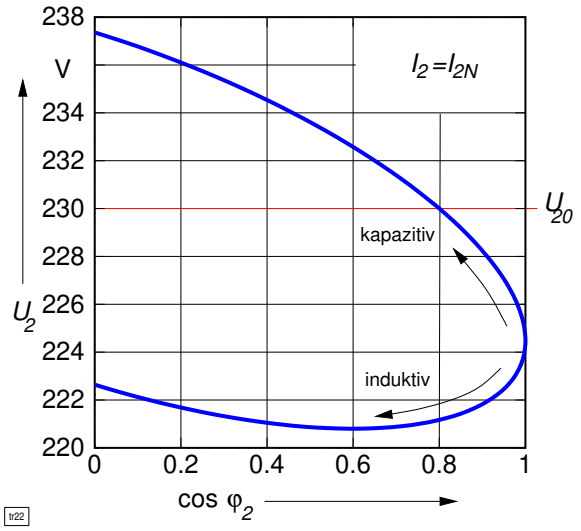


Abb. 3.56: $U_2(\cos\varphi_2)$

Ersatzschaltung

Aus dem Aufbau eines Drehstromsystems aus 3 Einphasentransformatoren folgt, dass sich die Grundgleichungen des einphasigen Transformators ohne Einschränkungen auf die einander zugeordneten primären und sekundären Strangspannungen bzw. -ströme anwenden lassen. Bei der Berechnung sind jedoch die Schaltungen der Primär- und Sekundärwicklungen zu beachten. Außerdem muss die gegenseitige Beeinflussung der drei Wicklungsflüsse, die in Abhängigkeit der Kernausführung und bei unsymmetrischer Belastung auftritt, berücksichtigt werden.

Analog zu den Drehstrommaschinen gilt für die Scheinleistung unabhängig von der inneren Schaltung

$$S = \sqrt{3}\,U\,I$$

mit U als verkettete Spannung und I als Leiterstrom. Je nach Schaltungsart müssen die einphasigen Ersatzgrößen umgerechnet werden.

Schltg.	$S_{1\sim}$	$U_{1\sim}$	$I_{1\sim}$
Stern	$\frac{S}{3}$	$\frac{U}{\sqrt{3}}$	I
Dreieck	$\frac{S}{3}$	U	$\frac{I}{\sqrt{3}}$

☞ Die relativen Größen $(i_0, u_k, u_x, u_r, u_\varphi)$ gelten unverändert.

Klemmenbezeichnung

Die Klemmenbezeichnung von Transformatoren sind nach DIN 42 400 genormt (Abbildung 3.57). Sie setzt sich aus 3 Teilen zusammen:

- Kennzahl für die Art der Wicklung: 1=Primärwicklung (OS), 2=Sekundärwicklung (US), evtl. 3=Tertiärwicklung, usw.
- Kennbuchstaben für den jeweiligen Strang: U, V, W
- Kennziffer für den Anschluß: 1=Anfang, 2=Ende, 3…=Anzapfungen

Für die äußeren Anschlüsse kann die letzte Ziffer entfallen.

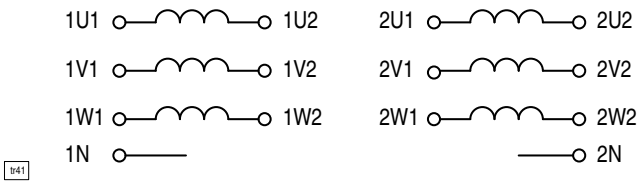


Abb. 3.57: Klemmenbezeichnung einer offenen Wicklung

Schaltungsarten

Drehstromwicklungen können, analog zu den Drehstrommaschinen, im Stern, Dreieck oder mit offenen Wicklungen ausgeführt werden (Abb. 3.58). Zusätzlich existiert noch die *Zickzackschaltung* (Abb. 3.59), bei der die Unterspannungswicklung auf zwei Schenkel des Kerns verteilt wird und vorteilhaft bei unsymmetrischer Belastung Verwendung findet (Verteilertransformatoren in Ortsnetzen). Nachteilig ist der erhöhte Wicklungsaufwand durch die entgegengesetzte Reihenschaltung der beiden Teilwicklungen.

Abb. 3.58: Schaltungsarten bei Drehstromtransformatoren

Schaltung	OS	US
Stern	Y	y
Dreieick	D	d
Zick-Zack		z
offen	III	iii
Sternpunkt herausgeführt	N	n

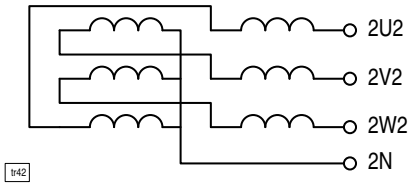


Abb. 3.59: Zickzack-Schaltung

Übersetzungsverhältnis

Eine wesentliche Kenngröße des Transformators ist das Übersetzungsverhältnis der zugänglichen Leiterspannungen. Bei gleichen Windungszahlen je Strang ($N_1 = N_2$) ergeben sich je nach Schaltungsart folgende Werte für das Verhältnis $U_{\mathrm{US}}/U_{\mathrm{OS}}$:

OS	Y	D	Y	D	Y	D
US	y	y	d	d	z	z
$\frac{U_{\mathrm{US}}}{U_{\mathrm{OS}}} =$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

U_{US} und U_{OS} stellen die verketteten Spannungen dar. Bei der Zickzackschaltung bezieht sich N_2 auf beide Teilwicklungen.

3.3.8 Schaltgruppe

Bei einphasigen Transformatoren sind Primär- und Sekundärwicklung mit demselben Fluss gekoppelt, die Ausgangsspannung kann je nach Polung der Sekundäranschlüsse nur gleich- oder gegenphasig sein.

Bei Drehstromtransformatoren gilt dies ebenfalls für die Spannungen von Wicklungen, die auf einem Schenkel liegen. Weiterhin ergeben sich unterschiedliche Phasenlagen zwischen Netz und Wicklungen durch die Dreieckschaltung.

Zusätzlich können aber noch bei der Zick-Zack-Schaltung verkettete Spannungen mit Wicklungen gebildet werden, die auf anderen Schenkel liegen und jeweils um 120° phasenverschoben sind. Durch geometrische Addition dieser Wicklungsspannungen ergeben sich unterschiedliche Phasenlagen zwischen Primär- und Sekundärspannungen.

Der Winkel zwischen den korrespondierenden Spannungszeigern — man benutzt dazu die Spannungen 1V und 2V bezogen auf den vorhandenen oder angenommenen Sternpunkt N — dividiert durch 30°, ergibt eine *Kennzahl* zwischen 0 und 11 (Uhrzeiger), die zusammen mit der Schaltungsart (siehe Tabelle 3.58) die *Schaltgruppe* bildet.

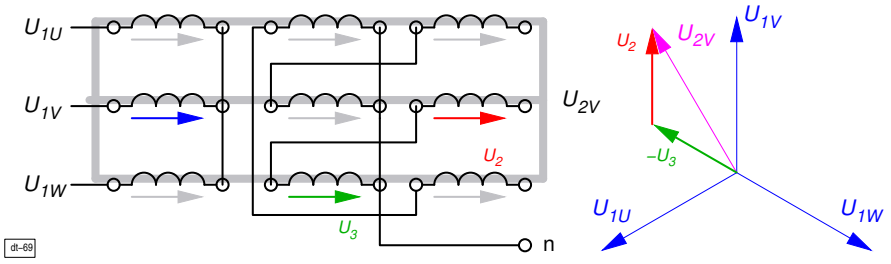


Abb. 3.60: Zickzack-Schaltung

Beispiel: Schaltgruppe Yzn11 bedeutet, der Transformator ist primär im Stern und sekundär im Zick-Zack geschaltet, der sekundäre Nullleiter ist ausgeführt, die Phasenlage zwischen den Sternspannungen 1V und 2V beträgt 330° (Abb. 3.60).

Abb. 3.61 zeigt die Schaltung und das Zeigerdiagramm der Schaltgruppe Dz6n.

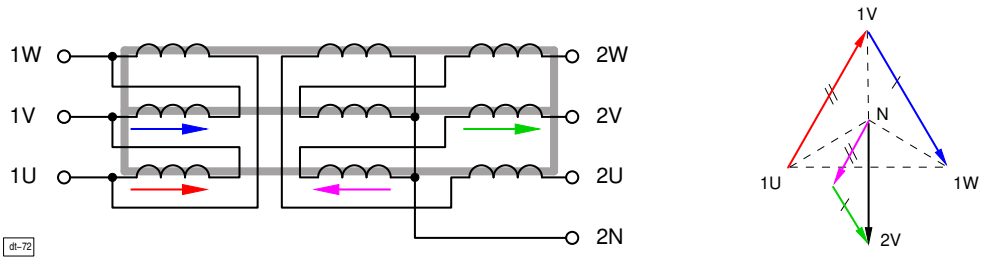


Abb. 3.61: Schaltgruppe Dzn6

Die Norm DIN 57 532 Teil 4 enthält alle Schaltgruppen mit ihren Darstellungen (Abb. 3.62). Dort werden nur die Ein- und Ausgangsklemmen bezeichnet. Der Wickelsinn ist bei allen Wicklungen gleich.

Zur Ermittlung der Kennziffer zeichnet man ein gleichseitiges Dreieck UVW mit der Phase V nach oben. In dieses Dreieck zeichnet man die Lage der Primärspannungen entsprechend der

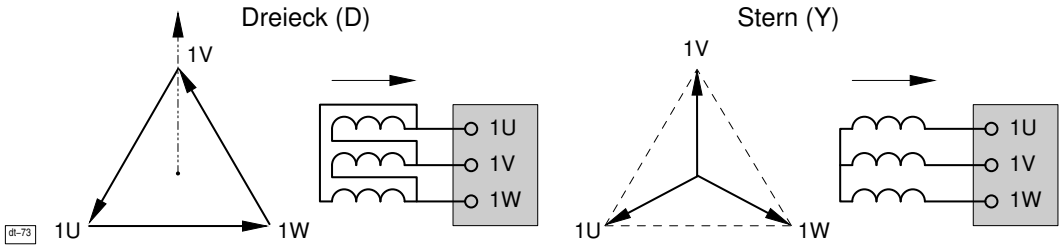


Abb. 3.62: Schaltgruppen Dreieck (D) und Stern (Y) nach DIN 57 532 T4

primären Schaltungsart. In das selbe Dreieck konstruiert man jetzt die Sekundärspannung für die Klemme 2V. Dabei haben Spannungen auf dem selben Schenkel die gleiche Lage, die Richtung ergibt sich aus der Polung, gleichsinning oder gegensinnig. Abb. 3.62 zeigt die Darstellung nach DIN für eine Dreieck- und eine Sternschaltung, Abb. 3.63 zeigt die vollständige Schaltung für die Schaltgruppen Dz6 und Yz11. Aus der Lage (dem Winkel) von 2V ergibt sich die Kennzahl (=Uhrzeit). Im Prinzip kommen nur die Kennzahlen 0, 5, 6 und 11 vor.

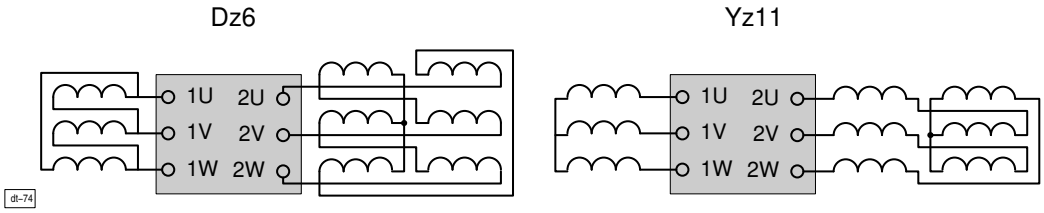


Abb. 3.63: Schaltgruppen Dz6 uind Yz11 nach DIN 57 532 T4

Parallelschaltung

Bei steigendem Leistungsbedarf ist es wirtschaftlicher, einen zweiten Transformator parallel zu schalten als von vornherein einen größeren Transformator zu wählen (Eisenverluste!).

Die parallel zu schaltenden Transformatoren müssen folgende Bedingungen erfüllen:

- gleiches Übersetzungsverhältnis, d. h. gleiche Nennspannungen für OS und US;
- gleiche relative Kurzschlußspannung;
- gleiche Phasenlage der Ausgangsspannungen, d. h. passende Schaltgruppen;
- Verhältnis der beiden Nennleistung nicht größer als 3:1.

Unsymmetrische Belastungen

Bei gleichmäßiger Belastung der drei Stränge kann sich ein Durchflutungsgleichgewicht einstellen (Oberschwingungen des Magnetisierungsstromes nicht berücksichtigt). Unsymmetrische Strombelastungen treten betriebsmäßig nur bei Verteilertransformatoren in Stern- und Zickzackschaltungen auf.

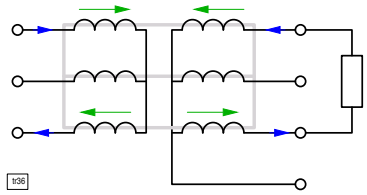


Abb. 3.64: Yyn, zweisträngig

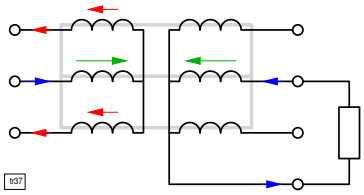


Abb. 3.65: Yyn, einsträngig

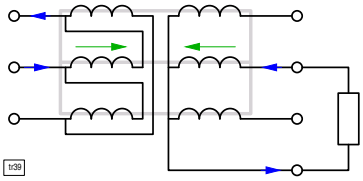


Abb. 3.66: Dyn-Schaltung

Zweisträngige Belastung bei der Yyn-Schaltung

Die durch die Sekundärströme hervorgerufenen Durchflutungen werden durch die entsprechenden Primärströme vollständig kompensiert (Abbildung 3.64).

Einsträngige Belastung bei der Yyn-Schaltung

Besitzt die Primärwicklung einen herausgeführten Sternpunktleiter (YNyn), kann der Transformator sekundärseitig einphasig voll belastet werden. Fehlt der primäre Sternpunktleiter, ist eine direkte Kompensation durch einen Primärstrom nicht möglich. Da primärseitig die Stromsumme im Sternpunkt Null sein muss, fließen in den nicht betroffenen Schenkeln Primärströme, die zu gleichgerichteten Flüssen[6] in allen drei Schenkeln führen (Abbildung 3.65). Diese Flüsse können sich bei der Kernbauform (Dreischenkelkern) nur über die Luft (Streuung), beim Manteltyp (Fünfschenkelkern) über die äußeren Joche schließen. Außerdem induzieren sie in den Strangwicklungen gleichgerichtete Zusatzspannungen[7], die eine *Sternpunktsverlagerung* bewirken. Beim Dreischenkelkern ist eine einphasige Belastung bis $0.1\,I_N$ möglich, beim Fünfschenkelkern ist die Sternpunktsverschiebung wegen der höheren Flüsse größer, so dass diese Schaltung einphasig kaum belastbar ist. Abhilfe bringt eine zusätzliche kurzgeschlossene Dreieckwicklung (Abbildung 3.67), die bei einsträngiger Belastung den vorher nicht kompensierten Stromanteil ausgleicht (*Ausgleichswicklung*).

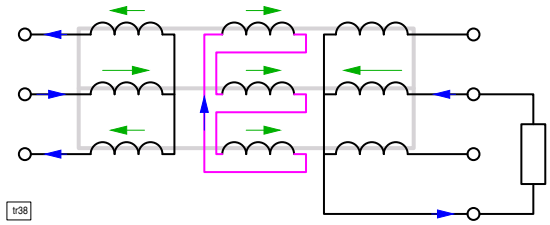


Abb. 3.67: Ausgleichswicklung

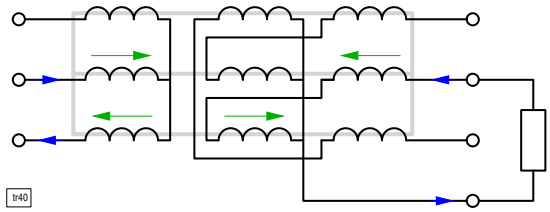


Abb. 3.68: Yzn, einsträngig

Einsträngige Belastung bei der Dyn-Schaltung

Die durch den Sekundärstrom hervorgerufene Durchflutung wird durch den entsprechenden Primärstrom vollständig kompensiert (Abb. 3.66).

Einsträngige Belastung bei der Yzn-Schaltung

Durch die Verteilung der Belastung auf zwei Schenkel kann primärseitig vollständig kompensiert werden (Abb. 3.68).

[6] Die Flüsse haben die gleichen Richtungen wie die Ströme.
[7] Die Spannungen haben die gleichen Richtungen wie die Flüsse.

Vergleich der Schaltungen

Als Verteilertransformatoren kommen wegen der guten einphasigen Belastbarkeit nur Zickzack- und Sternschaltungen auf der Sekundärseite in Frage (Yzn, Dyn).

Die Yy-Schaltung ohne Ausgleichswicklung ist in der Mantelbauweise und als Transformatorbank überhaupt nicht einphasig, in der Kernbauweise bis etwa 10 % I_N belastbar und kommt damit als Verteilertransformator nicht in Betracht.

Der Isolationsaufwand für die OS-Wicklung ist bei der Dreieckschaltung höher (Anfang und Ende liegen auf U_N) als bei der Sternschaltung (zwischen Anfang und Ende liegt nur $U_N/\sqrt{3}$, das Ende liegt auf Erdpotential).

Maschinentransformatoren (Generator ⇒ Hochspannungsnetz) haben auf der Generatorseite eine Dreieckwicklung, auf der Netzseite sind sie in Stern geschaltet.

3.3.9 Aufbau und Bauformen

Werkstoffe

Referenz: [16, 17]

Zur Vermeidung von Wirbelströmen werden die Eisenkerne aus Blechen zusammengesetzt, die durch eine dünne Silikat-Phosphatschicht voneinander isoliert sind. Als Werkstoffe kommen Elektrobleche aus Eisen-Silizium Legierungen in Frage. Silizium erhöht den elektrischen Widerstand des Eisens und vermindert dadurch die Wirbelstromverluste. Während früher warmgewalzte, nicht kornorientierte Elektrobleche verwendet wurden, kommen heute nur noch kaltgewalzte, kornorientierte Bleche in Frage. Amorphe Bleche nehmen zur Zeit noch eine Ausnahmestellung ein.

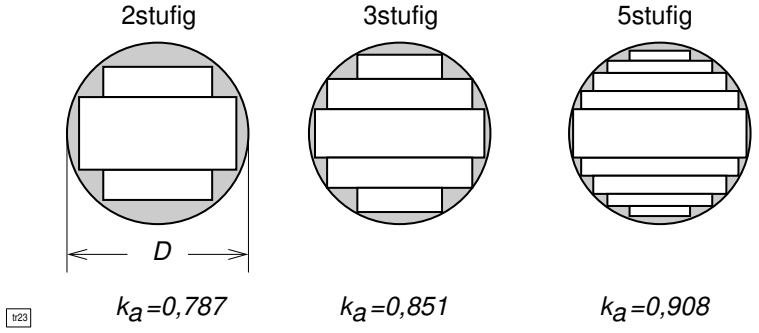
Bei *kornorientierten* Blechen wird die ausgeprägte Anisotropie des Eisens ausgenutzt. Die magnetischen Eigenschaften sind in Walzrichtung besser (Vorzugsrichtung). Da es beim Transformator nur eine *Wechselmagnetisierung* gibt — im Gegensatz zur *Drehmagnetisierung* bei rotierenden Maschinen — ordnet man die Bleche mit ihrer Walzrichtung in Richtung des Hauptflusses an. Die spezifischen Ummagnetisierungsverluste liegen je nach Blechdicke (0,23 bis 0,35 mm) zwischen $p_{1,7/50} = 0{,}85$ bis 1,60 W/kg bei einer Induktion von 1,7 T und 50 Hz. Der *Stapelfaktor* k_{fe} beträgt etwa 0,95 bis 0,97.

Geringere Bedeutung haben *amorphe* Bleche. Sie besitzen geringere Ummagnetisierungsverluste bei höheren Frequenzen ($p_{1,5/50} = 0{,}15$ bis 0,4 W/kg und $p_{0,2/20\,\mathrm{kHz}} = 4$ bis 10 W/kg) und eignen sich für Anwendungen im Mittelfrequenzbereich. Man stellt sie durch extreme Abkühlung ($\Delta T/\Delta t \approx 10^6$ K/s) einer Schmelzlegierung aus Eisen, Kobalt und Nickel mit Zusätzen von Bor oder Silizium her. Als nachteilig für den Einsatz im Elektromaschinenbau erweisen sich die schwere Bearbeitbarkeit, die geringen Breiten (5 bis 30 mm), die geringen Dicken (max. 50 µm) und der daraus resultierende schlechte Stapelfaktor ($k_{fe} < 0{,}8$).

Kernaufbau

Die einzelnen Bleche werden wechselseitig geschichtet (»verzapft«), um den Luftspalt und damit den Leerlaufstrom (Verluste) sowie die magnetischen Geräusche (magnetische Kräfte, nicht Magnetostriktion!) klein zu halten. Um die magnetische Vorzugsrichtung nicht zu unterbrechen, werden die Stoßstellen der Bleche schräg ausgeführt. Verschiebt man die Stoßfuge mehrmals seitlich, verringert sich der magnetische Engpaß weiterhin (*Step-lap* Schichtung).

In der verbreitesten Ausführung hat der Spulenkörper einen kreisförmigen Querschnitt (Ausnahmen: Einphasentransformatoren kleinerer Leistung). Zur besseren Wicklungsausnutzung wird durch Stufung der Blechbreiten versucht, den Eisenquerschnitt an die Kreisform anzunähern (Abb. 3.69). Der geometrische *Ausnützungsfaktor* k_a wird umso besser, je feiner die Stufung gewählt wird. Gleichzeitig wachsen damit auch die Herstellungskosten.



$$A_{\mathrm{fe}} = D^2 \, \frac{\pi}{4} \, k_a \, k_{\mathrm{fe}}$$

Abb. 3.69: Eisenkernquerschnitte mit unterschiedlichen Ausnutzungsfaktoren

Im allgemeinen werden die Blechpakete durch Bandagen oder durch Presskonstruktionen zusammengepresst. Bei Kleintransformatoren werden die Bleche mit Bolzen quer zum Eisen zusammengeschraubt. Die Bolzen müssen zur Vermeidung von magnetischen Schlüssen mit einer Isolierhülse vom Blech getrennt werden.

Statt des wechselseitigen Schichtens können Kerne auch *geklebt* und *gewickelt* werden. Die gewickelten Kerne (Ringbandkerne, Schnittbandkerne) weisen besonders geringe Streuverluste auf. Während *Ringbandkerne* mit speziellen Wickelvorrichtungen gewickelt werden müssen (rotierende Zuführer), werden *Schnittbandkerne* nach dem Wickeln aufgesägt und die Schnittflächen poliert. Nach dem Aufschieben der Spulenkörper halten Spannbänder die Kernhälften zusammen. Kleine Schnittbandkerne kann man unter Pressung auch verkleben.

Den von der Wicklung umschlossenen Teil des Eisenkerns bezeichnet man als *Schenkel, Säule* oder *Kern*, den unbewickelten als *Joch*. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen Kerntyp und Manteltyp (Abb. 3.70). Einphasige Kerntypen werden durch U/I-Blechschnitte, SM-Schnittbandkerne oder PU/PL-Blechschnitte hergestellt. Für einphasige Manteltransformatoren kann man E/I-, M- oder MD-Blechschnitte verwenden.

Wicklungen

Zylinderwicklungen werden ein- oder mehrlagig als Röhren *übereinander* gewickelt und finden nur bei niedrigen Betriebsspannungen (maximale Lagenspannung $< 150\,\mathrm{V}$) Verwendung. Zur

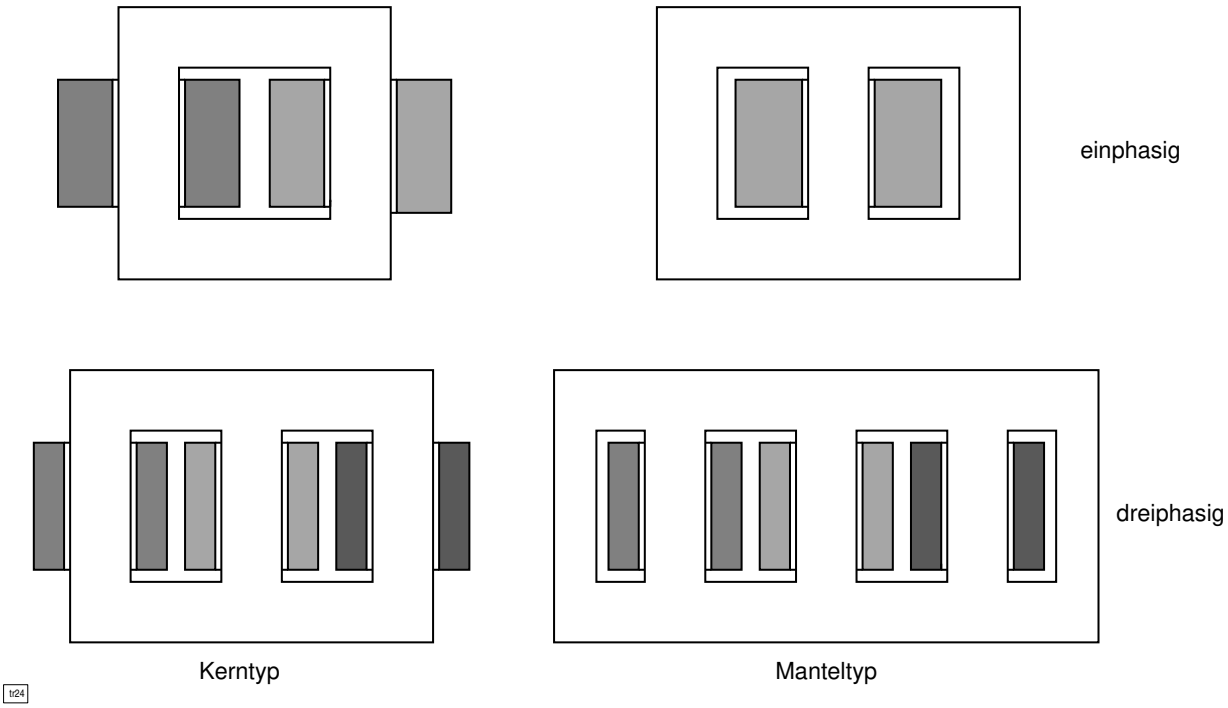


Abb. 3.70: Kern- und Manteltyp

Vermeidung hoher Lagenspannungen macht man die »Röhren« zu »Scheiben«. Bei dieser *Scheibenwicklung* werden OS- und US-Wicklung abwechselnd *nebeneinander* auf dem Kern angeordnet (Abb. 3.71).

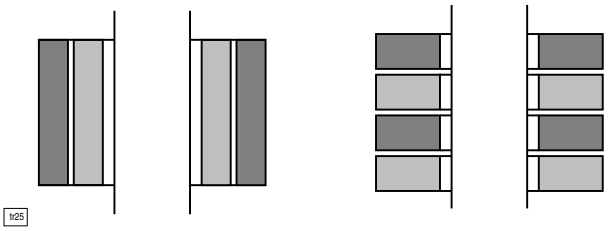


Abb. 3.71: Zylinder- und Scheibenwicklung

Aus isolationstechnischen Gründen wird die US-Wicklung als unterste Wicklung aufgebracht. Bei großen Stromstärken verwendet man statt Runddrähte Profildrähte, die zusätzlich noch in Teilleiter aufgeteilt werden können. Bei großen Leistungen verdrillt man zusätzlich die Teilleiter zur Vermeidung von Zusatzkupferverlusten durch Stromverdrängung.

Die Streufelder beeinflussen die Kurzschlußspannung des Transformators. Man kann ihre Wirkung durch die Kernform (Ringkern, Schnittbandkern) und durch die Anordnung der Wicklungen beeinflussen (Abbildung 3.72).

Kleine Kurzschlußspannungen erreicht man

- bei Manteltransformatoren durch übereinandergewickelte Wicklungen (Abb. 3.72-a)
- bei Kerntransformatoren, in dem man auf beiden Wickelkörpern jeweils einen Teil der US- und OS-Wicklung unterbringt (Abb. 3.72-b)

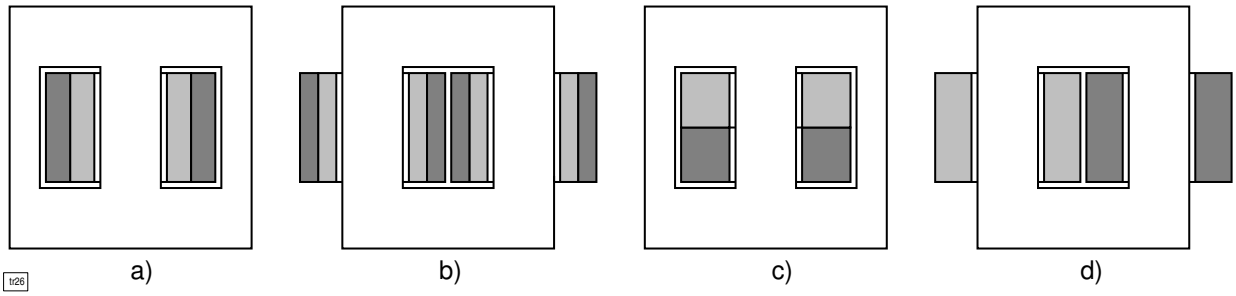


Abb. 3.72: Verschiedene Wicklungsanordnungen

Große Kurzschlußspannungen erhält man

- beim Manteltransformator durch Scheibenwicklungen (Abb. 3.72-c)
- beim Kerntransformator durch getrenntes Anordnen von OS- und US-Wicklung auf je einen Schenkel (Abb. 3.72-d)
- durch ein zusätzliches Streujoch (Streufeldtransformator), welches unter Umständen verstellbar sein kann;
  Beispiele: Spielzeugtrafo, Zündtrafo (u_k=100 %), Schweißtrafo, Trafo für Leuchtröhren, Klingeltrafo.

Bei Drehstromtransformatoren werden die Wicklungen in der Regel übereinandergewickelt, um kleine Streuungen zu erreichen. Bei größeren Betriebsspannungen müssen auch die kapazitiven Einflüsse der Wicklungen untereinander berücksichtigt werden. Da hierbei die Isolation sehr stark beansprucht wird, vor allem im Störfall (Überspannungen), gestaltet man den Wicklungsaufbau vorwiegend nach Isolationsgesichtspunkten.

3.3.10 Entwurfsgleichungen

Im Folgenden sollen die wichtigsten Größen eines Transformators ermittelt werden, um eine bestimme Scheinleistung S zu übertragen.

Magnetischer Fluß und induzierte Spannung

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Spannung U, der Frequenz f, der Windungszahl N und dem magnetischen Fluss Φ (Abb. 3.73)?

$$\Phi(t) = \hat{\Phi}\,\sin\omega t$$

$$u(t) = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N\hat{\Phi}\,\omega\,\cos\omega t = N\hat{\Phi}\,2\pi\,f\,\cos\omega t = \hat{u}\,\cos\omega t$$

$$\hat{u} = N\hat{\Phi}\,2\pi\,f$$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi\,f\hat{\Phi}\,N = 4.44\,f\hat{\Phi}\,N\ .$$

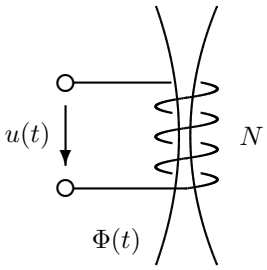


Abb. 3.73: Magnetischer Fluss und induzierte Spannung

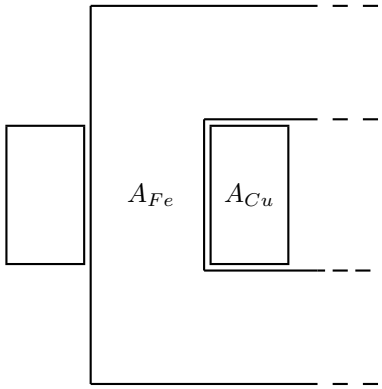


Abb. 3.74: Zum Wachstumsgesetz

Wachstumsgesetz

Für die Entwicklung von Baureihen bedient man sich der Ähnlichkeits- und Wachstumsgesetze (siehe Anhang Ähnlichkeitsgesetze und Wachstumsgesetze). Damit physikalische Vorgänge bei geometrischen Änderungen ähnlich ablaufen, müssen bestimmte Grundgrößen in einem festen Verhältnis stehen.

Für die Leistung eines Transformators gilt (Abb. 3.74):

$$U_N = N\,\omega\,\Phi = N\,\omega\,B_N\,A_{\mathrm{Fe}} \tag{3.34}$$

$$I_N \cdot N = A_{\mathrm{Cu}}\,J_N \tag{3.35}$$

$$S_N = U_N\,I_N = \omega\,A_{\mathrm{Fe}}\,A_{\mathrm{Cu}}\,B_N\,J_N\,.$$

Führt man den Längenmaßstab

$$\lambda_L = \frac{l_0}{l_1}$$

ein mit l_0 als ursprüngliche und l_1 als neue Länge, ergibt sich für das Leistungsverhältnis zweier Transformatoren *bei gleicher Stromdichte* J_N *und Induktion* B_N

$$\frac{S_{N0}}{S_{N1}} = \frac{\omega\,A_{\mathrm{Fe0}}\,A_{\mathrm{Cu0}}\,B_N\,J_N}{\omega\,A_{\mathrm{Fe1}}\,A_{\mathrm{Cu1}}\,B_N\,J_N} = \lambda_L^2\,\lambda_L^2 = \lambda_L^4\,.$$

Für das Massenverhältnis gilt bei gleichen Werkstoffen ($\lambda_\rho = 1$)

$$\frac{m_0}{m_1} = \lambda_\rho\,\lambda_L^3 = \lambda_L^3$$

und für die zur Kühlung zur Verfügung stehende Oberfläche erhält man

$$\frac{O_0}{O_1} = \lambda_L^2\,. \tag{3.36}$$

Man erkennt, dass bei geometrischer Ähnlichkeit und konstanten *Entwurfsgrößen* B_N und J_N (bei rotierenden Maschinen auch die Drehzahl n) sich die Leistung mit der vierten, das Gewicht mit der dritten und die Oberfläche mit der zweiten Potenz ändern, also unähnlich sind.

Bestimmung der Baugröße

Die Hauptaufgabe besteht darin, bei Vorgabe der zu übertragenden Leistung die Verluste im Transformator so gering wie möglich zu halten. Nach Gleichung (2.32) (siehe Wirkungsgrad) beeinflussen die Wicklungsverluste $P_{\mathrm{Cu}} = f(J)$ und die Eisenverluste $P_{\mathrm{Fe}} = f(B)$ den Wirkungsgrad bei konstanter Frequenz.

Die erste Bestimmungsgleichung für die Baugröße erhält man durch Umformung der Gleichung (3.34) zu

$$A_{\mathrm{Fe}} = \frac{U_N}{\omega N B_N} \; .$$

Mit Rücksicht auf den Magnetisierungstrom und die magnetischen Geräusche wird man die Induktion B_N nicht zu hoch wählen, was zu einer Zunahme der Masse führt.

Das *Wickelfenster* muss die Primär- und Sekundärwicklung aufnehmen können. Bei vorgegebener Stromdichte J_N benötigt man die Leiterquerschnitte $A_{\mathrm{L1}} = I_1/J_N$ und $A_{\mathrm{L2}} = I_2/J_N$. Der von den Wicklungen beanspruchte Kupferquerschnitt beträgt dann $A_{\mathrm{Cu}} = N_1 A_{\mathrm{L1}} + N_2 A_{\mathrm{L2}}$ und mit $I_1 N_1 = I_2 N_2$ erhält man für den notwendigen Platzbedarf für *beide* Wicklungen die zweite Bestimmungsgleichung

$$A_{\mathrm{Cu}} = 2\frac{I_1 N_1}{J_N} = 2\frac{I_2 N_2}{J_N} = 2\frac{I_N N}{J_N} \; .$$

Die Stromdichte J_N ist abhängig von der maximal zulässigen Erwärmung (Kühlungsart) und wird eigentlich nur von der Baugröße bestimmt entsprechend Gleichung (3.36).

Aus den beiden Bestimmungsgleichungen ergibt sich, dass bei Vorgabe der zu transformierenden Leistung $S_N = U_N I_N$ die Windungszahl N, die Größe des Wickelfensters A_{Cu} und der Eisenquerschnitt A_{Fe} frei wählbar sind. Die folgenden Überlegungen grenzen die Auswahl dieser Parameter ein:

- N klein: große Windungsspannung; daraus folgt

  $$U = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \Phi \text{ groß } \Longrightarrow A_{\mathrm{Fe}} \text{ groß }, A_L N \text{ klein } \Longrightarrow A_{\mathrm{Cu}} \text{ klein } .$$

  Es wird nur ein kleines Wickelfenster benötigt, die Wicklungsverluste werden klein, dagegen erhöht sich die Masse des Transformators wegen der erforderlichen Schenkelquerschnitte. Insgesamt werden die Verluste geringer ausfallen.

- N groß: kleine Windungsspannung; analog ergibt sich

  $$U = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \Phi \text{ klein } \Longrightarrow A_{\mathrm{Fe}} \text{ klein }, A_L N \text{ groß } \Longrightarrow A_{\mathrm{Cu}} \text{ groß } .$$

  Wegen des großen Wickelfensters steigen die Wicklungsverluste, dafür ergibt sich eine kleinere Eisenmasse wegen des geringeren Schenkelquerschnittes. Insgesamt steigen dadurch die Verluste.

Wie man sieht, stellt die günstige Wahl von A_{Cu} und A_{Fe} einen Kompromiss zwischen Eisen- und Kupferverlusten dar, bei dem wirtschaftliche Faktoren berücksichtigt werden müssen.

Für die Baugröße bezieht man sich im allgemeinen auf den Schenkelquerschnitt A_{Fe} und drückt den Kupferquerschnitt im Verhältnis zum Eisenquerschnitt aus:

$$A_{\mathrm{Fe}} = \alpha A_{\mathrm{Cu}} = \sqrt{\alpha\alpha A_{\mathrm{Cu}} A_{\mathrm{Cu}}} = \sqrt{\alpha A_{\mathrm{Fe}} A_{\mathrm{Cu}}} = \sqrt{\alpha \frac{2U_N I_N}{\omega B_N J_N}} \,. \tag{3.37}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass bei konstantem α die Baugröße mit der Scheinleistung zu- und mit der Frequenz abnimmt.

Tatsächlich müssen weitere konstruktive Größen berücksichtigt werden (Füllfaktoren, Ausnutzungszahlen), die dann zu der Entwurfsgleichung (3.38) führen.

Ausnutzungszahlen

Beim Entwurf eines Transformators werden zunächst die Abmessungen von Kern und Wicklungen mit Hilfe der *Ausnutzungszahlen* und im Vergleich ähnlicher Transformatoren bestimmt. Danach werden die weiteren Größen berechnet. Stimmt das Ergebnis nicht mit den geforderten Daten überein, muss der erste Entwurf korrigiert und das gesamte Berechnungsverfahren wiederholt werden.

Die Ausnutzungszahlen basieren vorwiegend auf Erfahrungswerte.

Kerninduktion

Die Kerninduktion ist abhängig von der Blechsorte. Für Leistungen $> 100\,\mathrm{kVA}$ wählt man kornorientiertes Blech mit einer Nenninduktion von 1.5 bis 1.7 T mit Rücksicht auf den Leerlaufstrom. Bei warmgewalzten Blechen setzt man Induktionen von 1.3 bis 1.5 T, bei Kleintransformatoren sogar nur von 1.0 bis 1.2 T ein.

Stromdichte

Öltransformatoren lassen sich mit Stromdichten von $3 - 4\,\mathrm{A/mm^2}$ auf der Unterspannungsseite betreiben. Für die Oberspannungswicklung liegen diese Werte etwa um 10 % niedriger wegen der schlechteren Wärmeabfuhr durch die stärkere Isolierung. Bei Trockentransformatoren sind Stromdichten von $2 - 2.5\,\mathrm{A/mm^2}$ üblich. Für Klein- und Kleinsttransformatoren können weitaus höhere Stromdichten gewählt werden, da die auf die Leistung bezogene Oberfläche mit kleiner werdender Leistung zunimmt, z. B. $9\,\mathrm{A/mm^2}$ bei 3 VA, $6\,\mathrm{A/mm^2}$ bei 15 VA, $4\,\mathrm{A/mm^2}$ bei 60 VA. Außerdem trägt auch der Eisenkern bei kleinen Abmessungen zur Wärmeabfuhr bei.

Kernquerschnitt

Der Kerndurchmesser d_k wird aus der Entwurfs- (Leistungs-)Gleichung analog zur Gleichung (3.37)

$$d_k = \sqrt[4]{\frac{S_N}{C}} \tag{3.38}$$

abgeleitet.

Für die Leistungskonstante C (*Esson'sche Zahl*) setzt man je nach Konstruktion und Kühlungskonzept Werte zwischen 40 – 60 $\cdot 10^{-4}$ kVA/cm^4 an. Bei Einphasentransformatoren beträgt der Durchmesser 1.5 d_k. Tatsächlich ist der Eisenquerschnitt nicht kreisförmig, bei größeren Leistungen wird er jedoch angestrebt zwecks besserer Ausnutzung der kreisförmigen Spulenquerschnitte, und zwar durch Stufung der Blechbreiten (siehe Kernaufbau). Der Eisenfüllfaktor k_{Fe} berücksichtigt die Isolation und Stapelfähigkeit der Bleche. Je nach Blechsorte liegt k_{Fe} zwischen 0.9 und 0.97.

Kleintransformatoren

Kleintransformatoren werden als Massenprodukt nicht mehr berechnet. Die Hersteller bieten zu jedem Blechschnitt komplette Tabellen an, aus denen bei vorgegebener Sekundärleistung von den Windungszahlen bis zum Wirkungsgrad alle Werte entnommen werden können (siehe Tabelle 3.2 und 3.3). Weitere Erleichterungen für den Konstrukteur bieten die umfangreichen DIN-Normen.

Tabelle 3.2: Schnittbandkern SM, kornorientiertes Transformatorenblech (Quelle: [18])

Bezeichnung, Typ:	SM42	SM55	SM65	SM74	SM85a	SM85b	SM102a	SM102b
Eisenquerschnitt / cm^2	1.44	2.92	4.48	6.28	8.02	11.32	10.42	15.56
mittl. Eisenweglänge / cm	9.8	12.4	14.6	16.5	18.3	18.3	22.2	22.2
Eisengewicht / kg	0.108	0.276	0.5	0.792	1.122	1.584	1.77	2.642
mittl. Windungslänge / cm	8.7	11.3	13.8	16	17	19.6	19.7	23.2
Sekundärleistung / VA	5.3	21.1	45.7	84	115	159	206	300
magnetische Induktion / T	1.75	1.76	1.87	1.79	1.78	1.76	1.79	1.78
Wirkungsgrad	0.55	0.75	0.82	0.87	0.88	0.9	0.91	0.92
Stromdichte / A/mm^2	7	5.3	4.4	3.83	3.8	3.72	3.28	3.15
Kupferverluste / W	4.1	6.4	48.7	11.1	12.7	13.7	16.9	18.3
Eisenverluste / W	0.246	0.64	1.18	1.89	2.64	3.69	4.23	6.21
Windungszahl pro 1 V	37	18.18	11.76	8.33	6.66	4.76	5.26	3.45

Tabelle 3.3: M-Kernbleche, 0.35 mm, 1.3 W/kg bei 1 T, $k_{\mathrm{Fe}} = 0.94$ (Quelle: [18])

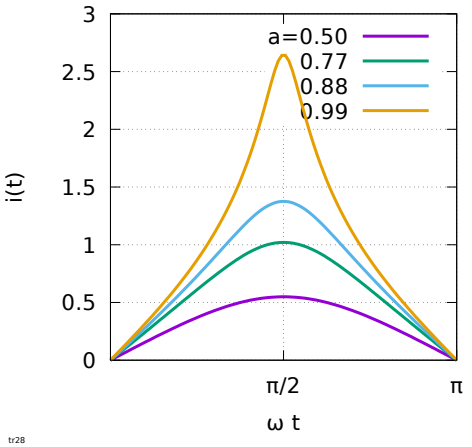
Bezeichnung, Typ:	M42	M55	M65	M74	M85a	M85b	M102a	M102b
Eisenquerschnitt / cm^2	1.6	3.2	4.9	6.9	8.6	12	11	16.5
mittl. Eisenweglänge / cm	10.2	13.1	15.5	17.6	19.7	19.7	23.8	23.8
Eisengewicht / kg	0.125	0.32	0.58	0.93	1.29	1.81	2	3
Anzahl der Bleche	41	58	76	92	91	128	99	149
mittl. Windungslänge / cm	8.7	11.3	13.8	16	17	19.6	19.7	23.2
Sekundärleistung / VA	4.1	16.7	36.4	67	90	120	159	224
magnetische Induktion / T	1.39	1.41	1.43	1.44	1.42	1.4	1.44	1.41
Wirkungsgrad	0.483	0.7	0.78	0.83	0.85	0.87	0.87	0.89
Stromdichte / A/mm^2	6.9	5.1	4.26	3.68	3.65	3.52	3.12	2.95
Kupferverluste / W	3.96	6.1	8.2	10.2	11.6	12.3	15.3	16.1
Eisenverluste / W	0.43	1.14	2.11	3.44	4.69	6.4	7.4	10.8
Windungszahl pro 1 V	20.25	9.98	6.43	4.53	3.96	2.32	2.84	1.94

3.3.11 Magnetisierungsstrom und magnetischer Fluss

Betreibt man einen Transformator an einem Netz mit sinusförmiger Spannung, muss sich aufgrund des Induktionsgesetzes der magnetische Fluss ebenfalls sinusförmig ändern, auch wenn der Eisenkern gesättigt ist. Wegen $B \sim \Phi$ lässt sich aus dem sinusförmigen B-Verlauf an der Magnetisierungskennlinie (MKL) der H-Verlauf und folglich wegen $I_\mu \sim H$ der Magnetisierungsstrom bestimmen.

Vernachlässigt man vorerst die Hysterese und analysiert den Stromverlauf, ergeben sich neben der Grundschwingung je nach Aussteuerung (Amplitude von U_1) *ungeradzahlige Oberschwingungen*, die mit zunehmender Ordnungszahl abnehmen. Im allgemeinen betrachtet man nur die 3. Oberschwingung.

Den Einfluß der nichtlinearen MKL auf den Magnetisierungsstrom kann man recht einfach analytisch demonstrieren (Taschenrechner). Dazu beschreibt man die MKL z. B. mittels der Funktion $\Phi(i) = \tanh i$. Bei sinusförmigem Flußverlauf $\Phi(t) = a \sin t$ erhält man den Stromverlauf durch die Umkehrfunktion $i(t) = \operatorname{Arth} \Phi(t)$. Durch Variation der Aussteuerung $a = 0.5 \ldots 1$ erhält man den typischen Stromverlauf, der symmetrisch zum Maximum ist.



Diesen Stromverlauf sieht man experimentell sofort, wenn man den Leerlaufstrom eines Transformators bei steigender Eingangsspannung oszilloskopiert.

Wegen des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Φ und I_μ und der Definition der Induktivität $L \sim \Phi/I$ ist die Hauptinduktivität stromabhängig, also $L_h = f(I)$. Aus der o. a. Definition ergibt sich die Induktivität aus der Steigung der MKL, die ja gerade $\Delta\Phi/\Delta I$ beträgt. Dabei entspricht die Anfangssteigung dem ungesättigten (Nenn-) Wert der Hauptinduktivität. Den prinzipiellen Verlauf der Induktivität erhält man bei der analytischen Auswertung (s. o.), in dem man $\Phi(i)$ nach i differenziert, also

$$L(i) \sim \frac{\mathrm{d}\Phi(i)}{\mathrm{d}i} \sim \frac{\mathrm{d}(\tanh i)}{\mathrm{d}i} \sim \frac{1}{\cosh^2 i} \,.$$

Mit diesen Vorgaben lassen sich die bisher entwickelten Modelle erweitern und das Zeitverhalten simulieren.

Will man die Hysterese berücksichtigen, muss man je eine MKL für die Auf- und Abmagnetisierung vorgegeben (Abb. 3.75). Zur Berechnung des Stromverlaufes muss außerdem die Magnetisierungsrichtung beachtet werden. Wegen der unterschiedlichen MKL ergibt sich beim Aufmagnetisieren ein anderer Stromverlauf wie beim Abmagnetisieren. Der Magnetisierungstrom i_h ist nicht mehr symmetrisch bezogen auf den Zeitpunkt seines Maximal-/Minimalwertes (Abb. 3.76). Der Strom i_m entspricht dem Verlauf ohne Berücksichtigung der MKL.

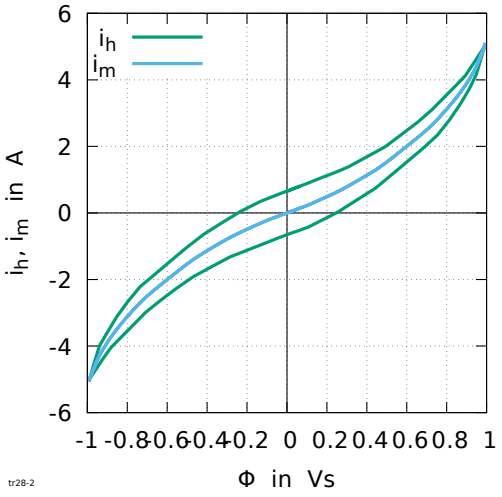


Abb. 3.75: MKL mit Hysterese

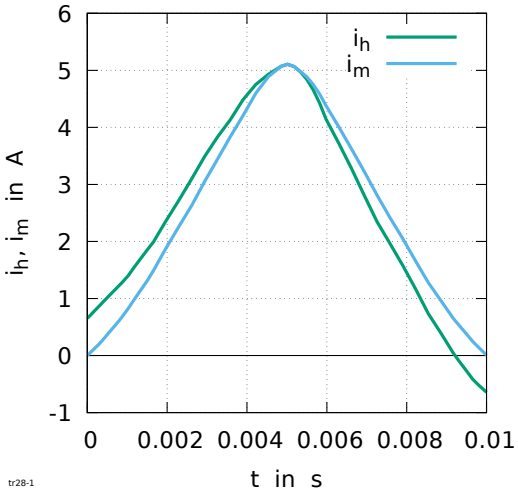


Abb. 3.76: Stromverlauf mit Hysterese

Eine Fourieranalyse von i_h für die Grundschwingung ergibt:

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= (4.24 \sin \omega t + 0.644 \cos \omega t)\,\mathrm{A} \\
I_1 &= 3.03\,\mathrm{A} \\
P_1 &= \frac{311.1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{V} \cdot \frac{0.644}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} = 99.5\,\mathrm{W} \\
Q_1 &= \frac{311.1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{V} \cdot \frac{4.24}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} = 659.5\,\mathrm{var.}
\end{aligned}
$$

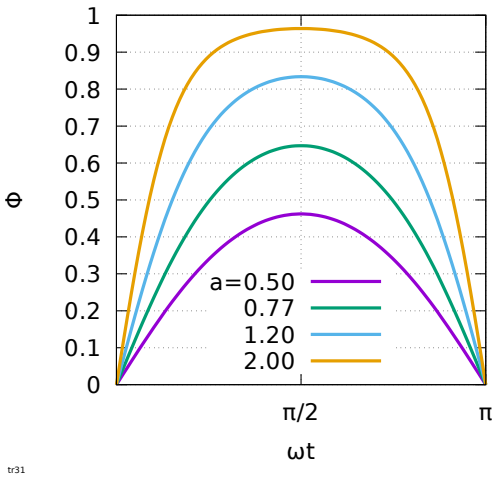
Der unsymmetrische Stromverlauf enthält eine Komponente, die zur Wirkleistung beiträgt und im Ersatzschaltbild durch den Widerstand R_{fe} berücksichtigt wird.

Die *dritte Oberschwingung* wirkt sich bei Drehstromtransformatoren aus. Analog wie beim Einphasentransformator fließt in den drei Strängen der Magnetisierungsstrom mit den entsprechenden Oberschwingungen. Die dritte Oberschwingung ist in allen Strängen gleichphasig. Bei der *Dreieckschaltung* kann deshalb ein *Kreistrom mit dreifacher Netzfrequenz* fließen. Er erzeugt zusätzliche Eisenverluste. Die *Netzströme* enthalten diese Oberschwingungen *nicht*.

Bei der *Sternschaltung* können diese Ströme nicht fließen, da die Stromsumme am Sternpunkt Null sein muss. Die *Strangströme* sind *rein sinusförmig*. Konstruiert man aus einem Sinusstrom anhand der MKL den dazugehörigen Fluss, stellt man fest, dass jetzt der *Fluss Anteile der dreifachen Netzfrequenz* enthält und somit auch die *Strangspannungen*. Die Ausprägung des höherfrequenten Flusses hängt von der Möglichkeit des magnetischen Rückschlusses ab: bei Manteltransformatoren über die Joche, bei Kerntransformatoren nur über die Luft bzw. ferromagnetische Konstruktionsteile (z. B. Kessel).

Der Flussverlauf lässt sich ebenfalls analytisch demonstrieren. Da jetzt der Strom sinusförmig vorgegeben ist $I(t) = a \sin t$ ergibt sich für den Fluss $\Phi(t) = \tanh I(t)$. Auch hier ändert sich die Kurvenform in Abhängigkeit von der Stromamplitude, hier $a = 0.5 \ldots 2$.

Je höher die Aussteuerung des *eingeprägten* Stromes wird desto mehr nimmt der Flussverlauf eine rechteckige Form an. Die extremen zeitlichen Flussänderungen führen zu hohen Induktionsspannungen und Überhitzung der Eisenkerne. Aus diesem Grund dürfen Stromwandler (siehe Abschnitt Stromwandler) nie mit offenen Klemmen betrieben werden.



3.3.12 Spartransformator

Schaltet man zwei Wicklungen eines Transformators so in Reihe, dass eine Wicklung von der Primär- und Sekundärseite gemeinsam genutzt wird, entsteht ein Spartransformator (Abb. 3.77). Die gemeinsame Wicklung bezeichnet man als *Parallelwicklung*, die andere als *Reihenwicklung*.

- Der Spartransformator kann von beiden Seiten betrieben werden.
- Primär- und Sekundärseite sind galvanisch miteinander verbunden (Nachteil).
- Die gemeinsame Wicklung reduziert Materialkosten, Gewicht und Verluste (Vorteil).

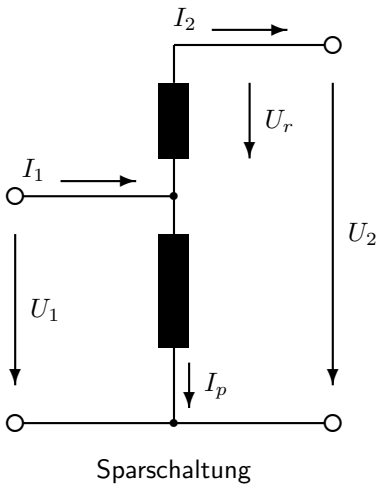


Abb. 3.77: Sparschaltung

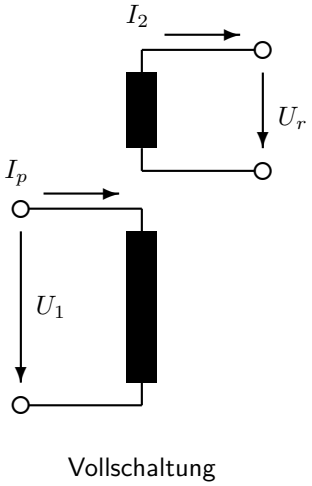


Abb. 3.78: Vollschaltung

Schaltet man Reihen- und Parallelwicklung getrennt (*Vollschaltung*, Abb. 3.78), gilt für die Typenleistung unter Vernachlässigung der Verluste und des Magnetisierungsstromes

$$\boxed{S_T = U_1\, I_p = U_r\, I_2}\,.$$

Mit der *Sparschaltung* läßt sich die *Durchgangsleistung*

$$\boxed{S_D = U_1\, I_1 = U_2\, I_2}$$

übertragen. Aus

$$\frac{S_T}{S_D} = \frac{U_r\, I_2}{U_2\, I_2} = \frac{U_r}{U_2} = \frac{U_2 - U_1}{U_2}$$

bestimmt man die Typenleistung S_T eines Spartransformators, der die Durchgangsleistung S_D übertragen soll, mit

$$\boxed{S_T = S_D \left(1 - \frac{U_1}{U_2}\right)}\,.$$

Je mehr sich das Übersetzungsverhältnis der Spannungen dem Wert 1 nähert, desto kleiner kann die Typenleistung und damit der Materialaufwand (Kernquerschnitt, etc.) gewählt werden.

Beim Spartransformator wird die Typenleistung ($U_r\, I_2$) transformatorisch, der Anteil $U_1\, I_2$ galvanisch übertragen. Der Strom I_p in der gemeinsamen Wicklung ergibt sich aus der Differenz der primären und sekundären Nennströme

$$\boxed{I_p = I_1 - I_2}\,.$$

Zur Bestimmung der *Kurzschlussströme* berechnet man zuerst den der Vollschaltung mit Hilfe der Gleichung (2.31) aus Kapitel Kurzschlussversuch:

$$\boxed{I_{KT} = \frac{U_{1N}}{Z} = \frac{U_{1N}}{Z} \cdot \frac{I_{1N}}{I_{1N}} = I_{1N} \cdot \frac{U_{1N}}{Z \cdot I_{1N}} = I_{1N} \cdot \frac{U_{1N}}{U_{1k}} = \frac{I_{1N}}{u_k}}\,.$$

In der Sparschaltung verringert sich die Kurzschlussspannung auf

$$\boxed{u_{KD} = u_k \left(1 - \frac{U_1}{U_2}\right)}$$

und der Kurzschlussstrom vergrößert sich auf

$$\boxed{I_{KD} = \frac{I_{KT}}{1 - \frac{U_1}{U_2}}}\,.$$

☞ Der Spartransformator führt höhere Kurzschlussströme als der Volltransformator.

Spartransformatoren werden eingesetzt

- zum Ausgleich von Spannungsschwankungen (in Verbindung mit Stufenschaltern),
- als Anlasstransformator,
- als Netzkupplungstransformator in Höchstspannungsnetzen (wegen der im Grenzleistungsbereich doch enormen Materialeinsparung).

Dem erhöhten Kurzschlussstrom muss unter Umständen mit geeigneten Maßnahmen (z. B. mit zusätzlichen Drosseln) begegnet werden.

3.3.13 Einschaltstrom (Rush)

Schaltet man einen leerlaufenden Transformator an eine Wechselspannung

$$u(t) = \hat{u}\,\sin(\omega t + \alpha)\ ,$$

entstehen zum Einschaltzeitpunkt $t = 0$ je nach Nullphasenwinkel α unterschiedliche, elektromagnetische Ausgleichsvorgänge.

Im günstigsten Fall, für $\alpha_{\min} \approx \pm 90\,°$, stellt sich sofort der stationäre Leerlaufstrom ein. Im ungünstigsten Schaltaugenblick, für $\alpha_{\max} = \alpha_{\min} \pm 90\,°$, überlagert sich dem Leerlaufstrom ein Gleichstrom, der exponentiell abklingt. Bei linearem Transformator und ohne Remanenz beträgt der Scheitelwert des Einschaltstromes das Doppelte des stationären Stromes. Berücksichtigt man die Sättigung und einen evtl. vom letzten Ausschalten vorhandenen Remanenzfluss im Eisen, können die Einschaltströme das 10–20-fache des stationären Stromes annehmen. Eine thermische Überlastung tritt nicht ein, da die Zeitkonstante der überlagerten e-Funktion klein ist. Es treten jedoch hohe Stromkräfte in den Wicklungen auf. Weiterhin müssen Schutzeinrichtungen (Sicherungen etc.) die erhöhten Einschaltströmen berücksichtigen.

Die analytische Lösung zu diesem *Rush-Effekt* findet man in [13, Differentialgleichungen].

Im Folgenden wird eine RL-Schaltung untersucht, die von einer Wechselspannungsquelle

$$u(t) = \hat{u}\,\cos(\omega t - \varphi_u)$$

gespeist wird. Es werden zwei Fälle untersucht: L ist eisenlos (Luftspule) und L besitzt einen Eisenkern mit einer Magnetisierungskennlinie. Der Einschaltzeitpunkt wird über den Nullphasenwinkel gesteuert ($\varphi_u = 0\,°, 30\,°, 60\,°, 90\,°$). Abb. 3.79 zeigt den Verlauf des Einschaltstromes

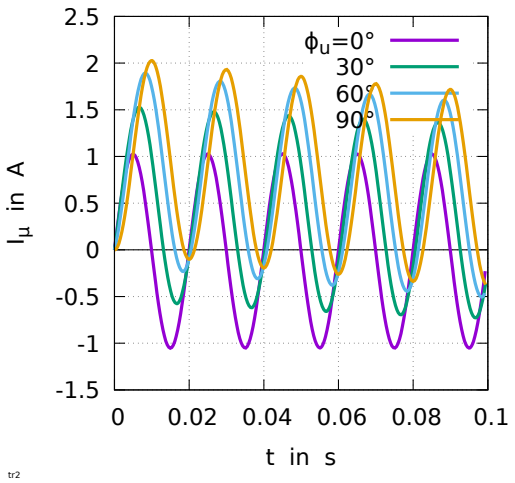


Abb. 3.79: $i(t)$ bei *eisenloser* Spule

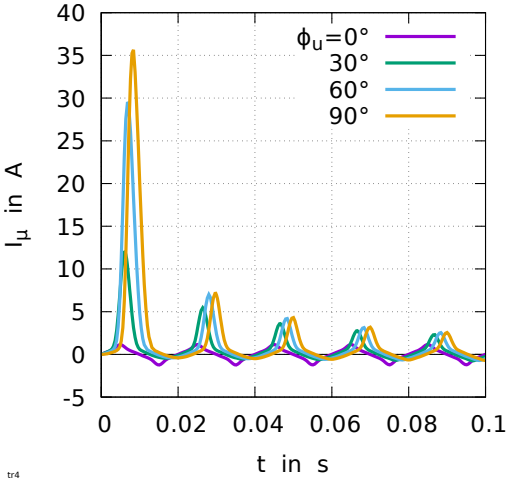


Abb. 3.80: $i(t)$ bei einer Spule *mit Eisenkern*

in Abhängigkeit vom Nullphasenwinkel bei einer *eisenlosen* Induktivität. Man erkennt, dass sich im günstigsten Fall sofort der stationäre Strom einstellt, im ungünstigsten Fall wird der Einschaltstrom doppelt so groß wie der stationäre Strom. Der Strom bleibt sinusförmig.

Extremer werden die Verhältnisse, wenn man die Magnetisierungskennlinie berücksichtigt. Je nach Einschaltzeitpunkt und Aussteuerung der Kennlinie ergeben sich Einschaltströme, die ein

Vielfaches des stationären Stromes betragen können (siehe Abb. 3.80). Unter Umständen kann ein vorhandener Restmagnetismus noch ungünstiger auf die Höhe des Einschaltstromes wirken. In der Abbildung erkennt man deutlich, dass der Strom nicht mehr sinusförmig ist.

☞ Der Einschaltstrom ist zu dem Zeitpunkt am geringsten, wenn $|u(t)|$ seinen Maximalwert hat.

3.3.14 Strom- und Spannungswandler

Die Strom- und Spannungswandler gehören zu den Sondertransformatoren. Ihre hauptsächliche Aufgabe besteht in der Transformation von Spannungen und Strömen auf genormte, einfach messbare Werte und zur galvanischen Trennung von Last- und Messkreis. Die »übertragene« Nennleistung ist $< 100\,\mathrm{VA}$.

Begriffe

Bürde bei Stromwandlern der Scheinwiderstand Z, bei Spannungswandlern der Scheinleitwert S der sekundär angeschlossenen Geräte einschließlich der Zuleitungen;

Fehlwinkel Phasenverschiebung zwischen I_2 und I_1 bei Stromwandlern bzw. U_2 und U_1 bei Spannungswandlern; der Fehlwinkel ergibt sich aus dem Leerlaufstrom I_0; um ihn klein zu halten, beträgt die mittlere Kerninduktion nur $0.1 - 0.2\,\mathrm{T}$;

Nennbürde Bürde von Strom- und Spannungswandlern, auf die sich die Bestimmungen über die Fehlergrenzen beziehen (Bürdenleistungsfaktor $\cos\beta$=0.8);

Nennübersetzung Übersetzungsverhältnis I_{1N}/I_{2N} bei Stromwandlern und U_{1N}/U_{2N} bei Spannungswandlern; die Angabe erfolgt als ungekürzter Bruch;

Nennüberstromziffer bei Stromwandlern Vielfaches von I_{1N}, bei dem die Messabweichung bei Nennbürde nicht 10 % überschreitet;

Reihenspannung diejenige genormte Spannung, für die die Isolation (gemäß VDE 0111) bemessen ist.

Spannungswandler

Spannungswandler sind Transformatoren, die nahezu im *Leerlauf* arbeiten (Abb. 3.81). Sie halten die primärseitige Hochspannung von den angeschlossenen Mess- und Schutzkreisen entfernt und erweitern den Spannungsbereich von Messgeräten, Zählern, Relais und Reglern. Sie müssen die zu erfassende Spannung möglichst verhältnis- und phasengleich in bequem messbare sekundäre Spannungen übersetzen. Als sekundäre Nennspannungen kommen die Spannungen 100 V, $100/\sqrt{3}\,\mathrm{V}$, $100/2\,\mathrm{V}$ und $100/3\,\mathrm{V}$ in Frage.

Spannungswandler haben eine sehr kleine Kurzschlußspannung ($< 1\,\%$). Deshalb darf der Wandler sekundärseitig nicht kurzgeschlossen werden. Wie bei Messgeräten unterscheidet man auch *Klassen* (0.1, 0.2, 0.5, 1 und 3), die die zulässigen prozentualen Übersetzungsfehler im Bereich 0.8 bis $1.2\,U_{1N}$ angeben.

☞ Spannungswandler dürfen sekundär nicht kurzgeschlossen werden und müssen deshalb abgesichert sein (Abb. 3.81).

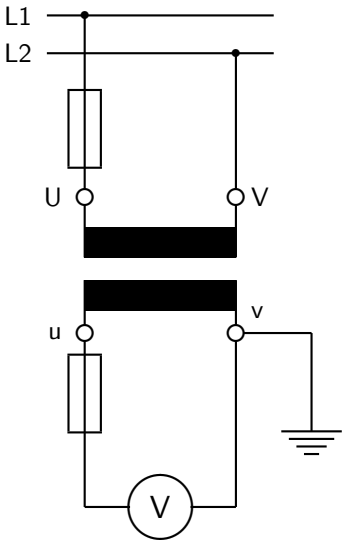


Abb. 3.81: Spannungswandler

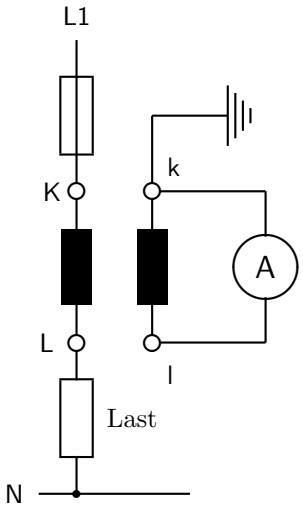


Abb. 3.82: Stromwandler

Stromwandler

Stromwandler sind Transformatoren, deren Primärwicklungen im Lastkreis liegen und deren Sekundärwicklungen über die angeschlossenen Messgeräte, Zähler, Relais oder Regler praktisch *kurzgeschlossen* sind (Abb. 3.82). Sie trennen Mess- und Schutzkreise von der primärseitigen Spannung und schützen die Geräte entsprechend ihrem Überstromverhalten vor Überlastung.

Messwandler müssen innerhalb ihres Arbeitsbereiches (Nennüberstromziffer < 10) die zu messenden Ströme verhältnis- und phasengleich auf bequem messbare sekundäre Ströme übersetzen. Wegen der kleinen Überstromziffer begrenzen sie schon bei verhältnismäßig kleinem Überstrom den Sekundärstrom.

Schutzwandler werden hauptsächlich zum Anschluß von Schutzeinrichtungen benutzt und dürfen deshalb bei Überströmen nur geringe Übersetzungsfehler aufweisen (Nennüberstromziffer $>$ 10).

Die Wirkungsweise des Stromwandlers läßt sich anhand des Durchflutungsgleichgewichts

$$\Theta = I_1 \cdot N_1 - I_2 \cdot N_2 \approx 0$$

veranschaulichen.

Der Primärstrom I_1 ist eingeprägt durch den Lastkreis.

Damit magnetisches Gleichgewicht besteht, muss der induzierte Strom I_2 fließen können, die Sekundärseite kurzgeschlossen sein. Kann der Sekundärstrom wegen offener Sekundärklemmen nicht fließen, treibt der Primärstrom den Eisenkern weit in die Sättigung, der Flussverlauf ändert sich je nach Aussteuerung fast rechteckig, durch die steilen Flussänderungen entstehen lebensgefährlich hohe Sekundärspannungen.

Die sekundären Nennströme sind genormt: 1 A und 5 A. Stromwandler werden entsprechend ihrer Genauigkeit in *Klassen* eingeteilt (siehe Spannungswandler), die den zulässigen prozentualen Übersetzungsfehler bei 1.2-fachem (Klasse G: 2-fachem) Nennstrom angeben.

Die induzierte Spannung an den offenen Sekundärklemmen läßt sich auch analytisch berechnen (siehe Magnetisierungsstrom und magnetischer Fluss):

Bei sinusförmigem Strom

$$i(t) = \hat{i} \sin t \sim H(t)$$

und dem vereinfachten, nichtlinearen Zusammenhang zwischen B und H

$$B \sim \tanh H$$

ergibt sich für den Fluss

$$\Phi(t) \sim B(t) \sim \tanh H(t) = \tanh(\hat{i} \sin t).$$

Abgeleitet nach der Zeit ergibt die induzierte Spannung

$$u(t) \sim \frac{\hat{i} \cos t}{\cosh^2 i(t)}.$$

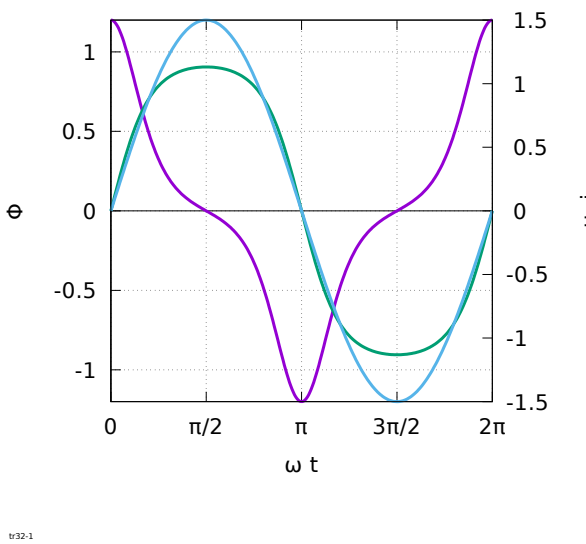


Abb. 3.83: $\hat{i} = 1.5\, I_N$

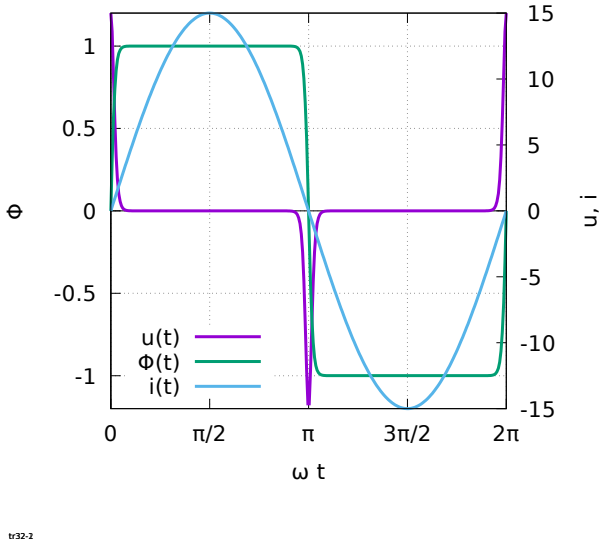


Abb. 3.84: $\hat{i} = 15\, I_N$

Vorgabe ist der sinusförmige Strom $i(t)$. Eine Auswertung der oben hergeleiteten Gleichungen zeigen die Abb. 3.83 und 3.84 für verschiedene Stromamplituden. Man erkennt, dass die Spannungsspitzen jeweils beim Nulldurchgang des Stromes auftreten. Dabei wird der Eisenkern von einem Sättigungszustand in den entgegengesetzten gebracht. Bei genügend hohen Stromamplituden ist der Flussverlauf fast rechteckförmig.

In der Praxis ist der Spannungsverlauf, bedingt durch die Hysterese, asymmetrisch.

☞ Stromwandler dürfen nie mit offenen Sekundärklemmen betrieben werden.

3.4 Drehfelder – Teil 2

Referenz: [19]

3.4.1 Läuferdrehfeld

siehe Drehfelder

3.4.2 Ständerdrehfeld

Magnetfelder entstehen u. a. durch Spulen, die von einem Strom durchflossen werden. Ursache des Stromes können entweder eine von außen angelegte Spannung (Motor) oder die induzierte Spannung selber (Generator) sein[8].

Grundlagen

Um Aussagen über diese Magnetfelder machen zu können, muss der Verlauf der sie verursachenden magnetischen Feldstärke (Erregung) $\vec{H}$ und der damit verbundenen magnetischen Spannung V bzw. Durchflutung Θ bekannt sein.

Den Zusammenhang zwischen Strömen und magnetischen Feldstärken beschreibt der Durchflutungssatz:

$$\Theta = \oint \vec{H} \mathrm{d}\vec{s} = \int_A \vec{J} \mathrm{d}\vec{A} = \sum_j I_j \approx \sum_i H_i \cdot s_i = \sum_i V_i \ .$$

Dieses Gesetz besagt, dass die Summe aller magnetischen Teilspannungen $V_i = H_i \cdot s_i$ über einen geschlossen Weg gleich der Summe der von diesem Weg eingeschlossenen Ströme ist und als Gesamtdurchflutung Θ oder magnetische Spannung V bezeichnet wird.

Im allgemeinen wird man bei der Vorgabe von Strömen I_j und geometrischen Abmessungen s_i mit Hilfe dieses Satzes die magnetischen Feldstärken H_i berechnen. Die dazugehörigen Induktionen B_i erhält man aus

$$B = \mu_0 \ \mu_r(H) \ H \ .$$

Für Luftbereiche setzt man $\mu_r = 1$, für Eisenbereiche ist $\mu_r = f(H)$, in der Praxis erhält man die Werte direkt aus der Magnetisierungskennlinie $B = f(H)$. Für einfache, theoretische Berechnungen setzt man vereinfachend $\mu_r = \infty$, d. h. in den Eisenwegen sind die magnetischen Spannungsabfälle $V_i = H_i \cdot s_i = 0$.

Den Flußverlauf Φ längs einer Raumkurve erhält man aus den Induktionswerten mit dem Integral

$$\Phi = \int_A B \mathrm{d}A \ ,$$

[8] Auf die Entstehung von Feldern durch Permanentmagnete wird an dieser Stelle nicht eingegangen.

im zweidimensionalen Fall vereinfacht sich das Integral zu

$$\Phi(x) = l_i \int B \, \mathrm{d}s \tag{3.39}$$

mit l_i als ideelle Maschinenlänge.

Bei der Auslegung von Maschinen geht man im allg. den umgekehrten Weg: von einem geforderten Fluss schließt man auf die erforderlichen Ströme.

Für die weiteren Betrachtungen interessieren nur der Verlauf der Durchflutung, Induktionen und Flüsse im Luftspalt der Maschinen. Der Integrationsweg längs des Luftspaltes wird mit der Koordinate x beschrieben.

Vorläufig wird angenommen, dass durch die Spulen ein konstanter Strom fließen soll.

Felderregerkurve

Der räumliche Verlauf der magnetischen Spannung $V = f(x)$ im Luftspalt wird als Felderregerkurve bezeichnet. Man erhält sie durch Auswertung des Durchflutungsintegrals längs des Luftspaltes (Abb. 3.85). Dazu legt man eine Anfangskoordinate x_0 fest und erweitert den Integrationsweg in x-Richtung. Unter Vernachlässigung des magnetischen Spannungsabfalls im Eisen treten nur im Luftspalt Teilspannungen auf, die, wenn man den Luftspalt als konstant annimmt, zweimal auftreten und gleich groß sind. Jedes mal, wenn ein Strom in das Umlaufintegral hineinkommt, ändern sich die beiden Teilspannungen unter Berücksichtigung der Stromrichtung. Zur Bestimmung der Durchflutung nimmt man vereinfachend an, der Strom konzentriere sich auf einen Punkt. Als Anfangskoordinate x_0 wählt man zweckmäßigerweise die Koordinate, bei der $B(x_0) = 0$ ist. Dann ist $V(x)$ rein periodisch, die Funktion enthält keinen Gleichanteil.

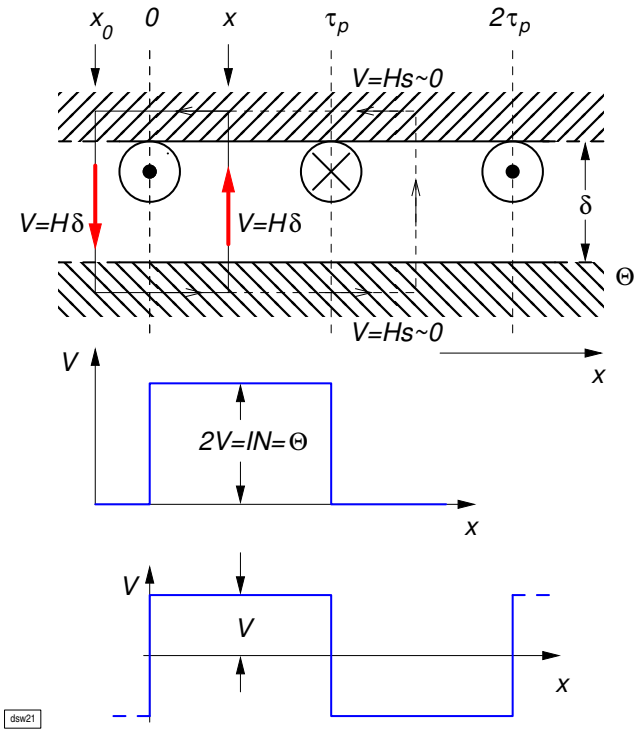


Abb. 3.85: Entstehung der Felderregerkurve

Unter der Annahme eines konstanten Luftspaltes erhält man für eine Maschine mit $p = 1$ und $q = 4$ die Felderregerkurve in Abb. 3.86 (die Größe q gibt die Anzahl der Nuten je Pol und Phase an und wird im Abschnitt Ungesehnte Ganzlochwicklung - Zonenfaktor erklärt).

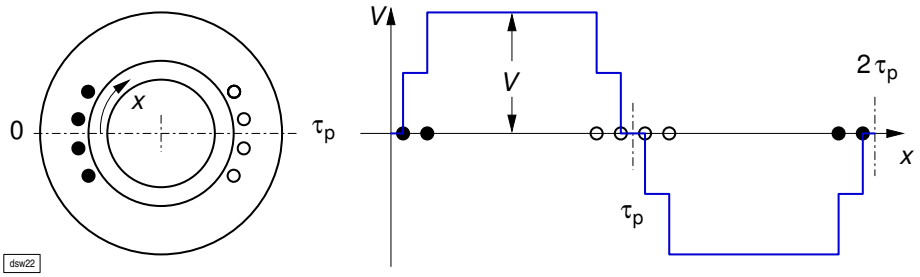


Abb. 3.86: Felderregerkurve mit $p = 1$ und $q = 4$

Der Verlauf der magnetischen Spannung längs des Luftspaltes $V(x)$ entspricht einer Treppenkurve, die sich im Abstand der Nutteilung mit jedem neuen Strom ändert. Die Anzahl der „Treppen“ ändert sich mit q, für $q = 1$ erhält man einen Rechteckverlauf, für $q \to \infty$ erhält man eine Trapezkurve.

Feldkurve

Wegen $H = V/\delta$ folgt für den Luftspalt

$$B = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \cdot \frac{V}{\delta} \,. \tag{3.40}$$

Bei konstantem δ ist der qualitative Verlauf von $B(x)$ identisch mit $V(x)$. Man bezeichnet $B(x)$ als Feldkurve.

Berücksichtigt man die Nutung, ändert sich δ in Abhängigkeit von der Nutteilung. Nach Gleichung (3.40) schwankt die Induktion mit der gleichen Häufigkeit (quasi wie eine Modulation) entlang des Luftspaltes.

Die räumliche Flussverteilung im Luftspalt erhält man schließlich aus der Gleichung (3.39).

Angestrebt wird eine räumlich verteilte Luftspaltinduktion mit Sinusform. Die Felderregerkurven stellen Treppenkurven dar, die für $q \to \infty$ die Form eines Trapezes annehmen. Das trifft auch für die Feldkurve zu, wenn man die Nutung außer acht lässt. Unterzieht man der Feldkurve einer Fourieranalyse, erhält man ein Grundfeld und Oberfelder der Form

$$B(x) = \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} B_\nu \sin\left(\nu\,\pi\,\frac{x}{\tau_p}\right) \,. \tag{3.41}$$

Abb. 3.87 zeigt die räumliche Induktionsverteilung im Luftspalt für die Grund-, die 3. und 5. Oberschwingung einschließlich der dazugehörenden Polteilungen. Abb. 3.95 stellt die Luftspaltdurchflutung eines Synchrongenerators (siehe auch Kapitel Magnetfelder eines Turbogenerators), Abb. 3.129 die dazu numerisch berechnete Induktionsverteilung im Luftspalt dar.

Zeitabhängigkeit

Wird die Durchflutung durch einen Wechselstrom erzeugt in dem man sie z. B. mit cos ωt multipliziert, werden alle bisher ortsabhängigen Größen zusätzlich auch zeitabhängig. Feld- und Durchflutungskurven behalten ihre Position im Luftspalt bei, da sich die Spulen nicht bewegen, es ändern sich nur die Amplituden. Aus $V(x)$ wird $V(x,t)$ und $B(x)$ wird zu $B(x,t)$. Entsprechend ändern sich auch die Amplituden der Grund- und Oberfelder in Gleichung (3.41), so dass gilt

$$B(x,t) = \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} B_\nu \sin\left(\nu\,\pi\,\frac{x}{\tau_p}\right) \cos\,\omega t\ . \tag{3.42}$$

Es liegt ein *Wechselfeld* vor.

Zur dreiphasigen Wicklung kommt man, in dem man zu dem bereits betrachteten Strang die beiden anderen räumlich jeweils um $120\,°_{\text{el}}$ anordnet. In den drei Strängen fließen außerdem Ströme, die eine zeitliche Phasenverschiebung von ebenfalls $120\,°$ besitzen. Im Luftspalt bilden sich jetzt 3 räumlich um $120\,°_{\text{el}}$ versetzte Feldkurven aus, die zusätzlich noch jeweils um $120\,°$ zeitlich verschoben sind.

Die resultierende Luftspaltinduktion erhält man durch Addition der drei Anteile nach Gleichung (3.42), muss aber die zeitlich Phasenverschiebung der Strangströme berücksichtigen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
B_U(x,t) &= \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} B_\nu \sin\,\nu\left(\pi\,\frac{x}{\tau_p}\right) \cos\,\omega t \\
B_V(x,t) &= \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} B_\nu \sin\,\nu\left(\pi\,\frac{x}{\tau_p} - \frac{2}{3}\,\pi\right) \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\,\pi\right) \\
B_W(x,t) &= \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} B_\nu \sin\,\nu\left(\pi\,\frac{x}{\tau_p} + \frac{2}{3}\,\pi\right) \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\,\pi\right) \\
B_{\text{res}}(x,t) &= B_U(x,t) + B_V(x,t) + B_W(x,t)\ .
\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass sich die Summe der drei Komponenten B_{res} in zwei umlaufende Anteile zerlegen lässt:

Mit der Drehrichtung der Ströme lauten sie:

$$B_m(x,t) = \sum_{v=1,7,13,19,\ldots} \frac{3}{2}\,B_\nu \sin\left(\nu\,\pi\,\frac{x}{\tau_p} - \omega t\right) \tag{3.43}$$

gegen die Drehrichtung

$$B_g(x,t) = \sum_{\nu=5,11,17,23,\ldots} \frac{3}{2}\,B_\nu \cos\left(\nu\,\pi\,\frac{x}{\tau_p} + \omega t\right) \tag{3.44}$$

Alle durch $m = 3$ teilbaren Ordnungszahlen treten nicht auf.

Für das *Grundfeld* erhält man somit

$$B_{1\text{res}}(x,t) = \frac{3}{2}\,B_1 \sin\left(\pi\,\frac{x}{\tau_p} - \omega t\right)\ .$$

Dieser Ausdruck beschreibt eine räumlich sinusförmig verteilte Induktion, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

Die *Amplituden der Oberfelder* errechnen sich aus

$$B_\nu = B_1 \frac{\xi_\nu}{\nu \xi_1}$$

mit den Wicklungsfaktoren ξ_ν, auf die im Kapitel 3.4.4 näher eingegangen wird. Die Oberfelder erzeugen Luftspaltfelder wie eine Maschine mit νp Polpaaren, ihre *Umlaufdrehzahlen* bestimmen sich aus

$$n_\nu = \frac{f_1}{\nu p} = \frac{n_1}{\nu} \,. \tag{3.45}$$

Amplituden und Umlaufdrehzahlen nehmen hyperbolisch mit der Ordnungszahl ab.

Abb. 3.88 zeigt den räumlichen und zeitlichen Induktionsverlauf für die Grund- und 11. Oberschwingung für 2 Polteilungen (x-Achse) und eine halbe Zeitperiode (t-Achse). Deutlich erkennt man, dass sich die Grundschwingung nach rechts, die Oberschwingungen auf der Grundschwingung nach links bewegen[9].

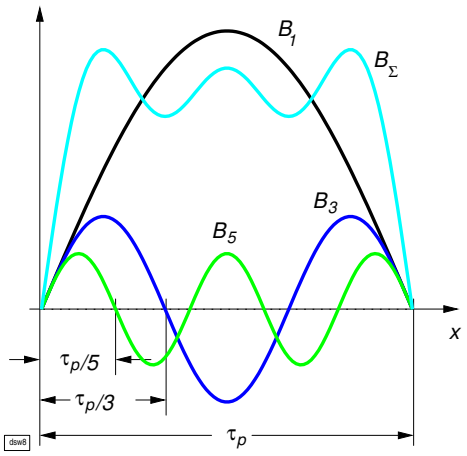


Abb. 3.87

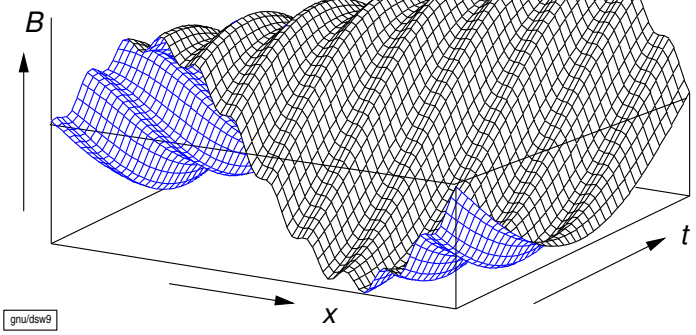


Abb. 3.88

3.4.3 Raumzeiger

Die Ströme in den Phasen sind nur zeitabhängig. Das von ihnen erzeugte Drehfeld ändert mit der Zeit auch seine räumliche Lage. Aus den zeitlichen Augenblickswerten der Ströme kann unter Berücksichtigung der räumlichen Anordnung ein Drehfeldvektor konstruiert werden, der *Raumzeiger* (siehe Kapitel Drehfelder, A.8.1 und [7]).

Raumzeiger können anderen physikalischen Größen zugeordnet werden. Spannungsraumzeiger geben die Richtung der größten Spannungsamplitude an und liegen in der Achse der dazugehörigen, evtl. fiktiven Spule. Stromraumzeiger liegen in der Achse einer evtl. fiktiven Spule, die eine maximale Durchflutungsverteilung erzeugt.

Raumzeiger berücksichtigen nur die Grundschwingung.

[9] Die Amplitude der Oberschwingung ist in der Zeichnung überhöht dargestellt.

3.4.4 Drehstromwicklung: Wicklungsfaktoren

Ungesehnte Ganzlochwicklung - Zonenfaktor

Bei den folgenden Betrachtungen werden sinusförmiger Feldverlauf und sinusförmige Spannungen vorausgesetzt.

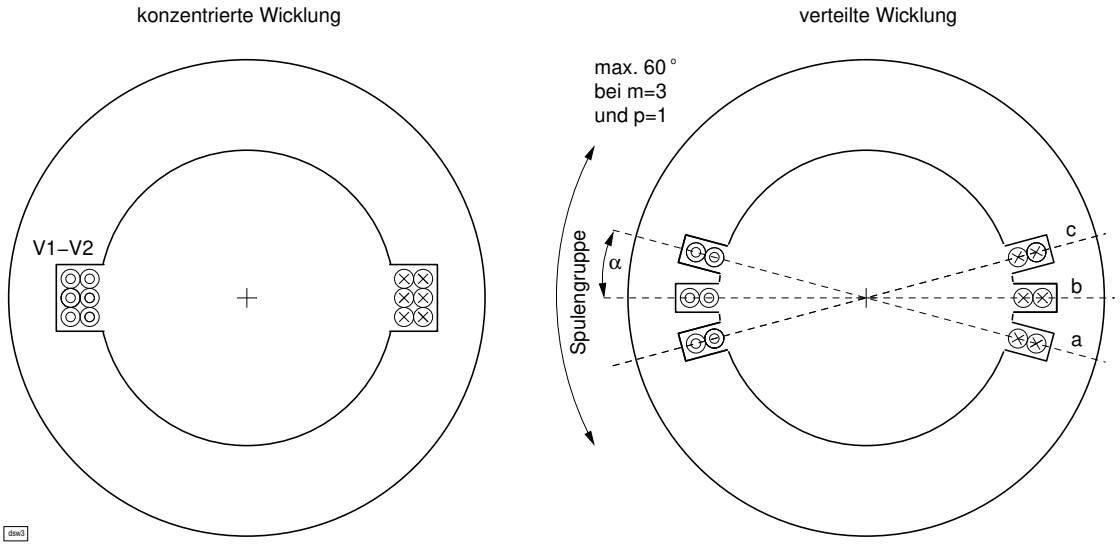


Abb. 3.89: Konzentrierte und verteilte Wicklungen

Im allgemeinen verteilt man die Wicklung eines Stranges nicht auf eine Spule (konzentrierte Wicklung), sondern verteilt sie auf mehrere Nuten (Abb. 3.89). Als *Spulengruppe* bezeichnet man benachbarte Spulen, die zu einem Strang gehören. Die Anzahl der Nuten je Pol und Phase erhält man aus

$$\boxed{q = \frac{N}{2 \cdot p \cdot m}} \qquad (\textit{Lochzahl}) \; .$$

Ist q ganzzahlig, spricht man von einer *Ganzlochwicklung*, andernfalls liegt eine *Bruchlochwicklung* vor.

Die in einem Stab (Spulenseite) induzierte Teilspannung lässt sich über die Beziehung

$$\boxed{u_i = B \cdot l \cdot v}$$

berechnen. Für die verteilte Wicklung ergibt sich entsprechend Abb. 3.90 die in einem Strang je Pol induzierte Spannung $\vec{U}$ aus der geometrischen Addition der Teilspannungen (hier $\vec{U}_a + \vec{U}_b + \vec{U}_c$ wegen $q = 3$). Der *Zonenfaktor* ξ_z beschreibt das Verhältnis von geometrischer Spannungssumme zu arithmetischer Spannungssumme:

$$\xi_z = \frac{\vec{U}_a + \vec{U}_b + \ldots}{|\vec{U}_a| + |\vec{U}_b| + \ldots} = \frac{U}{q \cdot U_s} = \frac{\sin q \cdot \frac{\alpha}{2}}{q \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} \leq 1 \tag{3.46}$$

wobei α der Winkel zwischen zwei benachbarter Nuten ist und damit die Phasenverschiebung zwischen den in diesen Nuten induzierten Teilspannungen darstellt (siehe auch Abb. 3.90):

$$\boxed{\alpha = p \, \frac{2\,\pi}{N} = \frac{180°}{m \cdot q}} \; . \tag{3.47}$$

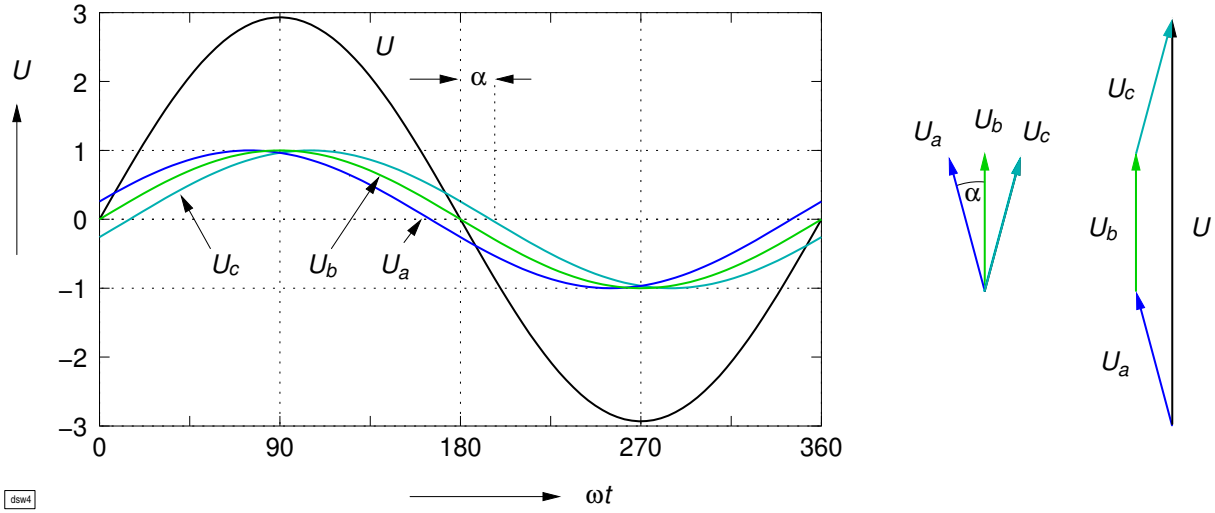
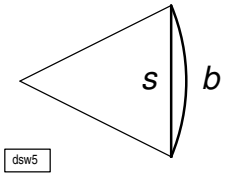


Abb. 3.90: Teilspannungen und Gesamtspannungen einer verteilten Wicklung

Für $q \to \infty$ erhält man eine gleichmäßige Wicklungsverteilung. Der Zonenfaktor stellt das Verhältnis von Sehne zu Bogen dar und hat dann den kleinsten Wert $\xi_z = \frac{s}{b}$ (geringste Ausnutzung).
Für $m = 3$ gelten die Werte der nebenstehenden Tabelle. Für dreiphasige Wicklungen nimmt man meistens $\xi_z = 0.96$ an.

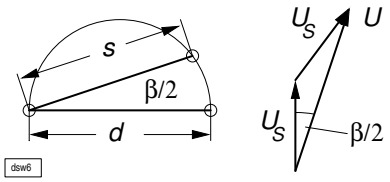
q	ξ_z
1	1
2	0.966
3	0.96
4	0.958
∞	0.955



Gesehnte Ganzlochwicklung - Sehnungsfaktor

Liegen die Spulenseiten einer Spule genau um eine Polteilung τ_p versetzt (wie z. B. in Abb. 3.89), spricht man von einer *Durchmesserwicklung* (Spulenweite $W = \tau_p$). Da sie genau um 180° auseinanderliegen, umfassen sie den gesamten Fluss, die in den beiden Spulenseiten induzierten Spannungen U_s addieren sich zur doppelten Spannung U.

Beträgt die Spulenweite $W < \tau_p$, spricht man von einer *gesehnten Wicklung*. Sie umfasst einen geringeren Fluss, die induzierten Spannungen U_s haben die Phasenlage β zueinander, die geometrische Summe der Teilspannungen U ist kleiner als die algebraische Summe $2\,U_s$. Das wird durch den *Sehnungsfaktor* ξ_s ausgedrückt:



$$\xi_s = \frac{U}{2U_s} = \frac{s}{d} = \cos\frac{\beta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{W}{\tau_p}\right) \quad . \tag{3.48}$$

Oberfelder

Bisher wurde von sinusförmigem Spannungs- bzw. Feldverlauf ausgegangen. Die betrachteten Einflussfaktoren gelten demnach nur für das Grundfeld bzw. die Grundschwingung.

Der Konstrukteur von Wechselstromgeneratoren versucht die Maschine so zu bauen, dass sie eine sinusförmige Spannung abgibt. Dazu müsste die Induktionsverteilung längs des Luftspaltes

sinusförmig sein. Diese Forderung lässt sich nur eingeschränkt erfüllen (variabler Luftspalt bei Schenkelpolgeneratoren, verteilte Wicklung bei Turboläufern).

Bei abweichendem sinusförmigen Induktionsverlauf treten neben dem Grundfeld auch Oberfelder der Ordnungszahl ν auf, die man mittels Fourieranalyse ermitteln kann (Abb. 3.87). Diesen Oberfeldern kann man analog wie dem Grundfeld eine Polteilung $\tau_{p\nu}$ zuordnen, die dem νten Teil des Grundfeldwertes entspricht:

$$\tau_{p\nu} = \frac{\tau_p}{\nu} \,.$$

Analog wie sich der elektrische Winkel α_{el} gegenüber dem mechanischen Winkel α_{mech} mit der Polpaarzahl p vervielfacht, müssen alle Winkelbeziehungen bei der Berechnung der Wicklungsfaktoren des Grundfeldes in den Gleichungen (3.46) und (3.48) mit der Ordnungszahl ν vervielfacht werden. Daraus ergeben sich für das νte Oberfeld der Zonenfaktor

$$\boxed{\xi_{z\nu} = \frac{\sin\left(q \cdot \frac{\nu \cdot \alpha}{2}\right)}{q \cdot \sin\left(\frac{\nu \cdot \alpha}{2}\right)}}$$

und der Sehnungsfaktor

$$\boxed{\xi_{s\nu} = \cos\left(\frac{\nu \cdot \beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \nu \cdot \frac{W}{\tau_p}\right)} \,.$$

Der resultierende Wicklungsfaktor ist das Produkt beider Faktoren:

$$\boxed{\xi_\nu = \xi_{z\nu} \cdot \xi_{s\nu}} \,.$$

Induzierte Spannung

Spannung durch das Läufergleichfeld

In einem Leiter der Länge l wird eine Spannung induziert

$$u_i = B \cdot l \cdot v$$

mit v als Relativgeschwindigkeit zwischen Feld B und dem Leiter, die im Luftspalt

$$v = 2 \cdot \tau_p \cdot p \cdot n_1$$

beträgt. Für das *Grundfeld* folgt daraus

$$u_i = B_1 \cdot l \cdot 2 \cdot \tau_p \cdot p \cdot n_1 \,.$$

Bei N_1 Windungen, also $2N_1$ Stäben pro Phase und einem Wickelfaktor ξ_1 ergibt sich für den Scheitelwert

$$\sqrt{2}\, U_{i1} = 2 \cdot N_1 \cdot B_1 \cdot 2 \cdot l \cdot \tau_p \cdot p \cdot n_1 \cdot \xi_1 \,.$$

Den Zusammenhang zwischen Hauptfluss und Luftspaltinduktion über den Polbedeckungsfaktor[10] beschreibt

$$\Phi_1 = \frac{2}{\pi} \cdot B_1 \cdot l \cdot \tau_p \ .$$

Mit der Beziehung $n_1 = f_1/p$ ergibt sich für den Effektivwert

$$U_{i1} = 4.44 \cdot N_1 \cdot \xi_1 \cdot f_1 \cdot \Phi_1 \ . \tag{3.49}$$

Analog dazu erhält man auch den Spannungsanteil der νten Oberschwingung

$$U_{i\nu} = 4.44 \cdot N_1 \cdot \xi_\nu \cdot f_1 \cdot \nu \cdot \Phi_\nu \ . \tag{3.50}$$

Man beachte, dass sich die Oberfelder des Läufers mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen wie das Grundfeld.

Man kann die Spannung auch über den verketteten Fluss berechnen. Mit dem Grundwellenfluss $\Phi(t) = \Phi_1 \sin \omega t$ erhält man

$$u_{i1}(t) = N_1 \cdot \xi_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N_1 \cdot \xi_1 \cdot \Phi_1 \cdot \omega \cdot \cos \omega t = N_1 \cdot \xi_1 \cdot \Phi_1 \cdot 2\pi \cdot f_1 \cdot \cos \omega t \tag{3.51}$$

und daraus den Effektivwert wie in Gleichung (3.49).

Spannung durch das Ständerdrehfeld

Das durch die Ständerwicklung hervorgerufene Drehfeld induziert außerdem Spannungen in der Ständerwicklung selbst (Selbstinduktionsspannungen). Für die Grundschwingung gilt ebenfalls Gleichung (3.49), für die Oberschwingungen gilt abweichend von Gleichung (3.50)

$$U_{i\nu} = 4.44 \cdot N_1 \cdot \xi_\nu \cdot f_1 \cdot \Phi_\nu \ .$$

Bedeutung der Wicklungsfaktoren

Wenn der Flussverlauf nicht exakt sinusförmig gemacht werden kann, erzeugen die Oberfelder in der induzierten Spannung ebenfalls Oberschwingungen, und zwar mit den gleichen Ordnungszahlen. Die Grund- und Oberschwingungen lassen sich nach Gleichung (3.50) berechnen.

Zur Einhaltung der geforderten Sinusform (siehe DIN VDE 0530 Teil 1, Hauptabschnitt 11: Kurvenform von Spannungen, Hauptabschnitt 4: Elektrische Bedingungen) versucht man möglichst, den Grundschwingungsanteil der Spannung groß und den Oberschwingungsanteil klein zu machen. Für die Grundschwingung wird man $\xi_1 \to 1$, für die Oberschwingung $\xi_\nu \to 0$ anstreben. Dies geschieht durch entsprechende Wahl von Zonung und Sehnung, da $\xi_\nu = \xi_{z\nu} \cdot \xi_{s\nu}$.

☞ Durch Zonung verringert man den Oberschwingungsgehalt, durch Sehnung kann man bestimmte Oberschwingungen ganz unterdrücken.

Versuch 3.4.1 *Oszilloskopieren der Spannung einer leerlaufenden Synchronmaschine*

[10] Dazu wird die Fläche einer Sinushalbwelle für eine Polteilung $\tau_p = \pi$ durch ein flächengleiches Rechteck ersetzt. Aus $\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = 2$ ergibt sich die Höhe des Rechtecks zu $\frac{2}{\pi}$.

3.4.5 Drehstromwicklungen: Ausführungen

Die prinzipielle Anordnung einer Wicklung zur Erzeugung einer symmetrischen, 3-phasigen Spannung wurde im Kapitel Drehstromwicklung behandelt. Hierbei handelt es sich um eine 2-polige Maschine mit der kleinstmöglichen Nutenzahl (1 Nute pro Pol und Phase, also $q = 1$). In der Praxis haben die Maschinen mehr Nuten pro Phase und Pol. Man verteilt die Spulen auf mehrere Nuten. Dabei kommen verschiedene Wicklungsausführungen zur Anwendung (siehe auch Wicklungen). Im folgenden wird eine 4-polige Maschine mit 24 Nuten betrachtet ($N = 24, p = 2, q = 2$).

Der Bildnachweis der folgenden Abbildungen befindet sich am Ende von Kapitel 3.1.10.

Einschichtwicklung

Hier kommt in jede Nut nur eine Spulenseite. Die einzelnen Spulenseiten eines Stranges können unterschiedlich zu einer Spulengruppe zusammengeschaltet werden.

Spulen mit gleicher Weite (Stabwicklung)

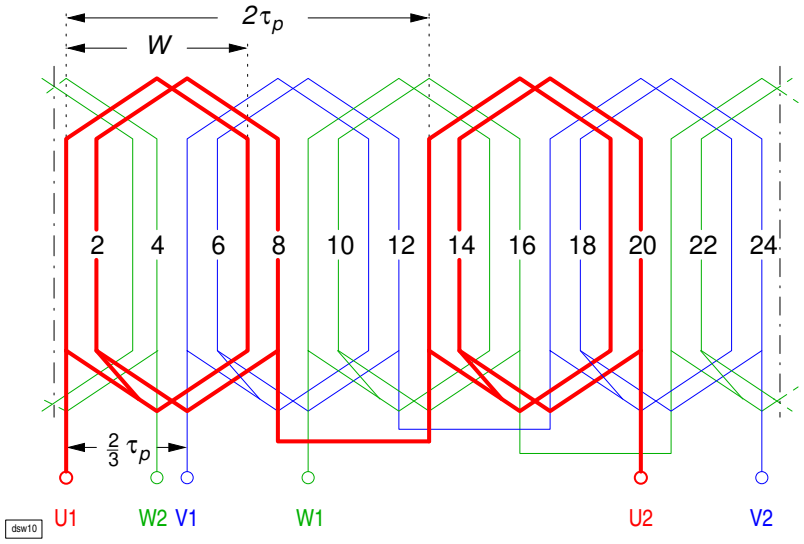
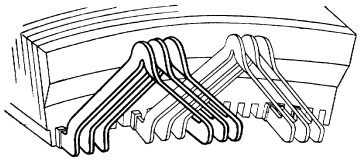


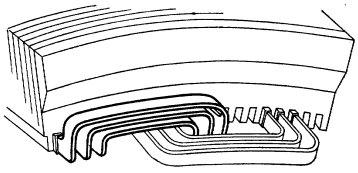
Abb. 3.91: Einschwichtwicklung mit Spulen gleicher Weite

Es werden immer Spulenseiten miteinander verbunden, deren Abstand genau einer Polteilung entspricht, also $W = \tau_p$ (Abb. 3.91). Der dazugehörige Wickelkopf hat den nebenstehenden Aufbau.


bilder/abb17

Spulen ungleicher Weite (Spulenwicklung)

Die Verbindung der zu einem Strang gehörenden Spulenseiten bilden konzentrische Spulengruppen (Abb. 3.92). Die Teilspulen haben ungleiche Weite, die Spulenweite entspricht im Mittel der Polteilung, also $W = \tau_p$. Der dazugehörige Wickelkopf hat den nebenstehenden Aufbau.


bilder/abb10

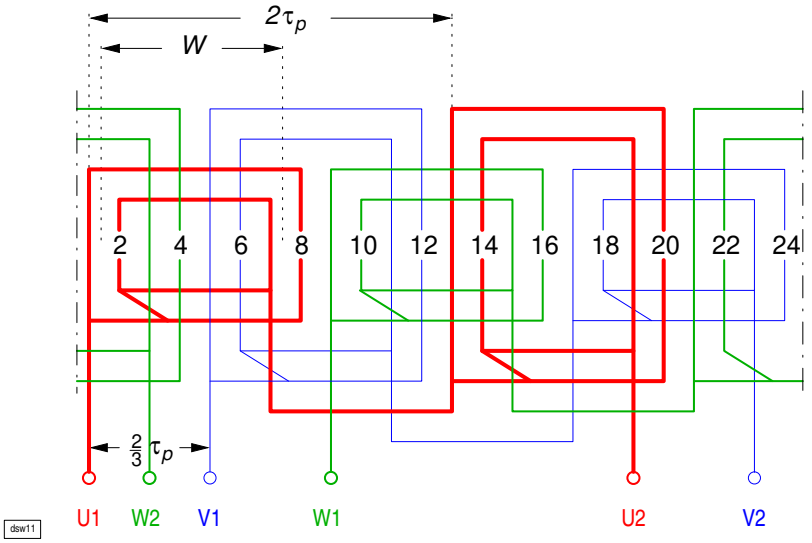
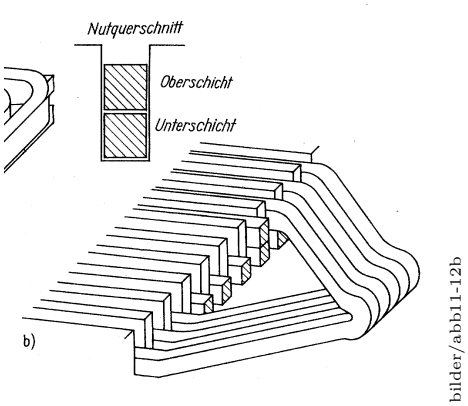


Abb. 3.92: Einschichtwicklung mit Spulen ungleicher Weite

Zweischichtwicklung



Zweischichtwicklungen entstehen beim Sehnen. Hierbei liegen zwei Spulenseiten verschiedener Stränge übereinander. Eine Spulenseite liegt in der Oberschicht, die andere in der Unterschicht.
Eine ausführliche Beschreibung einer ausgeführten Zweischichtwicklung enthält der Abschnitt Aufbau einer Ständerwicklung für eine Synchronmaschine.

Bruchlochwicklungen

Wenn die Anzahl q der Nuten pro Pol und Strang nicht ganzzahlig ist, spricht man von einer Bruchlochwicklung. Um dies zu erreichen, haben die Spulengruppen eines Stranges unterschiedliche Windungszahlen. Die Formeln für die Wicklungsfaktoren gelten nicht. Die Berechnung wird durch den unsymmetrischen Wicklungsaufbau erschwert. Generell lassen sich Oberschwingungen in den Spannungen mit Bruchlochwicklungen besser unterdrücken als mit Ganzlochwicklungen (bei etwa gleichem q).

Reaktanzen

Siehe Abschnitt Streufelder.

3.4.6 Aufbau einer Ständerwicklung für eine Synchronmaschine

Referenz: [20, 21]

Möchte man eine elektrische Maschine kennenlernen, dann muss man sich zuerst mit ihren Wicklungen beschäftigen. Der beste Zugang ist, relativ einfache und überschaubare Wicklungen von Anfang an aufzubauen. Begonnen sei mit der Ständerwicklung.

Die Aufgabe lautet:

> Man entwickele für einen zweipoligen Turbogenerator ($2p = 2$), dessen Nutzahl $N = 30$ beträgt, eine dreisträngige oder dreiphasige ($m = 3$) Schleifenwicklung mit 2 Stäben ($z_n = 2$) in einer Nut und einem Schritt von 12/15.

Was heißt: eine dreiphasige Wicklung? Es bedeutet, dass 3 Phasen oder Stränge vorzusehen sind. Sie sollen folgendermaßen bezeichnet werden:

1. Strang $U1 - U2$
2. Strang $V1 - V2$
3. Strang $W1 - W2$

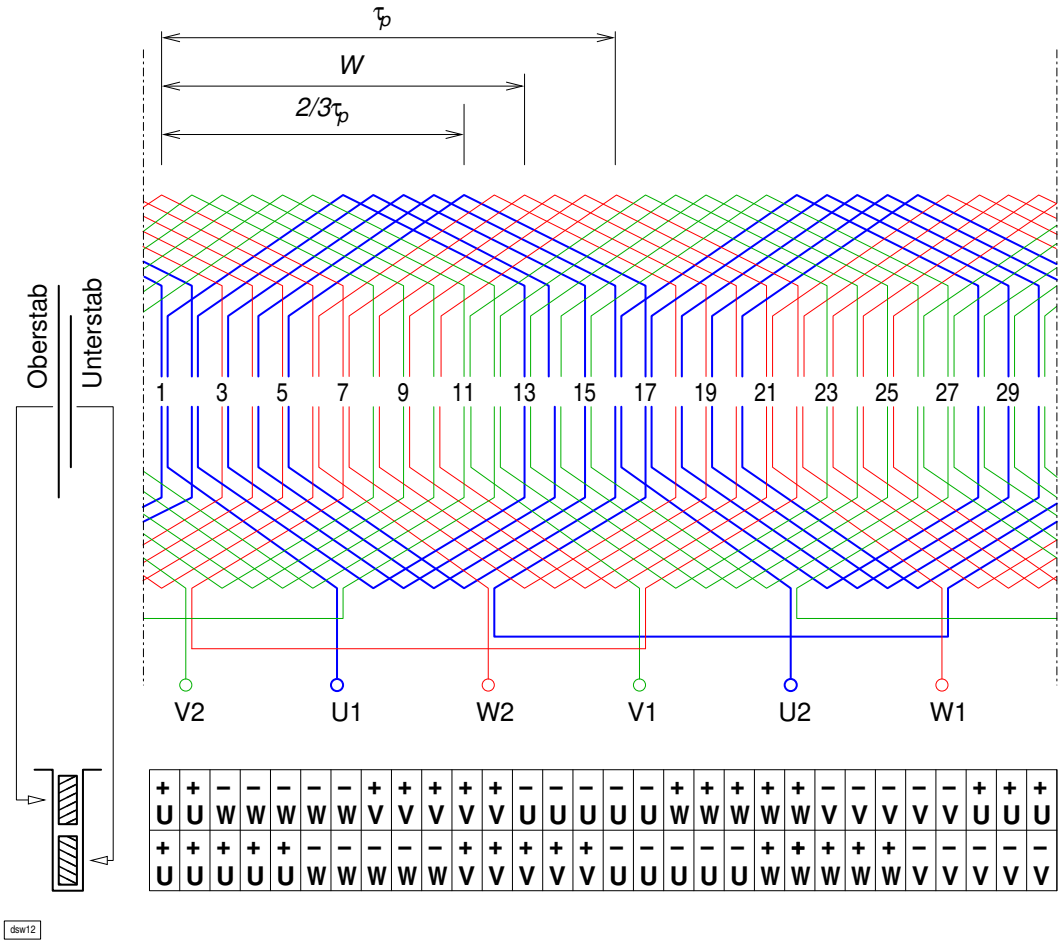


Abb. 3.93: Ständerwicklungsanordnung und Zonenplan für $N = 30, p = 1, W = 12$, Schritt=12/15

Der 1. Buchstabe stellt die Eingangsklemme und der 2. die Sternpunktklemme dar. Die Stränge sind um den Winkel $\vartheta_{\mathrm{str}} = 2\,\pi/3\,p$ oder $120\,°/p$ gegeneinander räumlich am Umfang verschoben. Da im Elektromaschinenbau das Drehfeld in der Maschine nach rechts läuft, d. h. im Bild 3.93 in Richtung der positiven ϑ–Achse, muss auch die Strangfolge dementsprechend sein: Zuerst also der Strang $U1-U2$, um ϑ_{str} nach rechts versetzt der Strang $V1-V2$ und noch einmal um ϑ_{str} nach rechts versetzt, der Strang $W1-W2$. Damit liegen die Anfänge der Stränge fest. Man muss nun die zugehörigen Nutnummern bestimmen.

Zu diesem Zweck zeichnet man in gleichem Abstand eine Zahlenreihe von $1, 2, \ldots, N$ auf (s. Bild 3.93, Mitte). Der Nullpunkt des zylindrischen Koordinatensystems liegt zwischen Nut 1 und Nut N. Die r–Achse steht senkrecht auf der Oberfläche des Bildes, die ϑ-Achse weist nach rechts, und die z-Achse zeigt auf den oberen Bildrand.

Willkürlich legt man den 1. Stab von $U1-U2$ in den Grund der Nut 1 (= Unterstab, Rückenstab, kurzer axialer Strich), der 1. Stab von $V1-V2$ folgt um $\vartheta^*_{\mathrm{str}} = 10$ Nutteilungen nach rechts verschoben und — um weitere 10 Nutteilungen nach rechts versetzt — der 1. Stab von $W1-W2$. Es gilt:

$$\vartheta^*_{\mathrm{str}} = \frac{N}{3p}\ .$$

Es wird hier nur das Wickeln eines Stranges betrachtet. Die beiden anderen gehorchen dem gleichen Schema.

Für den nächsten Stab des Stranges $U1-U2$, der nunmehr zur Nutöffnung hin liegen muss (= Oberstab, Bohrungsstab, langer axialer Strich), benötigt man den Schritt. Die Zahlenangabe 12/15 bedeutet: die Spulenweite $\vartheta^*_{\mathrm{Ws}}$ beläuft sich auf 12 Nutteilungen, die Polteilung $\vartheta^*_{\tau_p}$ auf 15 Nutteilungen. Es gilt:

$$\vartheta^*_{\tau_p} = \frac{N}{2p}\ .$$

Da der 1. Stab immer in positiver z-Richtung durchlaufen wird, muss der um $\vartheta^*_{\mathrm{Ws}}$ entfernt liegende in negativer z-Richtung durchlaufen werden. Man ist jetzt bei Nutnummer $1+\vartheta^*_{\mathrm{Ws}} = 13$ angelangt. Der nächste Unterstab kommt in die Nut 2 und der nächste Oberstab in die Nut 14, bis $q = \frac{N}{2pm}$ Nuten mit Unterstäben belegt sind. Bei dem hier gewählten Beispiel ist $q = 5$. Der letzte Oberstab des 1. Poles liegt in Nut 17.

Nun geht man zum 2.Pol über. Von Nut 1 an gerechnet, liegt er um $\vartheta^*_{\tau_p} = 15$ Nutteilungen entfernt. In Nut 16 kommt wieder der 1. Unterstab hinein. Man wickelt dann weiter wie beim 1. Pol, man muss ihn jedoch im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, d. h. die Verbindung muß von Nut 17 bis zur Nut 2 verlaufen. Hätte die Maschine noch mehr Pole, dann würde der 3. wieder im Uhrzeigersinn und der 4. im Gegenuhrzeigersinn usw. zu durchlaufen sein. Wicklungen, bei denen q eine ganze Zahl ist, bezeichnet man als *Ganzlochwicklungen*.

☞ Turbogeneratoren rüstet man vorzugsweise mit derartigen zweischichtigen Ganzlochwicklungen aus. Supraleiter-Generatoren erhalten eine Einschicht-Ganzlochwicklung. Schenkelpolmaschinen werden auch mit Bruchlochwicklungen versehen. Bei dieser Wicklungsart ist q eine ganze Zahl mit einem echten Bruch, z. B. $2\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{5}$.

Aus dem Wicklungsschema Bild 3.93 lässt sich auch die Windungszahl w pro Phase ermitteln:

$$w = \frac{N\,z_n}{2\,m\,a}\ .$$

Bei dem hier gewählten Wicklungsbeispiel ist $N = 30,\ z_n = 2,\ m = 3$ und $a = 1$. Damit wird

$$w = \frac{30 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 1} \ .$$

Davon kann man sich durch Abzählen in Bild 3.93 leicht überzeugen.

Die Skizze in Abb. 3.94 zeigt den Turbogenerator im Querschnitt. Der aktive Teil der Maschine ist nur für eine Polteilung gezeichnet, der Wickelkopf für $2\,\tau_p$. Man erkennt das Polrad mit der Erregerwicklung in den Rotornuten, den großen Luftspalt und die Evolventenwicklung mit den Ständernuten. Der Vorteil der räumlichen Evolvente liegt in dem konstanten Abstand zwischen

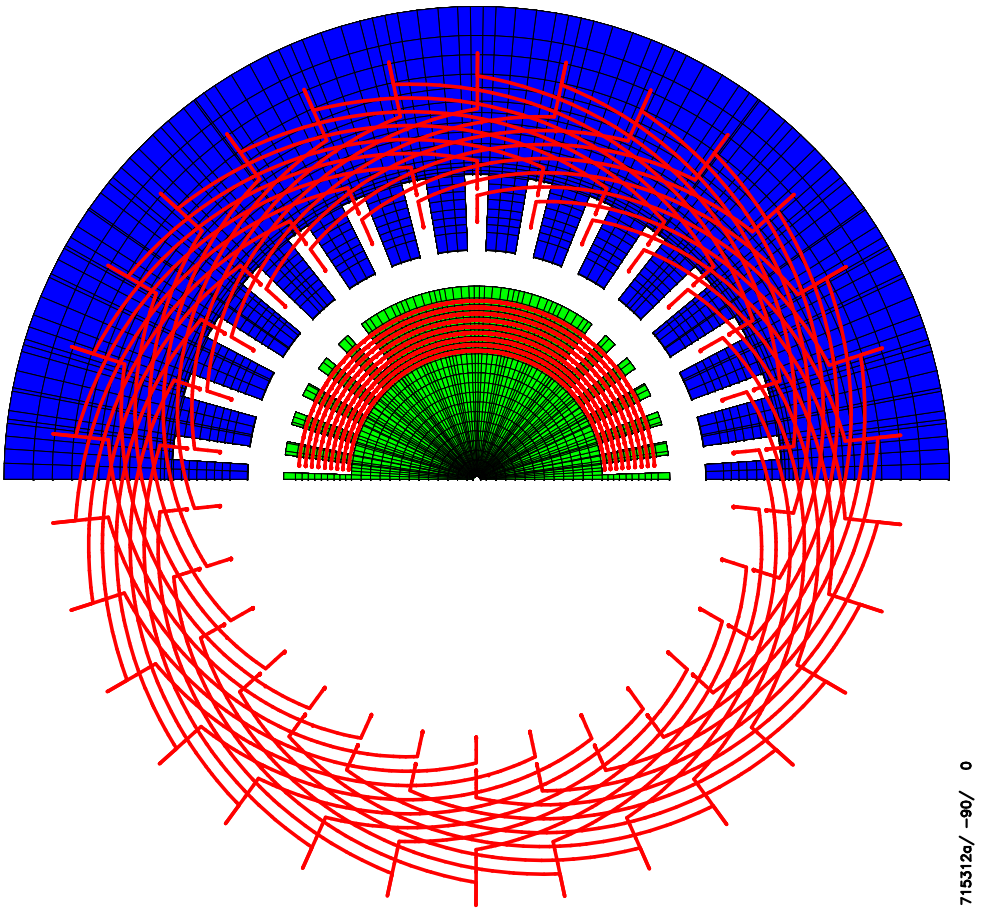


Abb. 3.94: Evolventenwicklung eines Turbogenerators

benachbarten Leitern im Wickelkopf. Die Erregerwicklung besteht aus konzentrischen Spulen, die um den Hauptpol angeordnet sind.

Die Felderregerkurve (siehe Felderregerkurve) zu einem willkürlich gewählten Zeitpunkt t' erhält man, indem man die drei Augenblickswerte der Strangströme $I_U(t'), I_V(t'), I_W(t')$ ermittelt

und die Werte vorzeichenrichtig den Unter- und Oberstäben in allen Nuten zuordnet (Abb. 3.93, Zonenplan U+, V+, etc.). Anschließend berechnet man das Integral $V = \oint \vec{H} \mathrm{d}\vec{s}$ indem man willkürlich bei Nut 1 anfängt und den Integrationsweg nutweise erweitert bis man wieder bei Nut 1 ankommt. Das läuft daraus hinaus, dass man im Prinzip die Summe der im Integrationsweg eingeschlossenen Ströme in Abhängigkeit der Luftspaltposition bestimmt. Abb. 3.95 zeigt die Felderregerkurve der belasteten Maschine. Die '0'-Linie ist eine fiktive Linie, die nur den Anfang

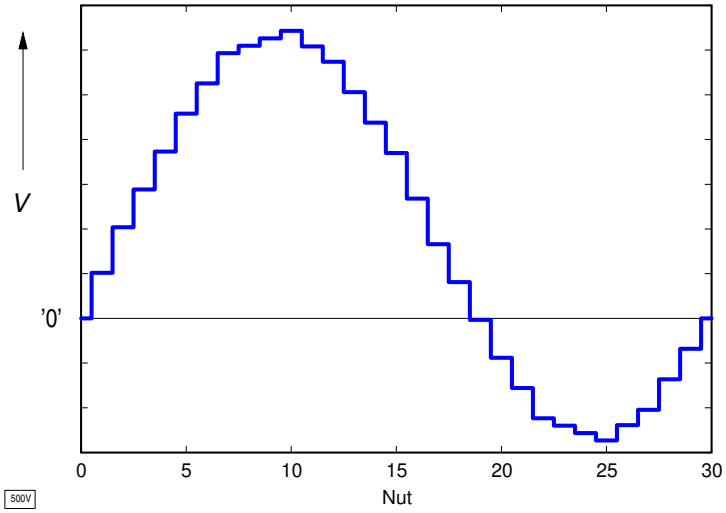


Abb. 3.95: Gesamtdurchflutung bei Belastung

und das Ende der Integration markiert, da das Integral über den gesamten Luftspalt ($2\,\tau_p$) Null werden muss. Mittels Fourieranalyse lässt sich aus dieser »Treppenkurve« der Ständerdurchflutung die Lage des Raumzeigers für die Grundschwingung des Ständerstromes $\underline{I}_1$ ermitteln. Die Höhe der »Treppenstufen« ist ungleichmäßig, da die Änderung der Ständerströme je Nut nicht gleichmäßig erfolgt (siehe Zonenplan in Abb. 3.93). Das Ständerfeld überlagert sich mit dem Erregerfeld des Polrades (Ankerrückwirkung) und es stellt sich, je nach Art der Belastung des Generators ($\cos\varphi$), das resultierende Luftspaltfeld ein. Das Kapitel Magnetfelder eines Turbogenerators befasst sich ausführlich mit dem Luftspaltfeld des Turbogenerators bei Leerlauf und Belastung.

3.5 Asynchronmaschine – Teil 2

3.5.1 Herleitung des Ersatzschaltbildes

Der Luftspaltfluss Φ_h (verketteter Hauptfluss) induziert nach Gleichung (3.49) in der *Ständerwicklung* die Spannung

$$U_{q1} = 4.44 \cdot f_1 \cdot N_1 \cdot \xi_1 \cdot \Phi_h \tag{3.52}$$

und analog in der *Läuferwicklung*

$$U_{q2} = 4.44 \cdot f_2 \cdot N_2 \cdot \xi_2 \cdot \Phi_h \ . \tag{3.53}$$

Bildet man den Quotienten aus den Gleichungen (3.52) und (3.53) erhält man

$$\frac{U_{q1}}{U_{q2}} = \frac{f_1 \cdot N_1 \cdot \xi_1}{f_2 \cdot N_2 \cdot \xi_2} \ . \tag{3.54}$$

Bei Schleifringläufermaschinen kann man über die Läuferstillstandsspannung das Übersetzungsverhältnis zwischen Ständer- und Läuferwicklung ausrechnen. Die Läuferstillstandsspannung wird bei stehender Maschine ($s = 1,\ f_2 = f_1$) zwischen den Schleifringen bei offenem Läuferkreis gemessen. Man erhält

$$\ddot{u} = \frac{U_{q1}}{U_{q20}} \ . \tag{3.55}$$

Für einen Strang der Ständer- und Läuferwicklung gilt (Abb. 3.96):

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + \mathrm{j}\, X_{1\sigma} \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{q1} \\ 0 &= R_2 \cdot \underline{I}_2 + \mathrm{j}\, s \cdot X_{2\sigma} \cdot \underline{I}_2 + \underline{U}_{q2} \ . \end{aligned} \tag{3.56}$$

Es bedeuten:

$\underline{U}_1$	Netzspannung mit der Frequenz f_1
R_1, R_2	Strangwiderstände des Ständers und Läufers
$X_{1\sigma}, X_{2\sigma}$	Streureaktanzen bei Netzfrequenz (siehe Abschnitt Streufelder)
$\underline{U}_{q1}, \underline{U}_{q2}$	durch den Hauptfluss Φ_h induzierte Spannungen.

Da die Frequenz im Läuferkreis nach Gleichung (2.35) drehzahl-/schlupfabhängig ist, gilt für die läuferseitige Streureaktanz in Gleichung (3.56):

$$\omega_2 \cdot L_{2\sigma} = 2\,\pi \cdot f_2 \cdot L_{2\sigma} = s \cdot \underbrace{2\,\pi \cdot f_1 \cdot L_{2\sigma}}_{X_{2\sigma}} = s \cdot X_{2\sigma} \ .$$

Analog zum ESB des Transformators macht man das Übersetzungsverhältnis zwischen Läufer- und Ständerwicklung zu eins ($N_2 = N_1$). Damit wird $U_{q2} = U_{q1} = U_q$ und $U'_{q2} = s \cdot U'_{q20} = s \cdot U_q$ und man erhält

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + \mathrm{j}\, X_{1\sigma} \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_q \\ 0 &= R'_2 \cdot \underline{I}'_2 + \mathrm{j}\, s \cdot X'_{2\sigma} \cdot \underline{I}'_2 + s \cdot \underline{U}_q \ . \end{aligned} \tag{3.57}$$

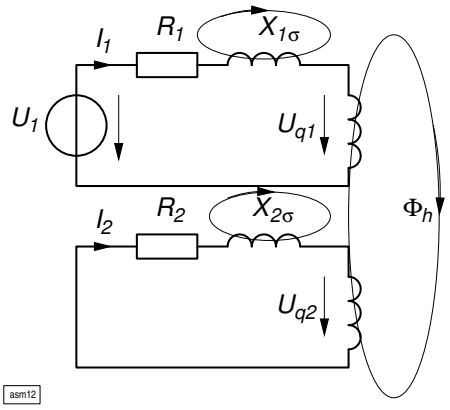


Abb. 3.96: Flussverkettung der Asynchronmaschine

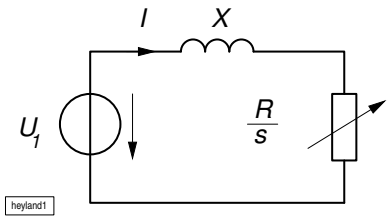


Abb. 3.97: Herleitung des Kreisdiagramms

Die Umrechnung erfolgt in Analogie zum Transformator, wobei beachtet werden muss, dass beim Käfigläufer die Strangzahl m_2 der Anzahl der Kurzschlussstäbe entspricht. Im ESB hat der Läuferkreis die gleiche Phasenzahl wie der Ständer, also m_1.

$$I_2' = I_2 \cdot \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{N_2 \cdot \xi_2}{N_1 \cdot \xi_1}\,, \qquad R_2' = R_2 \cdot \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{N_1 \cdot \xi_1}{N_2 \cdot \xi_2}\right)^2\,, \qquad X_{2\sigma}' = X_{2\sigma} \cdot \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{N_1 \cdot \xi_1}{N_2 \cdot \xi_2}\right)^2\,.$$

Dividiert man Gleichung (3.57) durch den Schlupf s, werden die Spannungsabfälle an den Haupt- und Streuinduktivitäten drehzahlunabhängig.

3.5.2 Kreisdiagramm

Das Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine lässt sich im Prinzip als eine Reihenschaltung aus konstantem Blindwiderstand X und einem veränderlichen Wirkwiderstand $R(s)$ ansehen (Abb. 3.97). Für eine solche Schaltung kann man mit Hilfe der Ortskurventheorie zeigen, dass sich der Strom I in der komplexen Ebene in Abhängigkeit von R auf einem Halbkreis bewegt. Lässt man auch negative Werte für R zu ($s < 0$), ergibt die Ortskurve einen Kreis.

Dies trifft auch für das vollständige Ersatzschaltbild der ASM zu (*Heylandkreis*). Zur Konstruktion des Kreisdiagramms benötigt man drei auf dem Kreis liegende Punkte. Als Parameter wird der Schlupf s benutzt. Üblicherweise bestimmt man die Punkte für den Leerlauf ($s = 0$), Kurzschluss ($s = 1$) und für $s = \infty$. Aus dem Kreisdiagramm kann man unter Verwendung geometrischer Beziehungen folgende Größen ablesen (Abb. 3.98):

- Ständerstrom
- mechanische Leistung
- Drehmoment
- elektrische Leistung
- Wirkungsgrad
- Leistungsfaktor
- Schlupf
- Verlustaufteilung.

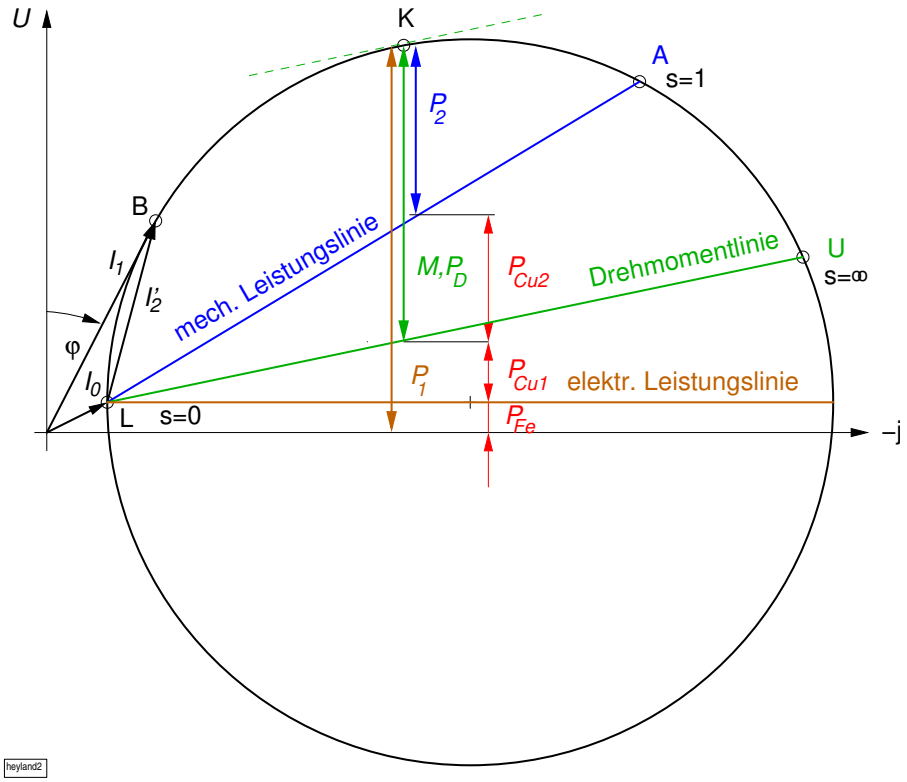


Abb. 3.98: Heylandkreis

Für das Kreisdiagramm bildet die positive Ordinate den Realteil der Spannung U_1 als Bezugsgröße. Demzufolge weist die positive Abszisse in Richtung der negativen Imaginärachse. Der Leerlaufpunkt ist mit L, der Kurzschlusspunkt mit A gekennzeichnet.

Beim lastfreien Anlauf wandert der *Stromzeiger* I_1 vom Punkt A zum Punkt L über den Kipppunkt K. Bei Belastung bewegt sich der Stromzeiger zwischen dem Leerlaufpunkt und dem Nennpunkt B. Ständerstrom I_1 und -spannung U_1 bilden den Winkel φ. Durch Einzeichnen eines Einheitskreises um den Koordinatenursprung kann man den *Leistungsfaktor* direkt auf der Ordinatenachse ablesen (fehlt in Abb. 3.98).

☞ Alle Abstände werden durch Fällen des Lotes auf die Imaginärachse ermittelt.

Die Strecke $\overline{\mathsf{LA}}$ markiert die *mechanische Leistungslinie*. Man kann zwischen ihr und dem Kreis die abgegebene, mechanische Leistung P_2 ablesen. Wie man sieht, ist im Leerlauf und beim Anlauf $P_2 = 0$.

Wird der Motor gegen seine Drehfeldrichtung betrieben (Bremsbetrieb, Gegenlauf), bewegt sich der Stromzeiger vom Anlaufpunkt weg in entgegengesetzte Richtung, da $s > 1$ wird. Der Grenzfall $s = \infty$ wird durch den Punkt U markiert. Die Strecke $\overline{\mathsf{LU}}$ bezeichnet man als *Drehmomentlinie*. Der Abstand zwischen ihr und dem Kreis ist proportional dem *Drehmoment* M. Es ist im Kipppunkt K am größten (parallele Tangente zur Drehmomentlinie). Da das Drehmoment (abzüglich des Reibungsmomentes) nach Gleichung (2.44) proportional zur Luftspaltleistung ist, ist der gleiche Abstand auch ein Maß für die Luftspaltleistung P_D.

Die *elektrische Leistungslinie* erhält man durch eine Parallele zur Abszissenachse im Abstand P_0 (siehe Gleichung (2.45)). Dabei nimmt man stillschweigend an, dass die Eisen- und Reibungsverluste konstant bleiben. Vernachlässigt man die im Leerlaufversuch verursachten Kupferverluste

in der Ständerwicklung P_{Cu1}, kann man die elektrische Leistungslinie durch den Leerlaufpunkt L legen. Der Abstand zwischen Abszisse und Kreis entspricht der aufgenommenen *Wirkleistung* P_1, aus den Schnittpunkten mit der mechanischen Leistungs- und Drehmomentlinie lassen sich auch die *Ständer- und Läuferverluste* P_{Cu1} und P_{Cu2} ablesen[11].

Aus dem Streckenverhältnis zwischen P_2 und P_1 kann man den *Wirkungsgrad* entnehmen.

Mittels der sog. *Schlupfgeraden* kann man den Kreisumfang in Schlupfwerte einteilen (fehlt in Abb. 3.98).

Da man aus dem Kreisdiagramm verschiedene physikalische Größen ablesen kann, müssen entsprechende Maßstäbe für den Strom, die Leistung und das Drehmoment gewählt werden.

3.5.3 Numerische Berechnung

Stehen numerische Werkzeuge zur Verfügung, mit denen komplexe Rechnungen durchgeführt werden können, lässt sich das vollständige Ersatzschaltbild auch ohne Vereinfachung auswerten. Aus den Leerlauf- und Kurzschlussversuchen gewinnt man die Zahlenwerte für die Parameter des Ersatzschaltbildes. Mit diesen Zahlenwerten lassen sich folgende komplexe Gleichungen berechnen:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\, X_{1\sigma}\,, \qquad \underline{Z}_2'(s) = \frac{R_2'}{s} + \mathrm{j}\, X_{2\sigma}'$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{\mathrm{j}\, R_{fe} X_h}{R_{fe} + \mathrm{j}\, X_h}\,, \qquad \underline{Z}(s) = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2'(s)\underline{Z}_0}{\underline{Z}_2'(s) + \underline{Z}_0}\,.$$

Somit erhält man den komplexen Ständerstrom

$$\underline{I}_1(s) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}(s)}$$

z. B. mit $\underline{U}_1 = (230 + \mathrm{j}\, 0)\,\mathrm{V}$. Daraus lässt sich sofort der Leistungsfaktor der Maschine berechnen:

$$\cos\varphi(s) = \cos\arctan\frac{\Im\{\underline{I}_1(s)\}}{\Re\{\underline{I}_1(s)\}}\,.$$

Der Läuferstrom ergibt sich zu

$$\underline{I}_2'(s) = \frac{\underline{U}_1\underline{Z}_0}{\underline{Z}(s)(\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2'(s))}\,.$$

Für die gesamte Luftspaltleistung erhält man

$$P_D(s) = 3\ |\underline{I}_2'(s)|^2\ \frac{R_2'}{s}$$

und daraus das innere Moment

$$M_i(s) = \frac{P_D(s)}{2\pi n_D}$$

[11] Die Verlustaufteilung ist aus darstellerischen Gründen beispielhaft für den Kipppunkt eingezeichnet. Es sei noch einmal betont, dass sich im normalen Motorbetrieb der Stromzeiger I_1 zwischen den Punkten L und B bewegt.

mit der Synchrondrehzahl n_D und die innere Leistung

$$P_i(s) = P_D(s) \cdot (1 - s) \ ,$$

welche noch die Reibungsverluste enthalten. Weiterhin interessiert die aufgenommene Wirkleistung

$$P_1(s) = 3U_1 I_1(s) \cos \varphi(s)$$

und der Wirkungsgrad, der jedoch die Reibungsverluste nicht berücksichtigt

$$\eta(s) = \frac{P_i(s)}{P_1(s)} \ .$$

Abb. 3.99 enthält die numerische Auswertung der oben angegebenen Gleichungen einer Labormaschine. Aus diesem Diagramm lassen sich sofort wichtige Kenngrößen der Maschine entnehmen wie Anlaufstrom, -moment, Kippschlupf, -moment, Leerlaufstrom, Überlastbarkeit (Kippmoment/Nennmoment), Leistungsfaktor und Wirkungsgrad in Abhängigkeit von der Drehzahl. In

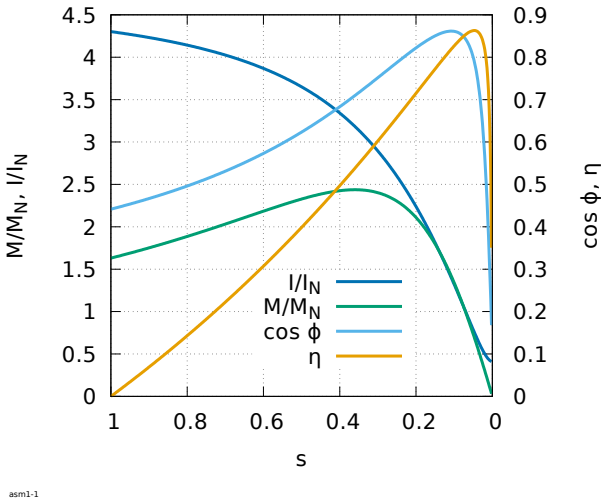


Abb. 3.99: Betriebsverhalten der Asynchronmaschine

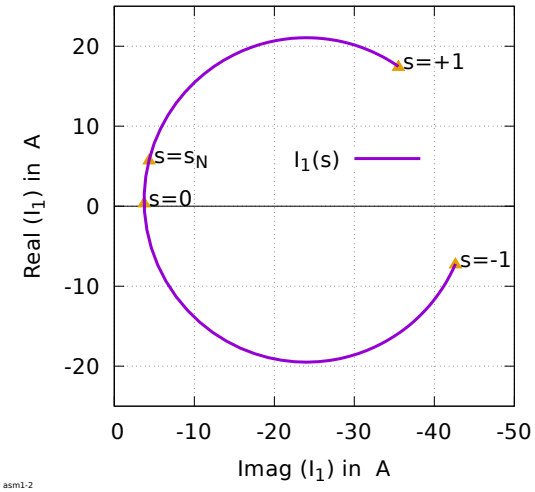


Abb. 3.100: Kreisdiagramm der Asynchronmaschine

diese Darstellung kann das Lastmoment direkt eingetragen und z. B. der Hochlaufvorgang der ASM kontrolliert werden.

Statt über die Drehzahl kann das Diagramm auch über die zugeführte Leistung oder über das Belastungsmoment aufgetragen werden (*Belastungskennlinie*).

Der Vorteil der numerischen Auswertung gegenüber der analytischen Gleichungen besteht vor allem darin, auch nichtlineare Effekte und Oberwellenerscheinungen untersuchen zu können, vorausgesetzt, sie lassen sich in geeigneter Weise mathematisch formulieren.

☞ Die Rechnung gestaltet sich nur deshalb so einfach, weil die Gleichungen direkt numerisch ausgewertet werden. Eine symbolische Herleitung der Netzwerkgleichungen für das T-Ersatzschaltbild führt zu wesentlich umfangreicheren Gleichungen.

Man erhält das Kreisdiagramm aus den oben hergeleiteten Gleichungen (Abb. 3.100), wenn man den Strom I_1 in Parameterdarstellung mit s als Parameter zeichnet und den *negativen* Imaginärteil über die x-, den Realteil über die y-Achse aufträgt.

Der Anhang Simulation der ASM — Betriebsverhalten, Kreisdiagramm enthält Programmanweisungen zur Simulation des Betriebsverhaltens einer ASM.

3.5.4 Weitere Einflußgrößen

Vergleicht man errechnete und gemessene Werte, ergeben sich teilweise erhebliche Abweichungen zwischen dem Modell und der Praxis. Ursachen dafür können sein:

- Beim Ersatzschaltbild und dem Kreisdiagramm wurde nur von der Grundwelle des Ständerdrehfeldes ausgegangen.
- Zwischen mehreren Anlaufvorgängen kann es zu Wicklungserwärmungen kommen, die eine Widerstandserhöhung verursachen.
- Haupt- und Streureaktanzen sind infolge der Eisensättigung stromabhängig.
- Je nach Läuferausführung können sich Stromverdrängungseffekte bemerkbar machen, die im ESB bzw. im Kreisdiagramm berücksichtigt werden müssen.

Oberfelder

Referenz: [19]

Die durch die Ständerwicklung erzeugte Durchflutung enthält neben der Grundschwingung auch noch Drehfelder mit den Ordnungszahlen $\nu = -5, 7, -11, 13, -17, 19, ...$ entsprechend der Gleichungen (3.43) und (3.44) im Abschnitt Zeitabhängigkeit. Negative Ordnungszahlen zeigen an, dass das Drehfeld in entgegengesetzter Richtung zum Grundfeld umläuft.

Nach Gleichung (3.45) besitzen die Oberfelder die Drehzahlen

$$n_\nu = \frac{n_1}{\nu} \; . \tag{3.58}$$

Ihren Schlupf s_ν zur Läuferdrehzahl n erhält man zusammen mit Gleichung (2.34)

$$s_\nu = \frac{n_\nu - n}{n_\nu} = \frac{n_1 - \nu \cdot n}{n_1} = 1 - \nu(1 - s) \; .$$

Ihre Drehmomente M_ν nehmen mit der Ordnungszahl ν etwa hyperbolisch ab, bei $s_\nu = 0$ sind sie gleich Null.

Das Gesamtmoment M ergibt sich aus der Summe des Grundwellenmomentes und der Oberfeldmomente M_ν (Abb. 3.101) und zeigt deutlich Momentenschwankungen, z. B. beim Hochlaufvorgang (*asynchrone Oberfeldmomente*). Man erkennt, dass nur die positiven Ordnungszahlen Auswirkungen auf den Motorbetrieb haben.

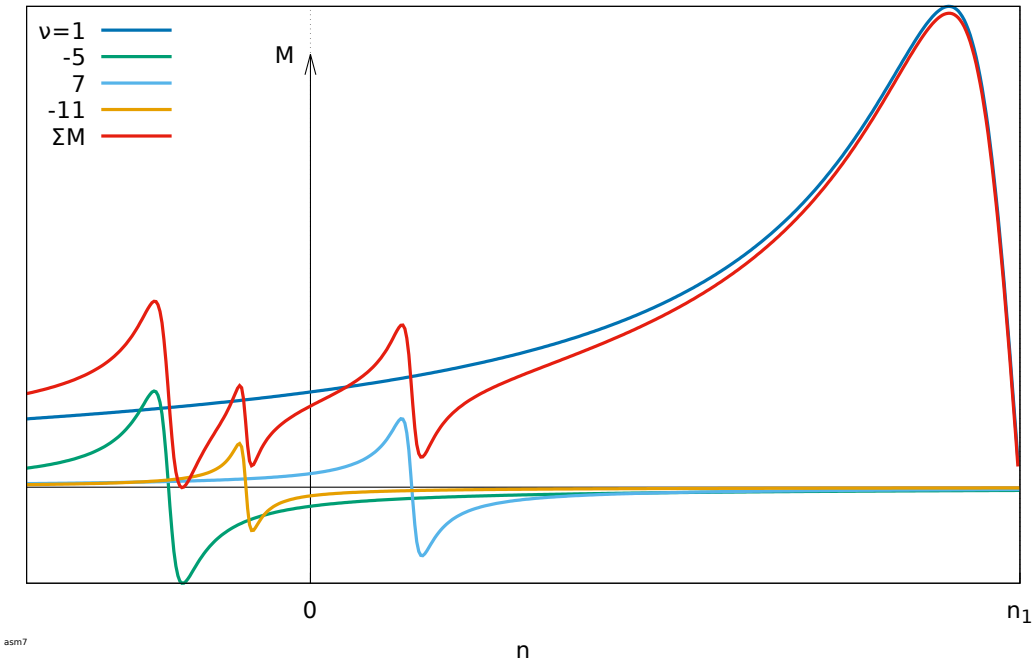


Abb. 3.101: Oberfeldmomente für die Ordnungszahlen $\nu = 1, -5, 7, -11$

Einen wesentlichen Einfluss auf das Drehmoment haben Oberwellen, die durch die Nutung des Ständers und des Läufers hervorgerufen werden (*Nutungsharmonische*), mit den Ordnungszahlen

$$\nu = \pm k\frac{N}{p} + 1 \qquad \text{mit } k = 1, 2, 3, ... \tag{3.59}$$

So wie der Ständer aufgrund seines Aufbaus (Nutung, Wicklungsaufbau) Oberfelder erzeugt, trifft das auch auf den Läufer zu. Die Ströme I_2 bilden neben dem Grundwellenfeld auch Oberwellenfelder, Schleifring- und auch Käfigläufer[12] erzeugen Nutungsharmonische. Diese Felder rotieren zum Läufer mit den Drehzahlen $s \cdot n_1/\nu$.

Die durch Oberfelder und Nutungsharmonischen erzeugten Drehzahlen sind sowohl mitlaufend als auch gegenlaufend, je nach Vorzeichen von ν. Die vom Ständer erzeugten Drehfelder sind starr an das speisende Netz gebunden (n_1), die vom Läufer sind drehzahlabhängig. Haben zwei Drehfelder mit der gleichen Ordnungszahl und gleichen Drehzahl auch die gleiche Drehrichtung, kommt es zu einem *synchronen Moment*, da die beiden Felder quasi »nebeneinander laufen«, das eine Feld versucht das andere Feld »festzuhalten«.

Zur Beurteilung solcher störender Momente berechnet man die Ordnungszahlen (mit Vorzeichen wegen der Drehrichtung) für die Nutungsharmonischen der Ständer- und Läuferwicklungen nach Gleichung (3.59).

Die durch die Nutungsharmonischen erzeugten synchronen Momente treten immer dann auf, wenn es auf der Läufer- und Ständerseite gleiche Ordnungszahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen gibt. Die dazugehörigen Synchrondrehzahlen erhält man aus der Beziehung

$$\frac{n_1}{\nu_1} = \frac{n_1 - n}{\nu_2} + n$$

[12] Die Stäbe der Käfigläufer liegen in mehr oder weniger geschlossenen Nuten.

in die man die gefundenen Ordnungszahlen ν_1 und ν_2 unter Beachtung des Vorzeichens einsetzt und nach der gesuchten Drehzahl n auflöst.

Die Drehzahlen, bei denen asynchrone Momente auftreten, erhält man direkt aus Gleichung (3.58) mit $\nu = -5, 7, -11, 13, -17, 19, ...$, wobei man für den Motorbetrieb nur die positiven Drehzahlen berücksichtigt.

Synchrone und asynchrone Momente führen zu Einsattelungen im Drehmomentenverlauf. Bei ungünstiger Auslegung der Maschine bzw. des Antriebes kann der Motor beim Hochlaufen hängen bleiben (er »schleicht«), im ungünstigsten Fall bleibt er »kleben« (Stillstand).

☞ Abhilfe schafft man durch entsprechende Wicklungsfaktoren (siehe dazu Abschnitt Bedeutung der Wicklungsfaktoren). Die Nutungsharmonischen kann man nur durch *Schrägung* der Läufernuten um eine Ständernutteilung beseitigen.

Neben den hier beschriebenen Oberfeldmomenten entstehen weitere Störmomente, z. B. durch Nutungsharmonische im Zusammenspiel mit sog. Zahnpulsationsverlusten, zusätzliche Wirbelstromverluste im Läufer durch Kurzschlüsse zwischen den Blechen bei der mechanischen Nachbearbeitung des Läufers (Überdrehen), Querströme im Läufereisen von Käfigläufern durch schräggestellte Nuten, zu deren Berechnung auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen wird.

Einseitig Stromverdrängung

Ein massiver Leiter erzeugt durch seinen eingeprägten Strom I in der Nut ein magnetisches Streufeld, das sog. *Nutquerfeld*. Vernachlässigt man den magnetischen Widerstand im Eisen ($\mu_{fe} \gg \mu_0$), dann steigt bei **Gleichstrom** die Induktion B_0 linear mit der Höhe x des Leiterstabes an[13]. Die dazugehörige Stromdichte J_0 verteilt sich gleichmäßig über den Leiterquerschnitt, ist also konstant über die Leiterhöhe (Abb. 3.102).

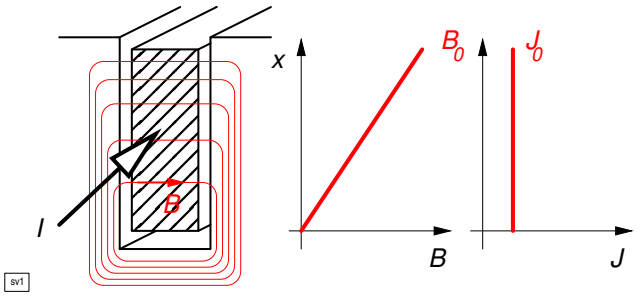


Abb. 3.102: Nutquerfeld bei Gleichstrom

Bei **Wechselstrom** ändert sich das Nutquerfeld mit der Frequenz. Dadurch werden in dem massiven Leiterstab Spannungen induziert, die im Leiter Wirbelströme erzeugen. Da das Querfeld von der Leiterhöhe abhängt, ist die Höhe der induzierten Spannung ebenfalls von der Leiterhöhe x abhängig. Die Wirbelströme sind so gerichtet, dass sie das ursprüngliche Feld zu schwächen versuchen. Daraus folgt, dass sie im unteren Leiterbereich entgegen dem Strom I fließen und sich im oberen Bereich gleichsinnig überlagern. Über die Leiterhöhe stellt sich eine ungleichmäßige Stromdichte ein, es ergibt sich eine *einseitige Stromverdrängung*. Durch die Rückwirkung der Wirbelströme auf das ursprüngliche Feld tritt auch eine *Feldverdrängung* auf (Abb. 3.103).

[13] Nach dem Durchflutungssatz ist für jede Feldlinie der Beitrag $H \cdot \delta s$ (mit δs gleich der Nutbreite) etwa gleich, der eingeschlossene Strom nimmt mit der Leiterhöhe x jedoch linear zu.

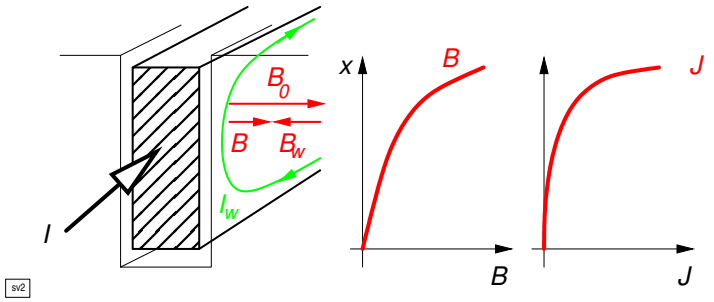


Abb. 3.103: Nutquerfeld bei Wechselstrom

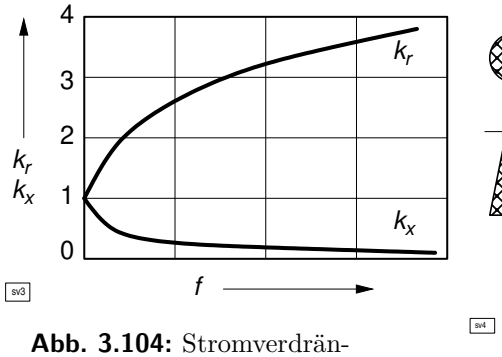


Abb. 3.104: Stromverdrängungsfaktoren

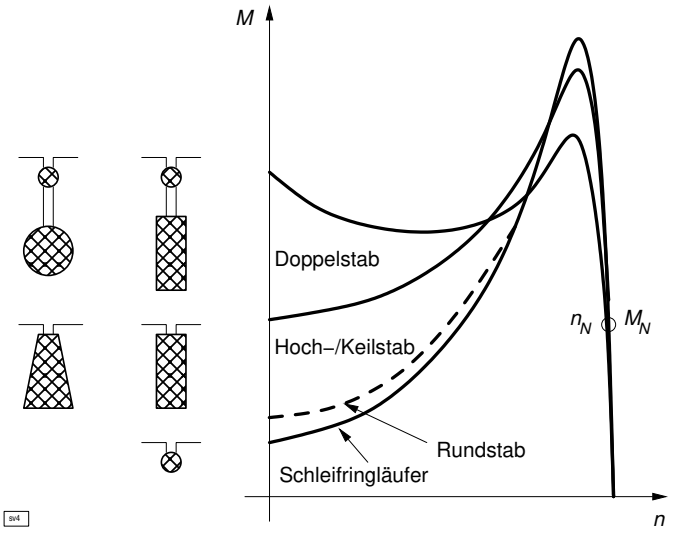


Abb. 3.105: Verschiedene Käfigläufer

Die Stromverdrängung führt zu Gesamtverlusten im Nutenleiter, die größer sind als bei gleichmäßiger Stromverteilung. Gegenüber dem Gleichstromfall mit nur ohmschen Verlusten entstehen bei Wechselstrom zusätzliche Verluste (*Stromverdrängungsverluste, Wirbelstromverluste*). Die Verlusterhöhung kann man als eine fiktive Erhöhung des Leiterwirkwiderstandes auffassen.

Die Feldverdrängung ihrerseits verursacht eine Abnahme der Leiterinduktivität, also der Nutstreureaktanz.

Die *Stromverdrängungsfaktoren* k_r, k_x geben das Widerstands- bzw. Streuungsverhältnis bei einer beliebigen Frequenz zu dem entsprechenden Gleichstromwert an:

$$k_r = \frac{R}{R_0} \qquad k_x = \frac{X}{X_0} \,.$$

Ihr prinzipieller Verlauf ist in Abb. 3.104 dargestellt. Entscheidend für die Stromverdrängung ist die Leiterhöhe. Unterteilt man den Leiterstab in übereinander liegende Teilleiter und schaltet die einzelnen Leiter in Reihe, so erfahren die einzelnen Leiterlagen ebenfalls eine Stromverdrängung, außer in dem untersten Teilleiter tritt jedoch in jedem Teilleiter eine *doppelseitige Stromverdrängung* auf, die durch den darunter liegenden Strom hervorgerufen wird.

Normalerweise ist die Stromverdrängung eine unerwünschte Eigenschaft, die zusätzliche Verluste erzeugt (z. B. in den Wicklungsstäben der Ständerwicklungen großer Induktionsmaschinen).

Praktisch ausgenutzt wird sie nur zur Verbesserung der Anlaufeigenschaften von Asynchronmaschinen. Beim Hochlaufvorgang soll der Wirkwiderstand im Läuferkreis möglichst groß sein (hohes Anzugsmoment bei verhältnismäßig kleinem Anzugsstrom), im Betrieb jedoch möglichst klein (guter Wirkungsgrad). Je höher die Läuferstäbe sind (*Hochstabläufer*) desto mehr wirkt sich die Stromverdrängung aus. Neben der Widerstandsvergrößerung ($k_r \approx 3 \ldots 5$) tritt noch eine Verminderung der Nutstreuung und damit der Läuferstreureaktanz auf, die die Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik zusätzlich verbessert.

Besonders hohe Anzugsmomente liefert der *Doppelkäfigläufer*. Er besteht aus zwei Käfigen: der äußere Käfig (*Anlaufkäfig*) mit geringem Stabquerschnitt (hoher Widerstand) und der innere Käfig (*Arbeits-* oder *Betriebskäfig*) mit großem Stabquerschnitt. Durch entsprechende Auslegung der Stabquerschnitte läßt sich die Drehmomentenkurve den Bedürfnissen anpassen (Abb. 3.105).

☞ Da die Stäbe des Doppelkäfigs im allg. in einer Nut liegen, muss auch deren induktive Kopplung berücksichtigt werden.

Man kann das Ersatzschaltbild der ASM für Doppelkäfigläufer erweitern und das Betriebsverhalten unter Berücksichtigung der Stromverdrängung ebenfalls numerisch berechnen. Schwierigkeiten bereitet die Ermittlung der Ersatzschaltbildparameter. Abb. 3.106 zeigt das erweiterte Ersatzschaltbild eines Dreistabläufers [22, Mehrfachkäfigläufer], bei dem ein Doppelkäfig (a,b) und ein einfacher Käfig (c) zusammenschaltet werden.

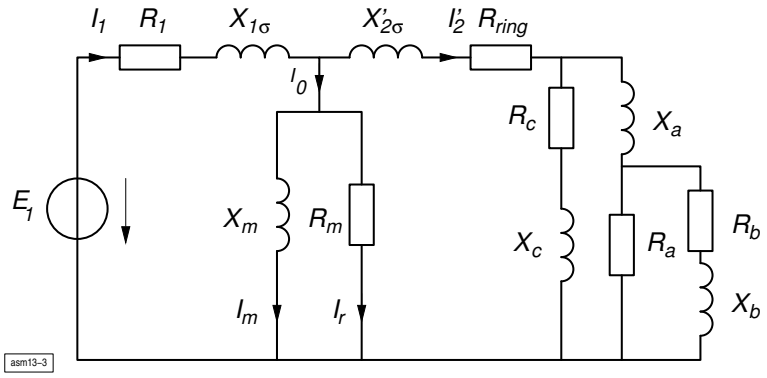


Abb. 3.106: Ersatzschaltbild eines Doppelkäfigläufers

3.5.5 Abschätzung – Kloßsche Gleichung

Mittels der Gleichungen (2.41) und (2.44) lässt sich das Drehmoment durch die Parameter der Ersatzschaltung in Abhängigkeit vom Schlupf s ausdrücken. Bildet man die erste Ableitung $\mathrm{d}M_i/\mathrm{d}s$ und setzt sie gleich Null, erhält man den Punkt mit dem maximalen Drehmoment, das sog. *Kippmoment* M_K mit dem dazugehörigen *Kippschlupf* s_K. Mit den Annahmen $X_1 \approx X_2'$ und $R_1 \ll X_1$ findet man für die Daten des Kipppunktes folgende Abschätzungen:

$$s_K \approx \frac{R_2'}{X_\sigma} \qquad (3.60) \qquad \text{und} \qquad M_K \approx \frac{3 \cdot U_1^2}{4\pi \cdot n_1 \cdot X_\sigma} \,. \qquad (3.61)$$

Der Kippschlupf hängt sowohl vom sekundären Läuferwiderstand wie auch von der Streureaktanz der Maschine ab, die Höhe des Kippmomentes wird bautechnisch nur durch die Streureaktanz bestimmt (siehe dazu auch die Abbildungen A.48 und A.49).

Durch Umformung der Momentengleichung, Vereinfachungen und Vernachlässigung des Reibungsmomentes erhält man die auf das Kippmoment bezogene allgemeine Drehmomentengleichung (*Kloßsche Gleichung*):

$$\boxed{\frac{M}{M_K} = \frac{2}{\frac{s}{s_K} + \frac{s_K}{s}}} \tag{3.62}$$

mit deren Hilfe man aus den Daten des Kipppunktes das Drehmoment für einen beliebigen Schlupf berechnen kann (Abb. 3.107). Die Formel liefert für kleine Schlupfwerte $s/s_K \ll 1$

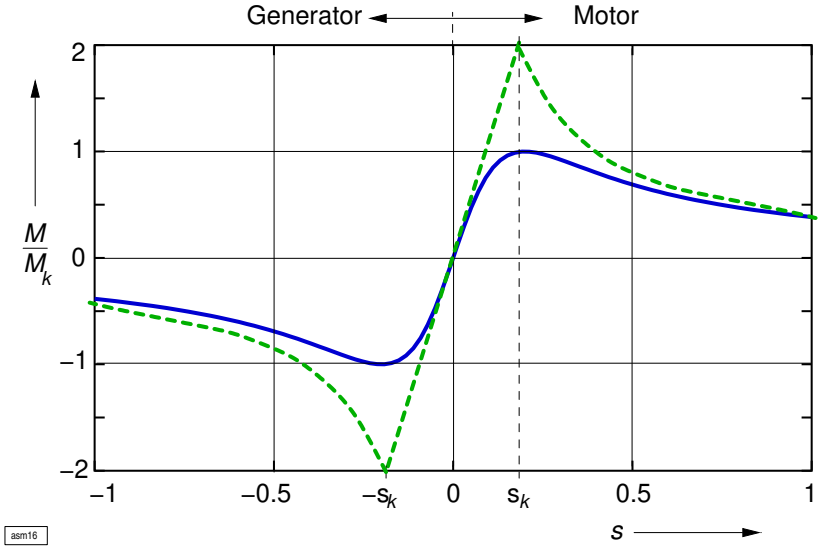


Abb. 3.107: Kloßsche Gleichung

eine Gerade $2 \cdot s/s_K$, während im Anlaufbereich $s/s_K \gg 1$ das Drehmoment sich nach der Hyperbelgleichung $2 \cdot s_K/s$ ändert.

3.5.6 Generatorbetrieb

Gleichung (3.62) gilt auch für $s < 0$ und gibt damit auch den Generatorbetrieb richtig wieder (gleiche Drehrichtung, negatives Moment). Im Kreisdiagramm bewegt sich der Stromzeiger I_1 für $s < 0$ in den negativen Realbereich (Wirkkomponente von I_1 um 180° phasenverschoben gegenüber U_1). Die numerische Berechnung liefert ebenfalls negative Momente für den übersynchronen Lauf.

☞ Generatorbetrieb liegt dann vor, wenn die ASM oberhalb ihrer Synchrondrehzahl n_1 betrieben wird.

3.5.7 Schleifringläufer mit Anlasswiderständen

Das Prinzip wurde bereits im Abschnitt 2.5.8 behandelt.

Aus der Gleichung (3.60) erhält man bei unveränderter Streureaktanz die Beziehung

$$\frac{R_{2V} + R_2}{s^*} = \frac{R_2}{s} \qquad \text{oder} \qquad s^* = \frac{R_{2V} + R_2}{R_2} \cdot s \tag{3.63}$$

wobei R_2 und R_{2V} die realen Werte der Läuferwicklung bzw. des Anlasswiderstandes bedeuten, s^* der Schlupf, der sich mit dem Anlasswiderstand einstellt, und zwar **bei gleicher Belastung** wie beim Schlupf s. Betrachtet man dazu das Anlaufdiagram (siehe Abschnitt Betriebsverhalten, Abb. 2.68), bedeutet die obige Gleichung, dass sich alle Betriebspunkte, z. B. M_N mit I_N, horizontal in Richtung niedriger Drehzahl bewegen, und zwar im gleichen Maße, wie sich R_2 erhöht. Dieses Ergebnis kann man auch aus den Diagrammen in Betriebsverhalten der ASM ablesen.

Löst man Gleichung (3.63) nach R_{2V} auf,

$$\boxed{R_{2V} = R_2 \left(\frac{s^*}{s'} - 1 \right)} \tag{3.64}$$

erhält man eine Bestimmungsgleichung für den Anlasswiderstand in Abhängigkeit vom gewünschten Schlupf s^* und einem Referenzschlupf s'. Es stellen sich dann zu der gewünschten Drehzahl Moment und Strom so ein, wie sie beim Referenzschlupf s' vorhanden waren.

Für den Anlassvorgang wertet man Gleichung (3.64) so aus, indem man $s^* = 1$ setzt (Stillstand) und z. B. $s' = s_k$ einsetzt, wenn der Motor mit dem Kippmoment anlaufen soll.

Um den Anlaufvorgang möglichst kurz zu halten, wird man versuchen, den Motor während des Hochlaufvorganges möglichst immer mit dem Kippmoment zu beschleunigen. Dazu müsste man jedoch stufenlos verstellbare Anlasswiderstände benutzen. Aus Kostengründen wählt man statt dessen einen stufig verstellbaren Anlasswiderstand, bei häufigen Anlassvorgängen (z. B. Kransteuerung) kann eine *Pulssteuerung* (siehe Abschnitt Schlupfwiderstände) vorteilhafter sein.

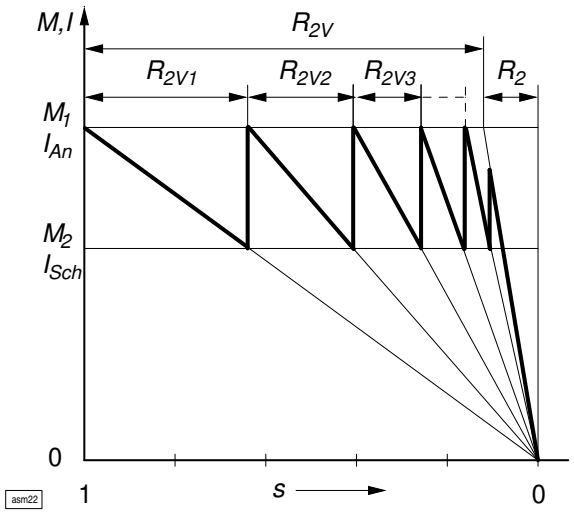


Abb. 3.108: Ermittlung der Anlasswiderstände

Die Ermittlung der einzelnen Teilwiderstände erfolgt grafisch unter der Annahme, dass die Strom- und Momentenkennlinien im Bereich des Nennmomentes linear verlaufen (Abb. 3.108). Vorgegeben werden der Anlassspitzenstrom I_{An} (z. B. $1.8\, I_{2\mathrm{N}}$) sowie der Schaltstrom I_{Sch} (z. B. $1.0\, I_{2\mathrm{N}}$). Zu diesen Strömen gehören die entsprechenden Momente M_1 und M_2. Beim Einschalten mit dem vollen Anlasswiderstand $R_{2\mathrm{V}} + R_2$ beschleunigt die Maschine mit dem Moment M_1 und dem Anlaufstrom I_{An}. Mit zunehmender Drehzahl sinken beide Größen linear auf die Werte M_2 bzw. I_{Sch}. In diesem Punkt wird der Teilwiderstand $R_{2\mathrm{V1}}$ abgeschaltet, der so bemessen sein muss, dass sich das Moment M_1 bzw. der Strom I_{An} wieder einstellen. Dieser Vorgang

wiederholt sich für jede Anlassstufe bis nur noch der Läuferwiderstand R_2 übrig bleibt. Wegen der Proportionalität zwischen $R_{2V} + R_2$ und s^* bei gleicher Belastung (hier M_1 bzw. I_{An}) kann man die Widerstände R_2 und R_{2V} sowie dessen Abstufung statt des Schlupfes s auftragen und die Anlasserstufung durch geometrische Konstruktion ermitteln.

3.5.8 Schlupfwiderstände

Entsprechend den Gleichungen (2.41) bis (2.43) spaltet sich die Luftspaltleistung in zwei Anteile auf: die abgegebene Leistung $P_i = P_D\ (1 - s)$ einschließlich Reibungsverluste und die Stromwärmeverluste $P_{Cu2} = P_D \cdot s$. Bei konstantem $M \sim P_D$ geht mit steigendem Schlupf die Luftspaltleistung von P_i nach P_{Cu2} über. Dabei entstehen im Läuferkreis die Verluste

$$P_{Cu2} = P_D \cdot s = 3 \cdot I_2^2\ (R_2 + R_{2V}) \tag{3.65}$$

wobei der Vorwiderstand R_{2V} für den Zeitraum der Drehzahlverstellung die Verlustleistung $P_v = 3 \cdot I_2^2 \cdot R_{2V}$ aushalten muss.

Die Drehzahlsteuerung durch Schlupfwiderstände hat neben der Unwirtschaftlichkeit bei großen Schlupfwerten weitere Nachteile. Mit zunehmenden Widerstandswerten verschiebt sich die Drehmomentenkennlinie in Richtung Anlaufpunkt, sie wird »weicher«, d. h. Laständerungen führen zu großen Drehzahländerungen. Sie verhält sich genauso wie eine Gleichstrom-Nebenschlussmaschine mit Ankervorwiderstand. Bei Entlastung nimmt sie mehr oder weniger die Leerlaufdrehzahl an.

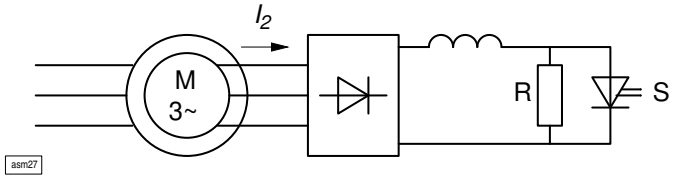


Abb. 3.109: Prinzip der Pulssteuerung

Bei der Verwendung von Läufervorwiderständen steuert man die Drehzahl mittels Teilwiderständen in Stufen (wie beim Anlasswiderstand). Dies führt aber zu Drehmomentsprüngen. Zur kontinuierlichen und kontaktlosen Drehzahlsteuerung verwendet man statt dessen eine *Pulssteuerung* mit einem Gleichstromsteller (Abb. 3.109). Dabei wird die dreiphasige Rotorspannung gleichgerichtet und über eine Glättungsdrossel an den Lastwiderstand R gelegt. Parallel zu R liegt der Gleichstromsteller S, ein periodisch arbeitender Schalter. Durch Änderung des Tastverhältnisses (Ein- und Ausschaltdauer) kann der Läuferkreis unterschiedlich belastet werden, was einer Änderung des Läufervorwiderstandes entspricht.

3.5.9 Änderung der Klemmenspannung

Siehe Abschnitt Änderung der Klemmenspannung.

Wegen der schlupfabhängigen Läuferverluste nach Gleichung (3.65) würden bei geringen Drehzahlen und großer Abgabeleistung P_i hohe Verlustleistungen auftreten. Bildet man nämlich den Quotienten aus den Gleichungen (2.43) und (2.42) erhält man

$$P_{Cu2} = \frac{s}{1 - s} P_i\ .$$

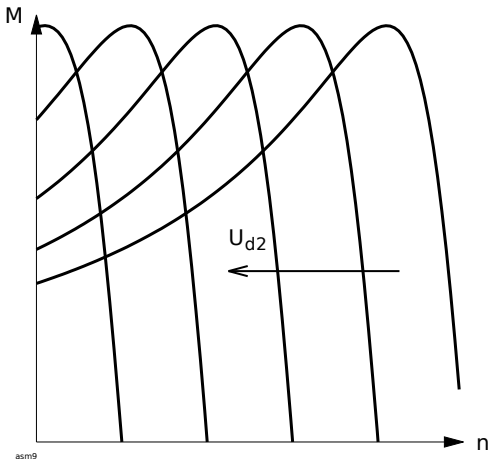


Abb. 3.110: Drehmomentenverlauf als $f(U_{d2})$

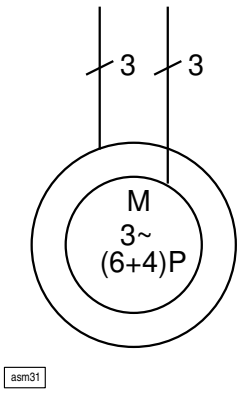


Abb. 3.111: Polumschaltbare ASM

Aus diesem Grund sollte das Lastmoment bei kleinen Drehzahlen möglichst gering sein.

Wegen der erhöhten Stromwärmeverluste muss der Motor überdimensioniert werden. Die Spannungsverstellung geschieht entweder mit regelbaren Transformatoren oder mit elektronischen Drehstromstellern (siehe Anlasstransformator und Drehstromsteller).

Widerstandsläufer (oder auch *Schlupfmotoren* genannt) haben grundsätzlich einen schlechten Wirkungsgrad. Da ihre Drehzahl sehr stark von der Last abhängt, verwendet man sie nur für kleine Leistungen, z. B. in der Textilindustrie als Wicklerantrieb.

3.5.10 Läuferrückspeisung

Siehe dazu gleichnamiges Kapitel Läuferrückspeisung, Abb. 2.77.

U_{d1} ist die schlupfabhängige Ausgangsspannung des Gleichrichters. Über Änderung des Steuerwinkels des Wechselrichters wird, vereinfacht ausgedrückt, die Zwischenkreisspannung U_{d2} verändert und damit der Stromfluss vom Gleichrichter zum Wechselrichter beeinflusst. Da U_{d1} nicht negativ werden kann, lässt sich der Energiefluss nicht umkehren, die gesamte Anordnung wirkt wie eine variable Wirklast im Läuferkreis und erlaubt damit nur den normalen Motorbetrieb. Man bezeichnet diese Anordnung als *untersynchrone Stromrichterkaskade*.

Abb. 3.110 zeigt den Drehzahl-Drehmomentenverlauf mit U_{d2} als Parameter. Das Kennlinienfeld ist ähnlich dem der mittels Ankerspannung gesteuerten Gleichstrom-Nebenschlussmaschine.

Läuferrückspeisung eignet sich besonders für den Drehzahlbereich 50 bis 80 % der Nenndrehzahl und ist besonders wirtschaftlich bei kleinem Stellbereich. Eingesetzt wird er ab etwa 100 kW bis zu den größten Leistungen von 30 MW. Typische Anwendungen sind Lüfter, Verdichter, Windkanäle, Kesselspeisepumpen, Förderanlagen, Pressen, Schaufelradantriebe.

3.5.11 Polumschaltung

Getrennte Wicklungen werden übereinander in die Nuten des Ständers gelegt. Wegen der schlechten Ausnutzung des Wickelraumes (2 Wicklungen in einer Nut) beträgt die Motorleistung

nur etwa die Hälfte bis zwei Drittel einer Maschine gleicher Bauleistung mit einer Drehzahl. Die möglichen Drehzahlen sind durch die ausführbaren Wicklungen gegeben (Abb. 3.111).

Die **Dahlanderschaltung** benutzt *eine* Drehstromwicklung. Durch Aufteilung eines Stranges in zwei Wicklungshälften und entsprechende Verschaltung lassen sich die Polpaare im Verhältnis 2:1 verändern.

Am Beispiel der Einschichtwicklung (Kap. 3.4.5) soll dieses Prinzip veranschaulicht werden (Abb. 3.112).

Die Wicklung für die niedrige Drehzahl ist ausgeführt mit $N = 24, p = 2, q = 2$. Man erkennt, dass der Strom jede Spulengruppe in der gleichen Richtung durchläuft, jede Gruppe erzeugt einen Pol mit gleicher Durchflutungsrichtung, die beiden Spulen sind in Reihe geschaltet. Allgemein wird diese Schaltung im Dreieck (D) betrieben.

Schaltet man die Spulengruppen parallel, erzeugt jede Spule eine Durchflutung in entgegengesetzter Richtung, die Anzahl der Pole mit gleicher Polarität halbiert sich, es stellt sich die höhere Drehzahl ein (hier $p = 1$). Wegen der höheren Spannung je Spulengruppe kann diese Schaltung nur im Stern (Y), wegen der Parallelschaltung in der sog. *Doppelsternschaltung* (YY) betrieben werden.

Die Kombination D/YY ist die gebräuchlichste (Abb. 3.113). Es ist auch die Kombination Y/YY möglich.

Je nach Schaltungsart stellen sich unterschiedliche Scheinleistungen, Nennleistungen und Drehmomente ein.

Mit der Dahlanderschaltung erreicht man etwa 80 % der Motorleistung einer entsprechenden Maschine mit nur einer Drehzahl.

Polumschaltbare Motoren werden oft bei Werkzeugmaschinen und Hubantriebe verwendet, wobei man die niedrigere Drehzahl zum Feinpositionieren einsetzt. Über die höhere Polzahl kann man einen Antrieb auch anlaufen lasssen.

☞ *Vorsicht* ist jedoch geboten beim Herunterschalten von der hohen Drehzahl auf die niedrigere, um z. B. den Antrieb stillzusetzen oder zum Positionieren. Im Schaltaugenblick läuft der Antrieb übersynchron als Generator, durchläuft das generatorische Kippmoment und stellt sich dann auf das motorische Lastmoment ein. Dabei treten impulsartig Momentensprünge auf, die den Antrieb gefährden können (Kupplungs-, Getriebeschäden). Abhilfe schafft hier z. B. ein einphasiger Widerstand, der beim Umschalten in eine Phase geschaltet wird.

3.5.12 Frequenzsteuerung

Siehe dazu Frequenzsteuerung (Kap. 2.5.9) und Abb. 2.79.

Damit die ASM bei allen Drehzahlen ihr Nenndrehmoment aufbringen kann, muss der Drehfeldfluss Φ_d konstant bleiben.

Im ESB wird der Luftspaltfluss durch die frequenzabhängige Hauptreaktanz X_h dargestellt. Für den Magnetisierungsstrom I_μ gilt

$$I_\mu = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + (X_{1\sigma} + X_h)^2}} = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \qquad \text{mit } L = L_{1\sigma} + L_h \,. \tag{3.66}$$

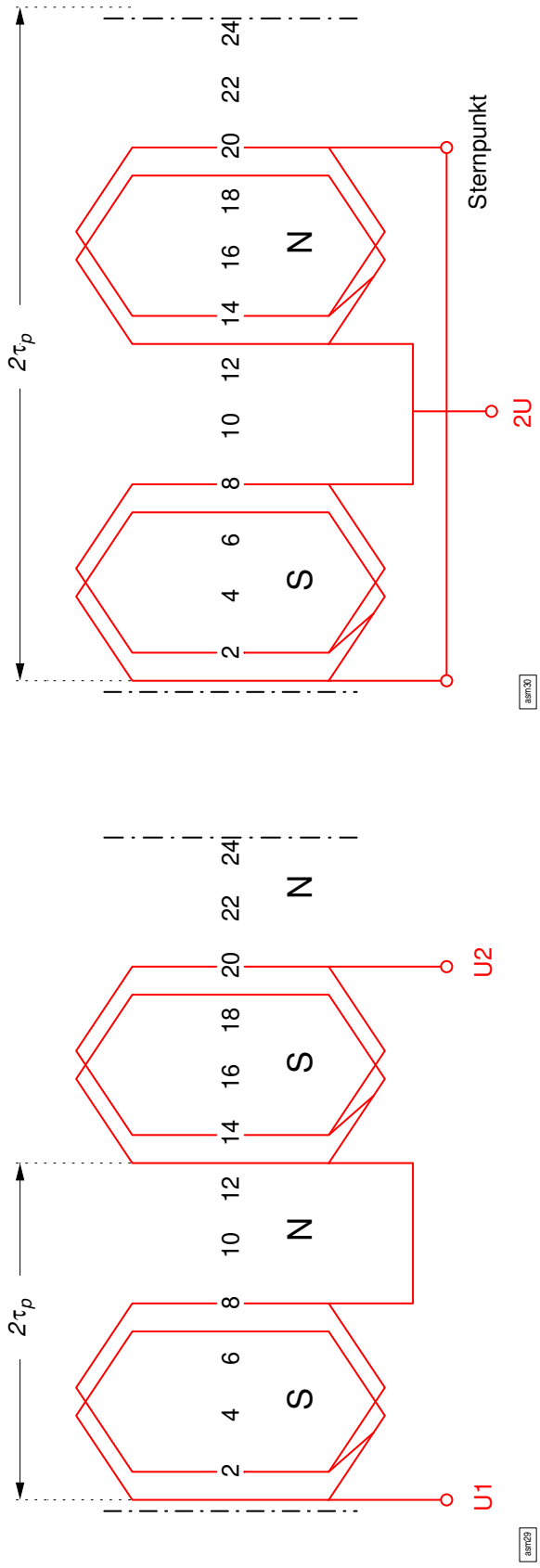


Abb. 3.112: Dahlanderschaltung am Beispiel einer Einschichtwicklung

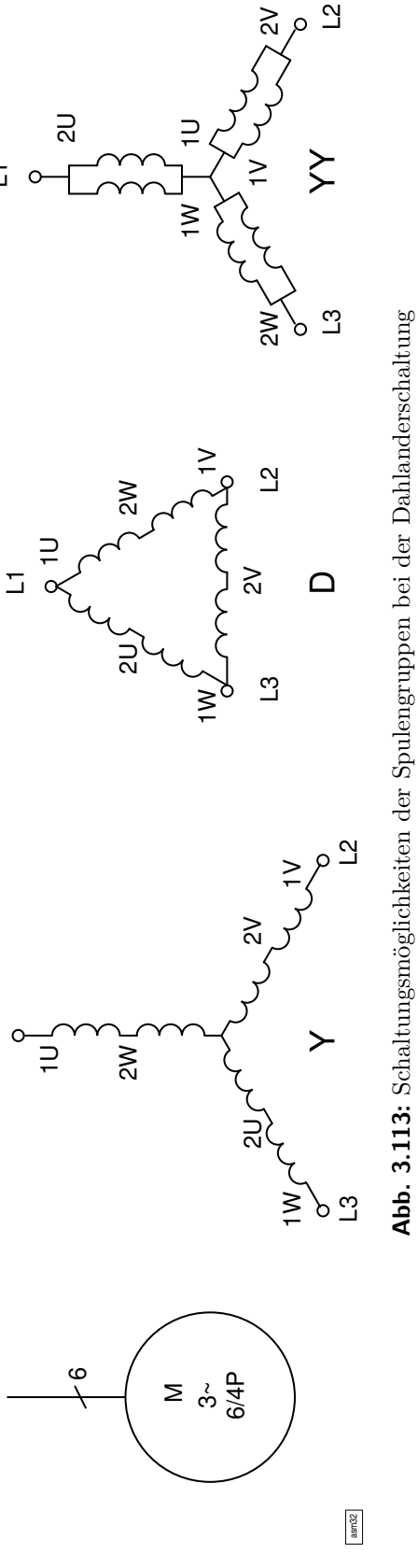


Abb. 3.113: Schaltungsmöglichkeiten der Spulengruppen bei der Dahlanderschaltung

Solange $R_1 \ll (X_{1\sigma}+X_h)$, d. h. in der Praxis für Frequenzen ab etwa 10 Hz, lässt sich der Magnetisierungsstrom konstant halten, in dem man mit der Frequenz f_1 die Spannung U_1 proportional verstellt (*U/f-Steuerung*). Dafür gilt:

$$\frac{f_1}{f_{1N}} = \frac{U_1}{U_{1N}} = \frac{n_1}{n_{1N}} \; .$$

Für Frequenzen unterhalb etwa 10 Hz macht sich in Gleichung (3.66) der Einfluss des Widerstandes der Ständerwicklung R_1 bemerkbar, den man durch eine überproportionale Spannungsanhebung ausgleichen kann (*IR-Kompensation*).

Für das Kippmoment und den Kippschlupf untersucht man die Gleichungen (3.60) und (3.61) auf ihre Frequenzabhängigkeit:

$$\begin{aligned} s_K &\approx \frac{R_2'}{X_\sigma} \sim \frac{1}{\omega_1 L_\sigma} \sim \frac{1}{f_1} \\ M_K &\sim \frac{U_1^2}{n_1 \cdot \omega_1 L_\sigma} \sim \frac{U_1^2}{\omega_1 \cdot \omega_1} \sim \left(\frac{U_1}{f_1}\right)^2 \; . \end{aligned} \tag{3.67}$$

Solange man $U_1 \sim f_1$ einstellt, bleibt das Kippmoment für alle Drehzahlen konstant.

Die *Schlupfdrehzahl*, d. h. die *absolute* Drehzahldifferenz zwischen n_1 und n bleibt wegen der Proportionalität in Gleichung (3.67) konstant:

$$\Delta n = n_1 \cdot s = \frac{f_1}{p} \cdot s = \text{ konstant.}$$

Daraus ergibt sich, dass die Momentenkennlinien bis zur Nennfrequenz parallel verlaufen bei konstantem Kippmoment, im Feldschwächbereich nimmt das Kippmoment quadratisch mit der Frequenz ab (siehe Abb. 2.79).

☞ Der Eisenverlustwiderstand R_{Fe} im ESB ist spannungs- und frequenzabhängig.

3.5.13 Gleichstrombremsen

Siehe dazu Gleichstrombremsen (Kap. 2.5.10).

Zur Berechnung des Bremsmomentes in Abhängigkeit vom Schlupf kann man genauso vorgehen wie im Abschnitt Numerische Berechnung beschrieben.

Die konstante Ständerdurchflutung simuliert man dadurch, dass man statt einer konstanten Klemmenspanung U_1 einen konstanten Strom I_1 einprägt. Die Impedanz Z_1 hat keine Auswirkung auf das dynamische Verhalten der Maschine. Bei eingeprägtem Strom I_1 erhält man für $I_2'(s)$

$$\underline{I}_2'(s) = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_2'(s) + \underline{Z}_0} \cdot \underline{I}_1$$

mit

$$\underline{Z}_2'(s) = \frac{R_2'}{1-s} + \mathrm{j}X_{2\sigma}' \; .$$

Daraus ergibt sich die Luftspaltleistung P_D und damit das Bremsmoment

$$P_D(s) = 3 \cdot \underline{I}_2'^2(s) \; \frac{R_2'}{1-s} \; .$$

Beim Schleifringläufer kann man durch zusätzliche Läuferwiderstände die Lage des Kippmomentes beeinflussen.

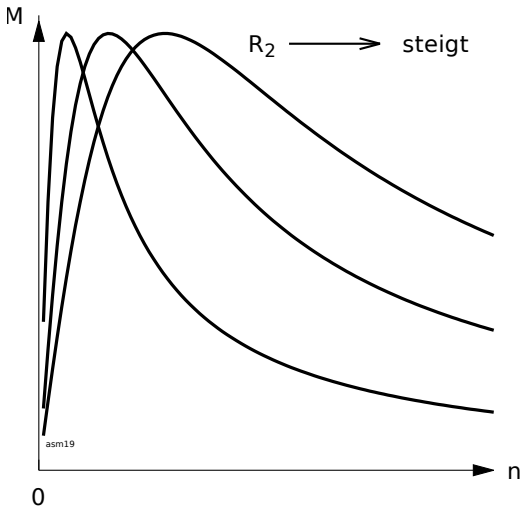


Abb. 3.114: Bremsmoment als Funktion der Drehzahl

3.5.14 Linearmotor

Siehe dazu gleichnamiges Kapitel Linearmotor (Kap. 2.5.11).

Während einer Periode wandert das Wanderfeld um 2 Polteilungen. Daraus ergibt sich für seine Synchrongeschwindigkeit

$$v_1 = 2 \cdot \tau_p \cdot f_1 \ .$$

Man erkennt, dass nicht die Polpaarzahl sondern nur die Polteilung τ_p sowie die Frequenz der Ständerspannung f_1 Einfluss auf die Geschwindigkeit haben. Für die Relativgeschwindigkeit v zwischen Induktor und Schiene muss man den Schlupf s berücksichtigen:

$$v = v_1 \cdot (1 - s) \ .$$

Zur Steuerung der Geschwindigkeit/Kraft stehen die von der ASM bekannten Verfahren zur Verfügung: Frequenz- und Spannungssteuerung, Änderung des »Läuferwiderstandes« R_2 und Polumschaltung(!).

Die Wirkungsweise des Linearmotors lässt sich aus der der Asynchronmaschine herleiten, statt eines Momentes wirkt eine Schubkraft, die eine geradlinige Bewegung verursacht. Ersetzt man in den Formeln das innere Drehmoment M_i durch die Schubkraft F, erhält man schließlich, mit d_1 als Bohrungsdurchmesser,

$$F = \frac{2}{d_1} \ M_i = \frac{P_D}{d_1 \cdot \pi \cdot n_1} = \frac{P_D}{v_1} \ .$$

Tatsächlich weicht das Betriebsverhalten des Linearmotors von dem des Asynchronmotors durch den Einfluss der Randzonen (inhomogene Magnetfelder) ab. Der Luftspalt ist aus mechanischen Gründen verhältnismäßig groß. Dadurch erhöht sich der Magnetisierungsstrom, verschlechtern sich Wirkungsgrad, Leistungsfaktor, Schubkraft und Schlupf.

Je nach Antriebsaufgabe kann man den Induktor oder die Schiene feststehend machen. Beim *Kurzstator* hat der Induktorkamm eine beschränkte Länge, die Schienenlänge bestimmt die

Bewegung. Fixiert man die Schiene, führt der Stator die Bewegung aus, die Antriebsleistung muss auf den bewegten Teil übertragen werden. Bei feststehendem Stator führt die Schiene den Schub aus. Beim *Langstator* bestimmt die Länge des Induktorkammes die Bewegungslänge, die Läuferlänge (Schiene) ist begrenzt. In diesem Fall muss die Drehstromwicklung über die ganze Wegstrecke verlegt werden.

Anwendungen findet der Linearmotor überall dort, wo geradlinige Bewegungen auszuführen sind, z. B. Torantriebe, Förderanlagen, Schneidvorgänge.

Neue Anwendungsgebiete erschließen sich im Transportwesen, z. B. TRANSRAPID-Magnetschwebebahn. Dabei versucht man, die Anziehungskräfte, die beim einseitigen Induktor auftreten, zur Verringerung der Reibungskräfte auszunutzen (berührungsfreie Lagerung und Führung). Ein doppelseitiger Linearmotor bildet den Antrieb.

3.5.15 Asynchrongenerator

Eine *am Drehstromnetz* liegende ASM geht beim Erhöhen der Drehzahl über die Synchrondrehzahl ($s < 0$) vom Motor- in den Generatorbetrieb über. Im ESB wird der Läuferwiderstand R_2'/s negativ, Spannung und Strom haben entgegengesetzte Richtung, aus dem Verbraucher wird ein Erzeuger. Im Kreisdiagramm wandert der Stromzeiger in den negativen Realteil (unterer Halbkreis), der Imaginärteil bleibt negativ. Den dazu entsprechenden Magnetisierungsstrom liefert das Drehstromnetz.

Steht kein Drehstromnetz zur Verfügung, arbeitet der Generator im *Inselbetrieb*. In diesem Fall liefert ein parallel zu den Klemmen geschalteter Kondensator den notwendigen Magnetisierungsstrom (wegen $I_\mu = -I_c$, siehe Abb. 3.115)[14]. Dazu wird in einem instationären Vorgang (Kon-

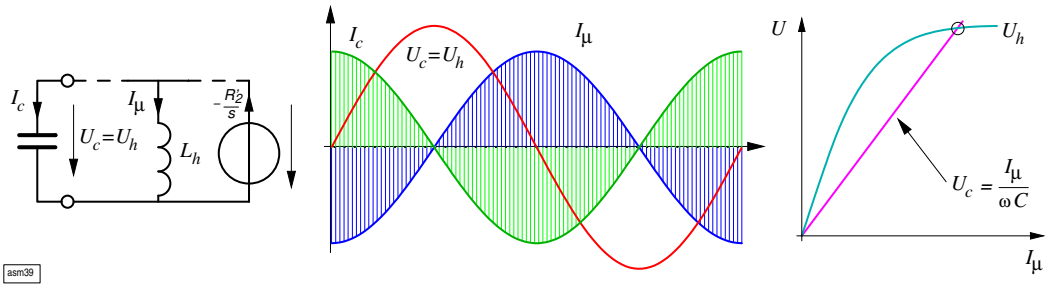


Abb. 3.115: Asynchrongenerator im Inselbetrieb

densator mit Gleichspannung aufladen, Stromstoß, Restmagnetismus) die sättigungsabhängige Hauptinduktivität L_h erregt (I_μ). Die induzierte Hauptspannung U_h erzeugt einen Strom durch den Kondensator, der gleichzeitig den neuen Magnetisierungsstrom darstellt: $I_\mu = U_h \cdot \omega C$. Induktivität und Kondensator bilden einen Schwingkreis. Dieser Vorgang schaukelt sich solange auf, bis sich infolge der Sättigung ein stabiler Gleichgewichtszustand einstellt (Schnittpunkt Leerlaufkennlinie U_h mit Kondensatorgeraden $I_\mu/\omega C$). Diese *Selbsterregung* tritt nur dann ein, wenn die Kapazität des Kondensators groß genug ist. Mit ihr lässt sich auch die Generatorspannung in weiten Grenzen einstellen.

Ändert sich durch die Belastung der Magnetisierungsbedarf, verstellt sich die Generatorspannung. Man erkennt aus der Wirkungsweise der Schaltung, dass selbsterregte Asynchrongeneratoren sich nur für einen konstanten Belastungszustand eignen. Mittels Kunstschaltungen (z. B.

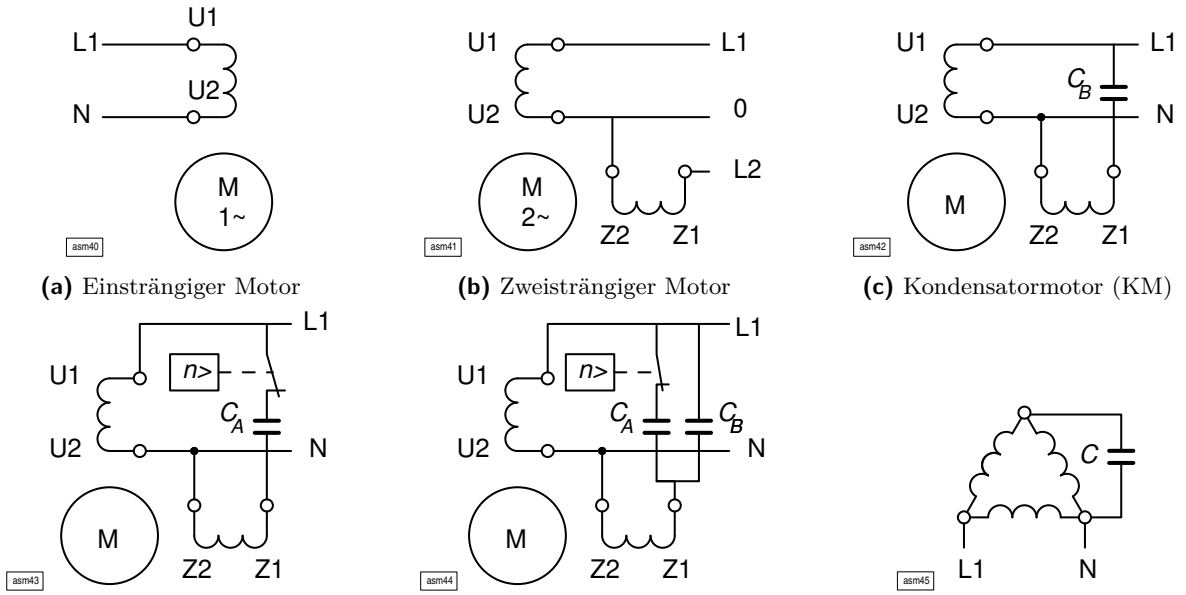
[14] Die Anordnung bildet im Prinzip einen Schwingkreis.

sättigungsabhängigen Drosseln, variable Kapazitäten) lässt sich jedoch eine belastungsunabhängige Spannungskonstanz erreichen.

Versuch 3.5.1 *Selbsterregter Asynchrongenerator*

3.5.16 Einphasige Asynchronmaschinen

Im Prinzip haben diese Motoren den gleichen Aufbau wie ein Kurzschlussläufer, je nach Anwendung ist ihre Ständerwicklung unterschiedlich ausgeführt. Man unterscheidet einsträngige Maschinen mit nur einer *Arbeitswicklung*, die auf etwa zwei Drittel des Umfangs untergebracht ist. Bei der zweisträngigen Maschine legt man zusätzlich eine *Hilfswicklung* in den restlichen Raum des Stators, die einen gegenüber der Arbeitswicklung phasenverschobenen Strom führen muss.



(a) Einsträngiger Motor **(b)** Zweisträngiger Motor **(c)** Kondensatormotor (KM)

(d) KM mit Anlaufkondensator **(e)** KM mit Doppelkondensator **(f)** Steinmetzschaltung

Abb. 3.116: Einphasige Asynchronmaschinen

Der *einsträngige Motor ohne Hilfswicklung* (Abb. 3.116a) kann nur ein Wechselfeld erzeugen. Er läuft damit nicht selbständig an (*Anwurfmotor*). Sein Kippmoment ist relativ gering, der Leistungsfaktor ist schlecht (hoher Magnetisierungsstrom) und er entwickelt nur etwa die Hälfte der Leistung eines entsprechenden Drehstrommotors.

Durch Hinzufügen einer zweiten, um $90°_{\text{el}}$ versetzten *Hilfswicklung* erhält man einen *zweisträngigen Motor* (Abb. 3.116b). Speist man beide Wicklungen aus einem Zweiphasensystem mit jeweils um $90°_{\text{el}}$ phasenverschobenen Spannungen, erhält man einen *Zweiphasenmotor*. Bei symmetrischem Aufbau und Betrieb überlagern sich beide Wechselfelder zu einem Kreisdrehfeld wie bei einer Dreiphasenmaschine. Mit zunehmender Phasenverschiebung zwischen den Strängen geht das Kreisdrehfeld in ein elliptisches Drehfeld über (in Analogie zu den Lissajous-Figuren), beim Ausfall einer Phase entsteht ein Wechselfeld (Grenzfall einer Ellipse mit nur einer Achse).

Für den einphasigen Betrieb kann man die phasenverschobene Spannung aus dem Netz mittels Phasenschieber (Kondensator, Induktivität, Widerstand) erzeugen. Wegen seiner guten Anlauf-

und Betriebseigenschaften sowie aus Kostengründen findet der *Kondensatormotor* weite Verbreitung (Abb. 3.116c). Verwendet man nur einen *Betriebskondensator*, so wird dieser so ausgelegt, dass der Motor selbst anläuft und im Nennpunkt die gleiche Leistung erbringt wie ein Zweiphasenmotor. Im Teillastbetrieb und Leerlauf stellen sich ungünstige Betriebswerte ein (kleineres Drehmoment, höhere Strangströme). Das Anlaufmoment ist mittelmäßig. Je kW Motorleistung benötigt man bei einer 230 V-Maschine etwa 25 bis 35 µF.

Um ein hohes Anlaufmoment zu erhalten, kann man den Betriebskondensator in der Hilfsphase vergrößern, gibt damit aber den optimalen Betrieb im Nennpunkt auf. Außerdem fließt ein Überstrom in der Hilfswicklung. Wenn es nur auf ein hohes Anlaufmoment ankommt und das Drehmoment der einsträngigen Maschine nach dem Hochlaufvorgang ausreicht, schaltet man nach dem Anlauf z. B. mit einem Fliehkraftschalter diesen *Anlaufkondensator* in der Hilfswicklung ab (Abb. 3.116d). Als Richtwert wählt man etwa 100 bis 120 µF je kW Motorleistung für den Anlaufkondensator.

Will man die Vorteile beider Schaltungen kombinieren, schaltet man einen Anlauf- und einen Betriebskondensator parallel (*Doppelkondensator*). Man erreicht dadurch ein hohes Anlaufmoment mit beiden Kondensatoren, nach dem Hochlauf schaltet ein Fliehkraftschalter den Anlaufkondensator ab und der Motor läuft mit dem Betriebskondensator unter optimalen Bedingungen weiter (Abb. 3.116e).

Beim Einphasenmotor mit *Widerstandshilfsphase* entsteht ein elliptisches Drehfeld durch künstliche Erhöhung des Wicklungswiderstandes der Hilfswicklung. Man erreicht dies z. B. durch geringeren Drahtquerschnitt, erhöhte Windungszahl, bifilare Wicklungen, die nur ein geringes oder gar kein Magnetfeld erzeugen, Wicklungen aus Widerstandsdraht. Wegen der hohen Erwärmungsverluste muss die Hilfswicklung nach dem Hochlauf abgeschaltet werden, der Motor läuft mit den Eigenschaften der einsträngigen Maschine weiter.

Ein und zweisträngige Motoren werden als Kleinmotoren bis etwa 1.5 kW wegen ihres robusten Aufbaus und des einfachen Einphasenanschlusses in großen Stückzahlen gefertigt. Sie dienen zum Antrieb von Wasch- und Reinigungsmaschinen, Küchenmaschinen, Kühl- und Heizgeräten, Lüftern, Büro- und Werkzeugmaschinen bis 3000 min^{-1}.

Weite Verbreitung finden *Drehstrommotoren im Einphasenbetrieb*. Mit Hilfe von Kondensatoren lässt sich ein symmetrisches Spannungssystem erzeugen, jedoch nur für einen Betriebspunkt (*Steinmetzschaltung*, Abb. 3.116f). Kleine Drehstrommotoren können dann, wenn sie für 230/400 V ausgelegt sind, am Drehstromnetz im Stern und einphasig im Dreieck mit der Steinmetzschaltung betrieben werden. Je kW Motorleistung wird eine Kapazität von etwa 75 µF benötigt. Das Anzugsmoment beträgt etwa ein Viertel des Nennmomentes, der Motor läuft selbsttätig an. Wegen des geringeren Kippmomentes und der größeren Verluste sollte die Maschine nur mit maximal 80 % ihrer Nennleistung belastet werden. Zur Erhöhung des Anlaufmomentes kann während des Hochlaufs ein Anlaufkondensator parallel zum Betriebskondensator geschaltet werden.

Ähnliche Verhältnisse liegen bei einem *Drehstrommotor mit einer unterbrochenen Zuleitung* vor. Weder bei Dreiecksschaltung noch bei Sternschaltung der Wicklungsstränge kann sich ein Drehfeld aufbauen (außer bei angeschlossenem Neutralleiter, was man aber nicht macht). Der Motor hat die gleichen Eigenschaften wie ein einsträngiger Einphasenmotor. Er kann ohne Hilfe nicht anlaufen. Fällt während des dreiphasigen Betriebes eine Phase aus, läuft er bei geringem Lastmoment weiter, bei zu hohem Lastmoment bleibt er stehen.

Typisches akustisches Anzeichen für den Ausfall einer Phase ist das auftretende Brummgeräusch, welches durch den einphasigen Betrieb entsteht (Wechselfeld) und der dadurch verbundenen Drehmoment-Pulsation mit doppelter Netzfrequenz.

3.5.17 Normen, Vorschriften

- *Anschlußbezeichnungen*:
  DIN VDE 0530 Teil 8, Abschnitt 1 und 2;
- *Ermittlung der Verluste und des Wirkungsgrades*:
  DIN 57 530 Teil 2/VDE 0530 Teil 2, Hauptabschnitt Drei;
- *Leitfaden für Installations- und Betriebs-Bezugsbedingungen …*:
  Beiblatt 1 zu DIN VDE 0530;
- *Anlasser für Gleichstrom-Motoren und Drehstrom-Schleifringläufermotoren*:
  DIN 46 062, VDE 0660;
- *Normmaße von oberflächengekühlten Drehstrommotoren mit Käfigläufer*:
  DIN 42 673.

3.6 Synchronmaschine – Teil 2

3.6.1 Magnetfelder eines Turbogenerators

Im Folgenden soll das Zusammenspiel von Läufer- und Ständerdrehfeld eines Turbogenerators untersucht werden, dessen Wicklungsaufbau wir bereits in Aufbau einer Ständerwicklung für eine Synchronmaschine, Kapitel 3.4.6 kennengelernt haben. Abb. 3.117 zeigt die dazugehörige Maschinengeometrie für eine Polteilung im Maßstab. Es handelt sich um eine 2-polige Maschine. Aus rechentechnischen Gründen werden im Läufer und Ständer Radialnuten angenommen[15]. Die Lage der Polwicklung und die Bohrungs- und Rückenstäbe der Zweischichtwicklung mit

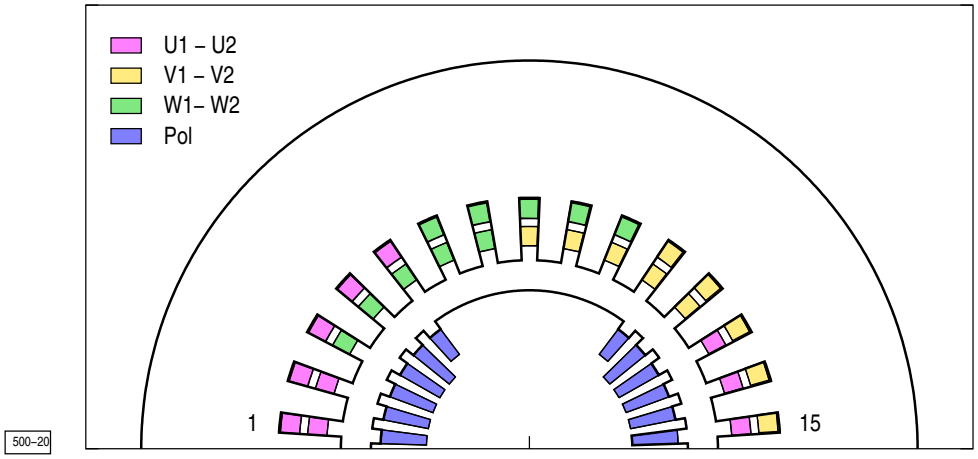


Abb. 3.117: Querschnitt des untersuchten Turbogenerators

ihrer Phasenzugehörigkeit sind markiert. Abb. 3.118 zeigt den Zonenplan mit der Lage der Läuferwicklung und ihren verkürzten Nuten am Pol für eine Polteilung.

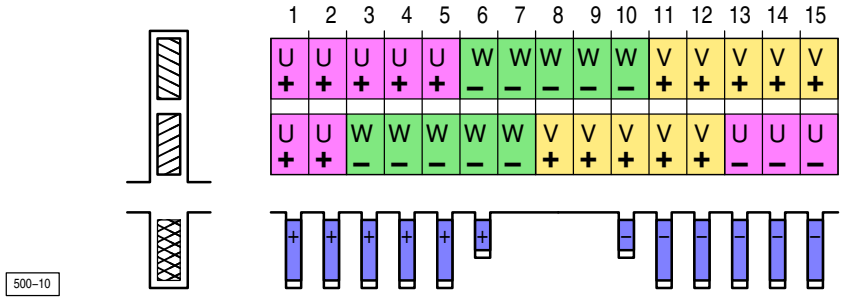


Abb. 3.118: Zonenplan der Ständerwicklung und Erregerwicklung

3.6.2 Leerlauf

Für den Leerlauffall wird das Polrad mit dem Leerlauferregerstrom I_{f0} erregt, die Ständerströme sind Null. Abb. 3.119 zeigt die Felderregerkurve $I_{f0} \cdot N(\alpha)$, wobei der Winkel α die Position im

[15] In der Praxis sind die Ständernuten parallelflankig, die Läufernuten werden als Trapeznuten oder auch parallelflankig ausgeführt.

Luftspalt angibt[16]. Mittels Fourieranalyse erhält man daraus den kontinuierlichen Verlauf der magnetischen Spannung $V_1(\alpha)$ für die Grundschwingung. Das Maximum der Durchflutung $\hat{V}_1$

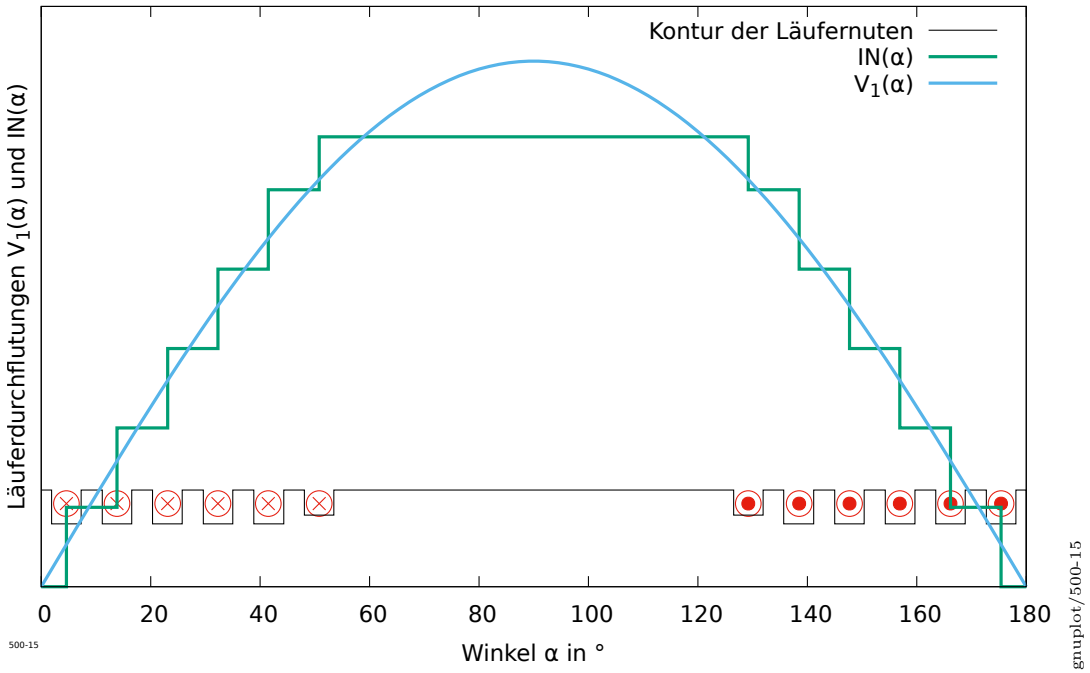


Abb. 3.119: Felderregerkurven $I_{f0} \cdot N(\alpha)$ und $V_1(\alpha)$ im Leerlauf

liegt in der Polachse des Läufers, wie nicht anders zu erwarten ist. Mit Gleichung (3.40) lässt sich daraus die Amplitude der resultierenden Feldkurve $B(\alpha) \equiv B(x)$ im Luftspalt abschätzen. Mit dem Luftspalt δ des Generators erhält man für das Maximum der Flussdichte im Luftspalt überschlägig

$$\hat{B} = \frac{\hat{V}}{\delta} \approx 1\,\mathrm{T}$$

unter der Annahme eines konstanten Luftspaltes δ (keine Nutung) und unendlicher Permeabilität des Eisens ($\mu_r = \infty$).

Exaktere Werte liefert z. B. eine numerische Feldberechnung, die die Nutung sowie die Magnetisierungskennlinien der verwendeten Eisenwerkstoffe (Rotorstahl für die Läuferwelle und Polrad, Ständerblech) berücksichtigt. Abb. 3.120 zeigt den berechneten Flussverlauf des leerlaufenden Generators.

Aus diesem berechneten Feldverlauf lässt sich das Luftspaltfeld bestimmen, welches das Polradfeld tatsächlich erzeugt. Abb. 3.121 zeigt den Verlauf der radialen Flussdichte $B(\alpha)$ über eine Polteilung in Luftspaltmitte sowie die dazugehörige Grundschwingung $B_1(\alpha)$, die mittels einer Fourieranalyse gewonnen wurde[17]. Das Maximum liegt etwas über 1 T, also fast 20 % niedriger als der Schätzwert und lässt sich durch die Berücksichtigungen der Eisensättigung und der Nutung erklären.

[16] In Abb. 3.119 wird für den Läuferstrom ein Linienstrom angenommen, der Durchflutungswert springt an dieser Stelle um den Stromwert. In Wirklichkeit ändert sich die Durchflutung linear mit dem Nutquerschnitt und damit mit der Nutbreite.

[17] mit den Koeffizienten $a_1 \approx 0$ und $b_1 = 1.00520718$

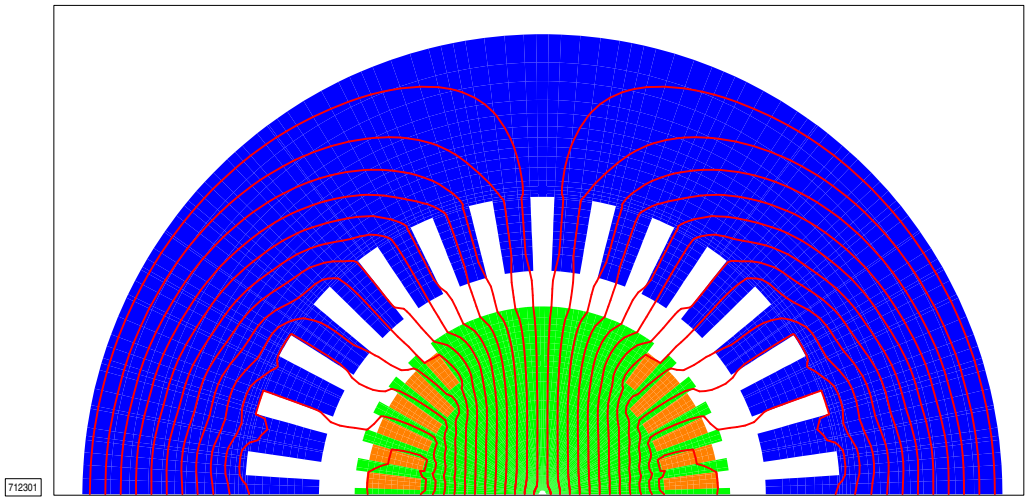


Abb. 3.120: Flussverlauf im Leerlauf

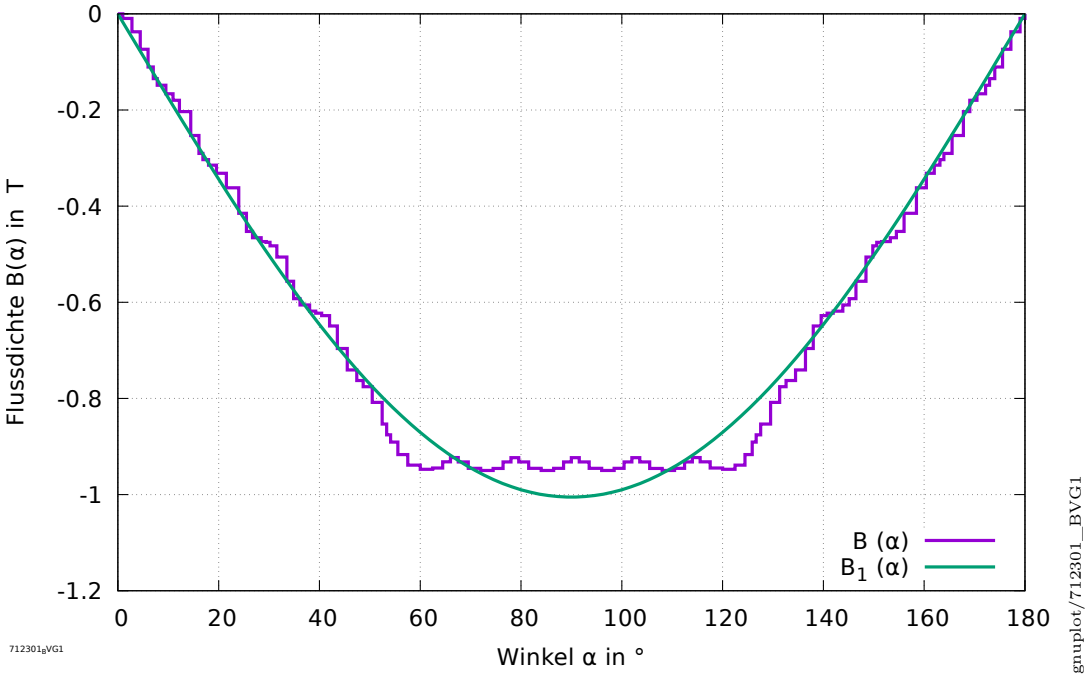


Abb. 3.121: Flussdichte in Luftspaltmitte im Leerlauf

Bei dem zugrunde gelegten Berechnungsverfahren der *finiten Differenzen (FD)* überzieht man den zu untersuchenden Bereich mit einem orthogonalen Gitternetz[18], das den Bereich in sog. *Elementarbereiche*, bei zweidimensionalen Rechnungen *Elementarflächen*, bei dreidimensionalen *Elementarquader* unterteilt. Für rotationssymmetrische Anordnungen verwendet man bei zweidimensionale Rechnungen ein Polarkoordinatensystem, im dreidimensionalen Fall bieten sich Zylinderkoordinaten an. Die Gitterlinien werden durch eine Schar von Kreisen um den Koordinatenursprung und Geraden durch den Koordinatenursprung gebildet. Das Gitternetz *diskretisiert* den zu untersuchenden Bereich (Rechenbereich). Innerhalb eines Elementarbereiches nimmt man die Materialeigenschaften und physikalischen Größen als konstant an. Beispielsweise ist die berechnete Flussdichte innerhalb einer Elementarflä-

[18] Die Gitterlinien kreuzen sich im rechten Winkel.

che ebenfalls konstant. Aus diesem Grund muss der Verlauf der Luftspaltinduktion $B(\alpha)$ als Treppenfunktion gezeichnet werden. Siehe auch Numerische Feldberechnung.

Der Verlauf der Flussdichte im Luftspalt $B(\alpha)$ ähnelt dem der Durchflutungskurve $I_{f0}\,N(\alpha)$ (Abb. 3.119). Deutlich ist die Abflachung im Polbogen[19] zu erkennen. Man erkennt, vor allem im Polbogen, auch den Einfluss der Ständernutung.

Mit der Grundschwingung des Luftspaltfeldes $B_1(\alpha)$ können wir jetzt im Prinzip die Leerlaufspannung des Generators abschätzen. Da keine Ständerströme fließen induziert nur das Läuferfeld eine Spannung in der Ständerwicklung. Die Grundschwingung der räumlichen Feldverteilung lässt sich beim Leerlauf nach Abb. 3.121 durch eine Sinusfunktion beschreiben:

$$B_1(\alpha) = \hat{B}_1 \sin\alpha\,.$$

Tatsächlich rotiert das Läuferfeld $B_1(\alpha)$ synchron mit dem Läufer, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit ωt wegen $p = 1$.

Die in einem Leiterstab induzierte Spannung bei der Drehzahl n lässt sich aus

$$u = \int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} \qquad \text{mit} \quad \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{und} \quad v = 2\,\pi\,r\,n$$

berechnen. Die Abstände r der Ober- und Unterstäbe von der Läuferachse sind bekannt. Da $\vec{v}$ senkrecht auf der radialen Flussdichte $\vec{B}_1$ steht und $\vec{E}$ in Richtung des Leiterstabes $\vec{s}$ weist, kann man die Gleichung vereinfachen und erhält für einen Leiterstab der Länge l

$$u_{\mathrm{stab}} = \hat{B}_1 \cdot 2\,\pi \cdot r \cdot n \cdot l \tag{3.68}$$

Anteile, die durch das Stirnraumfeld in der Evolventenwicklung induziert werden, sind vorhanden, tragen aber nur im geringen Maße zur Spannungsinduktion bei und werden vorläufig vernachlässigt.

Die Gesamtspannung eines Stranges erhält man aus den Wicklungsfaktoren. Vereinfachend nehmen wir an, dass die Leiterstäbe alle den gleichen Abstand r von der Läuferachse haben (wie eine Einschichtwicklung). Für die Spannung in einem Leiterstab pro Meter ergibt sich dann entsprechend Gleichung (3.68) mit den Werten der Fourieranalyse (siehe Abb. 3.121 und Fußnote [17]) $\hat{B}_1 = 1.0052\,\mathrm{T}$

$$u_{\mathrm{stab}} = 1.0052\,\mathrm{T} \cdot 2\,\pi \cdot 0.7\,\mathrm{m} \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1\,\mathrm{m} \approx 221\,\mathrm{V/m}\,.$$

Die Nutteilung τ_n ausgedrückt als Winkel beträgt $\tau_n = 360°/30 = 12°$, die Lochzahl ist $q = 5$. Damit lässt sich der Zonenfaktor mit Gleichung (3.46)

$$\xi_z = \frac{\sin(5 \cdot 6°)}{5\sin(6°)} = 0.9566\ldots\,,$$

der Sehnungsfaktor mit Gl. (3.48)

$$\xi_s = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{12}{15}\right) = 0.951\ldots$$

und damit der Wicklungsfaktor für die Grundschwingung

$$\xi = \xi_z \cdot \xi_s = 0.9098\ldots$$

[19] Als *Polbogen* bezeichnet man den ungenuteten Teil des Läufers, durch ihn verläuft mittig die *Polachse*.

bestimmen. Da insgesamt 20 Leiterstäbe die Wicklung für einen Strang bilden ergibt sich für die Gesamtspannung pro Meter Statorlänge

$$U_{\text{strang}} = \xi \cdot 20 \cdot u_{\text{stab}} \approx 4022\,\text{V/m}\ .$$

Statt mit den Wicklungsfaktoren zu rechnen kann man die induzierte Spannung durch Auswertung des Integrals $\int \vec{E}\mathrm{d}\vec{s}$ berechnen, in dem man den Weg $\mathrm{d}\vec{s}$ der Ständerwicklung verfolgt.

Das Verfahren eignet sich zur Auswertung *diskreter* Feldwerte, so wie sie die vorher beschriebene numerische Feldberechnung liefert. Ausgehend von einer dreidimensionalen Feldberechnung in Zylinderkoordinaten (r, θ, z) liegt die räumliche Flussdichteverteilung als diskrete Funktion $\vec{B} = \vec{B}(r, \theta, z)$ vor. Uns interessiert nur die Grundschwingung $B_1(r, \theta, z)$. Mittels Fourieranalyse erhält man für jede Gitterebene r und z längs des Umfangs θ die Grundschwingung in der Form

$$B_1(r, \theta, z) = a_1(r, z)\cos\theta + b_1(r, z)\sin\theta$$

mit $0 \le \theta \le 2\,\tau_p$ und a_1, b_1 als Koeffizienten für die Grundschwingung.

Die Feldberechnung liefert nur eine statische Feldverteilung zu einem bestimmten Zeitpunkt. In Wirklichkeit rotiert das Feld um die z-Ache (entspricht der Läuferachse) mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Wegen $p = 1$ kann man den räumlichen Winkel θ durch den zeitlichen Winkel $\omega\,t$ ersetzen. An einem beliebigen Punkt im Ständer und Stirnraum des Generators mit dem azimutalen[20] Positionswinkel β erscheint das Feld zeitlich phasenverschoben

$$B_1(t, r, \beta, z) = \hat{B}_1(r, z)\sin(\omega\,t - \beta)$$

und man erhält

$$\begin{aligned} B_1(t, r, \beta, z) &= a_1(r, z)\cos(\omega\,t - \beta) + b_1(r, z)\sin(\omega\,t - \beta) \qquad \text{oder} \\ B_1(t, r, \beta, z) &= a_1'(r, z)\cos\omega\,t + b_1'(r, z)\sin\omega\,t \qquad \text{mit} \\ a_1' &= a_1(r, z)\cos\beta + b_1(r, z)\sin\beta \\ b_1' &= b_1(r, z)\cos\beta - a_1(r, z)\sin\beta\ . \end{aligned} \tag{3.69}$$

Gleichung (3.69) beschreibt den zeitlichen Verlauf für die Grundschwingung der Flussdichte $B_1(t)$ an jedem Punkt der Maschine. Wegen der geometrischen Addition der Teilspannungen bietet sich an, Gleichung (3.69) komplex zu schreiben, wobei wir vorläufig die Grundschwingung der Flussdichte B_1 nur als B bezeichnen:

$$\begin{aligned} \Re\{\underline{B}\} &= a_1' \\ \Im\{\underline{B}\} &= -b_1'\ . \end{aligned}$$

Damit sind wir jetzt in der Lage, die Feldstärke $\underline{E}$ zu berechnen. Abb. 3.122 zeigt am Beispiel eines beliebigen Punktes P in der Ständernut die Auswertung des Vektorproduktes $\underline{E} = \vec{v} \times \underline{B}$ im Abstand r von der z-Achse. Das Läuferfeld mit seinen Komponenten $(\underline{B}_r, \underline{B}_\theta, \underline{B}_z)$ rotiert mit der tangentialen Geschwindigkeit $v = r\,\omega$ und erzeugt die elektrische Feldstärke $\underline{E}$ mit den Komponenten

$$\underline{E}_r = r\,\omega\,\underline{B}_z \qquad -\underline{E}_z = r\,\omega\,\underline{B}_r \qquad \underline{E}_\theta = \vec{v} \times \underline{B}_\theta = 0\ . \tag{3.70}$$

Als nächstes betrachten wir einen beliebigen Elementarbereich unserer numerischen Feldberechnung, in dem gemäß der Diskretisierungsvereinbarung alle Feldwerte als konstant angenommen werden (Abb. 3.123). Der Leiter durchstößt den Bereich, in dem die Feldstärke

[20] Winkel in Richtung θ

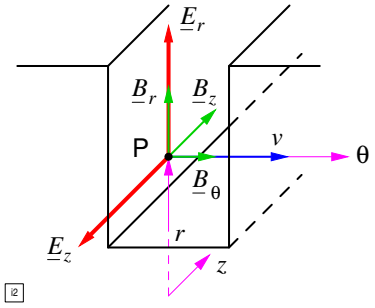


Abb. 3.122

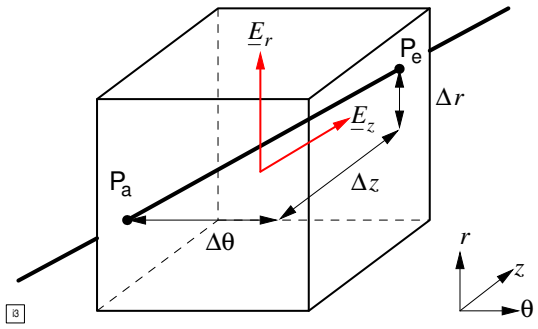


Abb. 3.123

$\underline{E} = (\underline{E}_r, \underline{E}_z)$ vorherrscht, an den Punkten P_a, P_e. Die zwischen den Durchstoßpunkten induzierte Teilspannung $\Delta\underline{U}$ erhält man, in dem man die jeweiligen Komponenten von $\underline{E}$ mit den entsprechenden Wegkomponenten von $\Delta\vec{s}$ multipliziert:

$$\Delta\underline{U} = \underline{E}_r\,\Delta r - \underline{E}_z\,\Delta z\,, \qquad \text{da} \quad \underline{E}_\theta\,\Delta\theta = 0\,. \tag{3.71}$$

Man beachte, dass für dieses Verfahren auch die achsiale Komponente B_z benötigt wird, falls die Teilleiterspannung auch außerhalb der Ständernuten berechnet werden soll, z. B. im Stirnraum für die Evolventenwicklung (da in Gl. (3.71) $\Delta r \neq 0$).

In der Praxis gibt man den Verlauf der Wicklung als Polygonzug vor. Dann bestimmt man mittels Fourieranalyse für alle Elementarbereiche und nach Gl. (3.69) die Komponenten $\underline{B}_r, \underline{B}_z$ und daraus $\underline{E}_r, \underline{E}_z$ unter Anwendung der Gleichung (3.70). Im letzten Schritt arbeitet man den Polygonzug $\vec{s}$ der Wicklung ab in dem man die Elementarbereiche ermittelt, durch die der Polygonzug verläuft, bestimmt die Teilspannung nach Gleichung (3.71) und erhält die Gesamtspannung $\underline{U}$ des Polygonzuges durch Summation aller Teilspannungen.

Da wir bei den Wicklungsfaktoren den Stirnraum ausgelassen haben, wollen wir hier auch nur die Leiterstäbe in den Nuten betrachten, und zwar die zum Strang U1 – U2 gehörenden entsprechend dem Zonenplan in Abb. 3.118. Abb. 3.124 zeigt den dazugehörigen *Nutenspannungsstern* einer Wicklungshälfte. Weiterhin sollen die Leiterstäbe in den Nuten alle den gleichen Abstand r von der z-Achse haben (wir mitteln die Abstände von Ober- und Unterstäbe, s. o.). Somit entfällt bei der Berechnung von $\Delta\underline{U}$ der Anteil Δr und damit die Berechnung der Komponenten $\underline{B}_z$ und $\underline{E}_r$. Aus diesem Grund brauchen wir auch nur für diesen Radius die Komponenten a_1', b_1' nach Gl. (3.69) zu bestimmen. Für die Ermittlung der Leerlaufspannung nehmen wir eine gleichmäßige Feldverteilung in z-Richtung der Maschine an und benutzen dafür den gleichen Wert $\hat{B}_1$ aus Gleichung (3.68).

Die Ergebnisse einer zwei- und dreidimensionalen Feldberechnung sind nicht identisch trotz gleicher Stromvorgaben und Geometrie. Die Ursache liegt daran, dass man bei der zweidimensionalen Berechnung von einer unendlich langen Maschine ausgeht und die Endpartien nicht berücksichtigt, im Gegensatz zur dreidimensionalen Rechnung. Die Endpartien (Stirnraum, Streufelder) schwächen im allg. das Luftspaltfeld. Um die unterschiedlichen Berechnungsmethoden miteinander vergleichen zu können, werden die Koeffizienten der zweidimensionalen Rechnung verwendet.

Wir beginnen beim Unterstab in der Nut 1 (US-01), durchlaufen den Oberstab der Nut 13 (OS-13) in *entgegengesetzter* Richtung und fahren anschließend mit US-02 etc. fort. In jedem Leiterstab berechnen wir die induzierte Spannung $\Delta\underline{U}$ aus

$$\Delta\underline{U} = -\underline{E}_z\,\Delta z = \omega\, r\,\underline{B}_r = \omega\, r\,\hat{B}_1\,(\cos\beta + \mathrm{j}\,\sin\beta) \quad \text{mit} \quad \Delta z = 1\,\mathrm{m}\,.$$

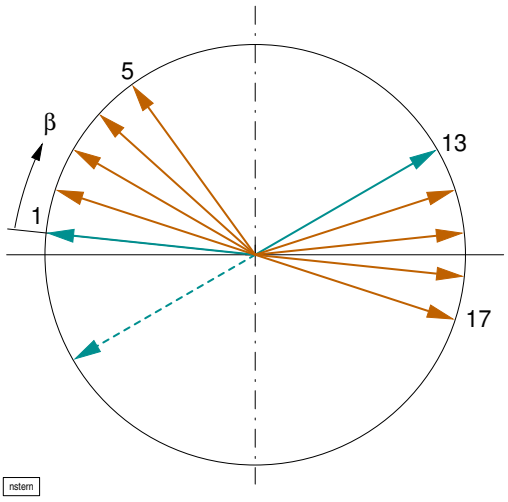


Abb. 3.124: Nutenspannungsstern

Tabelle 3.4: Nutenspannungen in V/m

Stab-Nut	β in °	$\Re\{\Delta\underline{U}\}$	$\Im\{\Delta\underline{U}\}$
US-01	0	221.06	0.00
OS-13	144	178.84	-129.93
US-02	12	216.23	45.96
OS-14	156	201.95	-89.91
US-03	24	201.95	89.91
OS-15	168	216.23	-45.96
US-04	36	178.84	129.93
OS-16	180	221.06	0.00
US-05	48	147.92	164.28
OS-17	192	216.23	45.96
	$\sum \Delta\underline{U}$	2000.27	210.23

Tabelle 3.4 enthält die komplexen Leiterspannungen $\Delta\underline{U}$ für jede Nut mit dem dazugehörigen Positionswinkel β. Alle Werte sind gerundet und beziehen sich auf eine Leiterlänge von 1 m. Mit den Werten aus Tabelle 3.4 erhält man für die Gesamtspannung des Stranges U

$$U_{\text{Strang}} = 2 \cdot \left|\sum \Delta\underline{U}\right| \approx 4022.58\,\text{V/m}\ ,$$

der Faktor 2 berücksichtigt den Anteil der zweiten Wicklungshälfte, US-16 bis OS-02. Mit

$$\arctan \frac{\Im\{\underline{U}\}}{\Re\{\underline{U}\}} = 6°$$

erhält man die Phasenlage von U_{Strang}. Der Winkel 6° entspricht einer halben Nutteilung und der Position des Leiters in der ersten Ständernut (S-01). Dies bedeutet, dass in der gezeichneten Lage des Läufers mit der Polachse bei $\alpha = 90°$ und der Läuferflussdichte $B_1(\alpha) = \hat{B}_1 \sin\alpha$ sich die Strangspannung entsprechend $U_u(\alpha) = \cos\alpha$ ändert, mit dem Maximum bei $\alpha = 0°$, also um $\pi/2$ phasenverschoben zum Läuferfeld.

Beide Berechnungsmethoden liefern die gleiche induzierte Spannung. Danach würde ein Generator mit einer Statorlänge von z. B. 5 m eine Strangspannung von ca. 20100 V erzeugen.

☞ **Alle Flussdichten und Spannungen sind Amplitudenwerte.**

Die direkte Berechnung des Integrals $\int \vec{E}\mathrm{d}\vec{s}$ lässt sich programmtechnisch einfach umsetzen und eignet sich vor allem bei beliebigen Leiteranordnungen unter der Voraussetzung, dass die Feldwerte in diskreter Form dreidimensional vorliegen.

3.6.3 Lastfall

Bei Belastung des Generators fließen Ströme durch die Ständerwicklung, deren Größe und Phasenlage durch die Art der Verbaucherlast bestimmt werden. Die drei Strangströme erzeugen ebenfalls ein Drehfeld, welches sich aus der Überlagerung der drei Strangströme gemäß des Zonenplans ergibt (siehe Aufbau einer Ständerwicklung für eine Synchronmaschine und Abb. 3.95). Dieses Drehfeld überlagert sich mit dem Läuferfeld zu einem resultieren Luftspaltfeld. Statt mit Magnetflüssen zu arbeiten lassen sich bei *linearer* Betrachtung auch die sie erzeugenden Ströme verwenden.

Das d-q-System

Der magnetische Kreis bei Maschinen mit ausgeprägten Polen (Innen-, Außenpole) — dazu gehört auch die Gleichstrommaschine — besitzt unterschiedliche magnetische Leitwerte durch den variablen Luftspalt. Das äußert sich im Luftspaltfeld durch unterschiedliche Flussdichten. Die Längsdurchflutung ist am größten im Bereich des Polbogens und am kleinsten in der Pollücke bzw. im genuteten Bereich eines Turboläufers. Man ordnet dem poltragenden Teil der Maschine ein Koordinatensystem zu, welches zwei Achsen definiert: die *d-Achse* oder *Längsachse*, die mit der Polachse zusammenfällt, und die um $-\tau_p/2$ versetzte *q-Achse* oder *Querachse*, die in der Pollücke liegt. Dieses d-q-System ist an die Pole gebunden und stellt bei Innenpolmaschinen ein läuferfestes Koordinatensystem dar, d. h. es rotiert synchron mit dem Polrad.

Aus der Sicht der Ständerwicklung bedeutet dies, dass je nach Lage des Polrades die Reaktanz der Maschine unterschiedlich ist. Man unterscheidet zwischen der Hauptreaktanz X_d und der Quereaktanz X_q. Dazu zerlegt man die Ströme der Ständerwicklung ebenfalls in zwei Anteile und ordnet sie den Reaktanzen zu. Die allgemeine Spannungsgleichung für einen Strang lautet (Herleitung siehe [23, Kap.1.2.1.1])

$$\underline{U} = R\,\underline{I} + \mathrm{j}\,X_d\,\underline{I}_d + \mathrm{j}\,X_q\,\underline{I}_q + \underline{U}_p \qquad \text{mit} \quad I = \sqrt{I_d^2 + I_q^2}\,, \tag{3.72}$$

der Netzspannung U, der Polradspannung U_p und dem Wicklungswiderstand R. Das dazugehörige Zeigerdiagramm ist in Abb. 3.125 dargestellt. Abb. 3.126 zeigt, wie man bei vorgegebe-

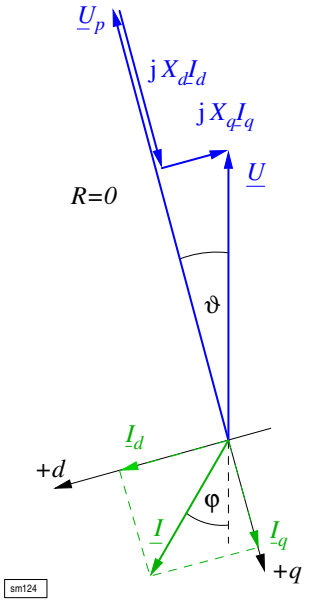


Abb. 3.125: Gleichung (3.72)

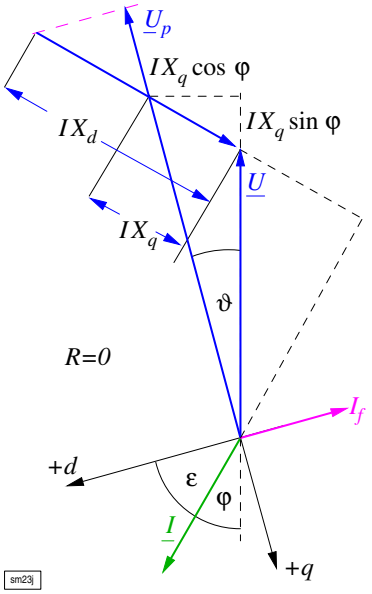


Abb. 3.126: Bestimmung von U_p

ner Belastung $U, I, \cos\varphi$ und bekannten Synchronreaktanzen X_d, X_q die Polradspannung U_p und damit den Erregerstrom I_f sowie den Polradwinkel ϑ grafisch bestimmen kann. Gleichzeitig erhält man den Winkel ε, der die Phasenverschiebung zwischen dem Ständerdrehfeld und dem entgegengesetzt gerichteten Läuferdrehfeld angibt und sich ergibt aus

$$\varepsilon = 90° - (\varphi + \vartheta)\,.$$

Im Anhang Mathematisches Modell einer Synchronmaschine wird ein Modell der Synchronmaschine entwickelt, das auch den Einfluss der Dämpferwicklung berücksichtigt.

Zur Berechnung des Ständerdrehfeldes wollen wir von einer symmetrischen Belastung ausgehen und betrachten nur das Grundwellenfeld. Bei Turbogeneratoren handelt es sich um sog. Vollpolmaschinen, die Querreaktanz X_q ist etwas geringer als die Längsreaktanz X_d und wird häufig gleich X_d gesetzt (siehe Kapitel Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm). Mit der Vorgabe einer Belastung $(I, \cos\varphi)$ gilt für die drei Strangströme

$$\begin{aligned} I_u(t) &= I\cos\Big(\omega(t-t_0)-\varphi\Big) \\ I_v(t) &= I\cos\Big(\omega(t-t_0)-\varphi-2\pi/3\Big) \\ I_w(t) &= I\cos\Big(\omega(t-t_0)-\varphi+2\pi/3\Big) \end{aligned} \tag{3.73}$$

mit t_0 als Zeitpunkt, bei dem das resultierende Luftspaltfeld um den Winkel ε von der d-Achse verschoben ist. Diese Vorgehensweise ist notwendig, da das Verdrehen des Polrades um den Polradwinkel ϑ die Feldberechnung sehr aufwändig machen würde. Statt dessen verschiebt man die Ständerströme um den Winkel $\omega\, t_0$ und erreicht das gleiche Ergebnis.

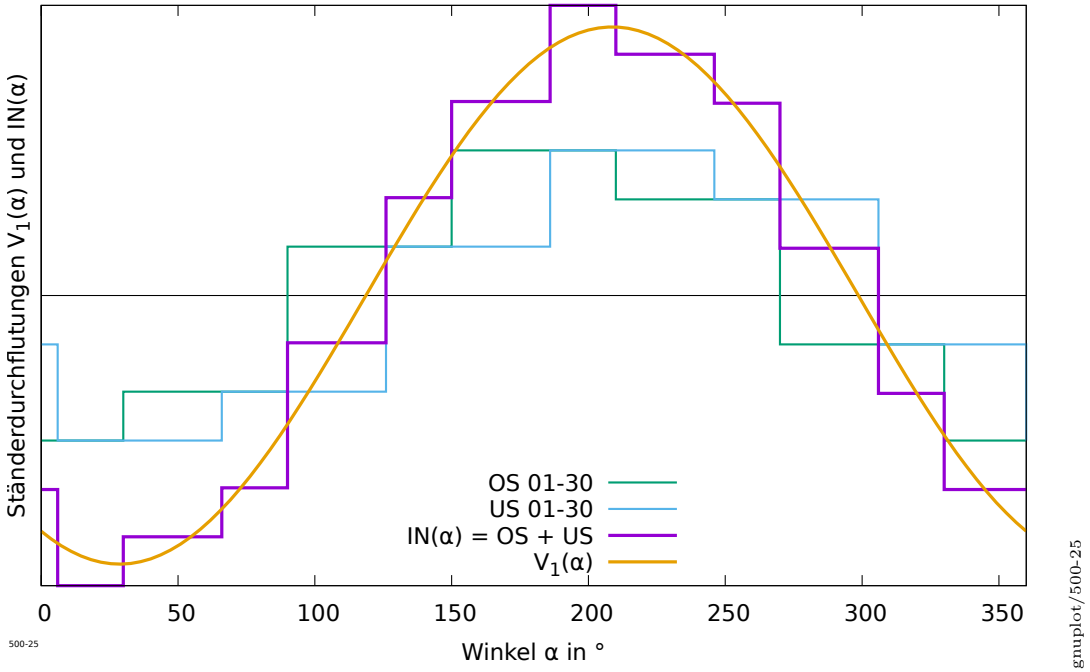


Abb. 3.127: Ständerdurchflutung des belasteten Generators

Abb. 3.127 zeigt die Gesamtständerdurchflutung $IN(\alpha)$, die sich aus den drei Strangströmen nach Gl. (3.73) ergibt, die dazugehörige Grundschwingung $V_1(\alpha)$ sowie die Anteile aus den Ober- und Unterstäben gemäß des Zonenplans der Maschine.

Natürlich muss der Erregerstrom dem Lastfall angepasst werden. Eine Möglichkeit, den Erregerstrom zu bestimmen, ergibt sich aus dem Zeigerdiagramm nach Abb. 3.126 und der Leerlaufkennlinie des Generators (Abb. 2.89 in Kapitel Betriebsverhalten). Man bestimmt grafisch die Polradspannung U_p und sucht den dazugehörigen Erregerstrom aus der Kennlinie $U_p(I_f)$[21]. Mit diesen Strömen lässt sich die Feldberechnung wiederholen.

[21] In Kapitel Betriebsverhalten wird der Erregerstrom mit I_E gekennzeichnet.

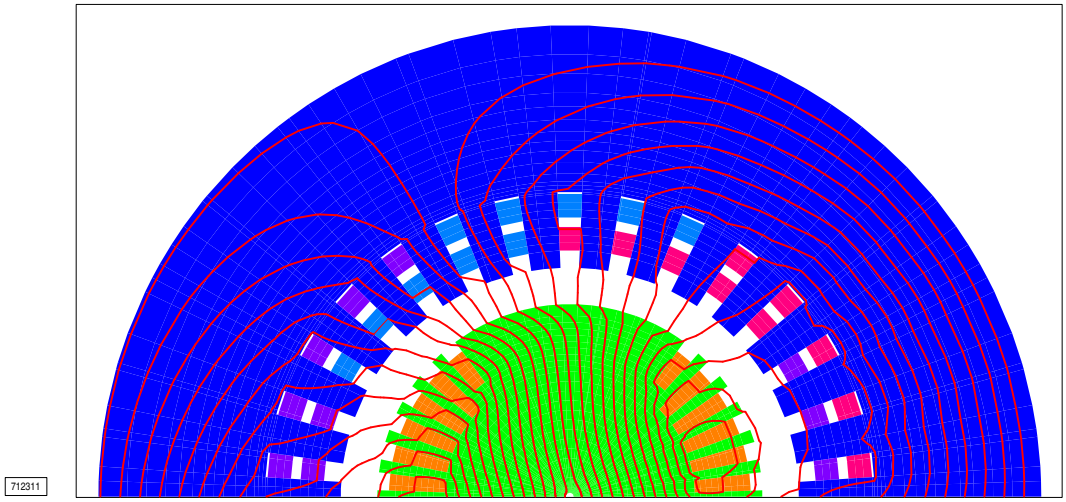


Abb. 3.128: Feldverteilung bei belastetem Generator

Die Feldverteilung in Abb. 3.128 zeigt, dass sich das Feld im Vergleich zum Feldverlauf beim Leerlauf (Abb. 3.120) verdreht hat, und zwar aufgrund der Rückwirkung des Ständerfeldes mit dem Erregerfeld. Quantitative Informationen über die Höhe und grundsätzliche Richtung der Flussdichte (positiv/negativ) liefert das Feldlinienbild nicht. Wertet man die Flussdichte im Luftspalt längs des Umfangs aus erhält man den Verlauf, der in Abb. 3.129 dargestellt ist. Das negative Maximum von $B_1(\alpha)$ hat sich gegenüber dem Leerlauf um etwa –17° (gegen die Drehrichtung) verschoben, die Amplitude ist im Vergleich zum Leerlauf etwa 10 % größer.

> Der Grund für die Darstellung der Flussdichte in Form einer Treppenkurve wurde bereits vorher schon erläutert. Den dargestellten Verlauf $B(\alpha)$ muss man sich als Momentaufnahme vorstellen. Durch die unterschiedlichen Nutteilungen von Läufer und Ständer ergeben sich für jede Position des Läufers unregelmäßige Flussdichten. Sie erzeugen Oberschwingungen mit unterschiedlichen Ordnungszahlen, die sich teilweise auslöschen oder zur Kurvenform der Spannung beitragen und deren Wirkung hier nicht weiter untersucht werden. Zur Untersuchung der *Ankerrückwirkung* wird nur die Grundschwingung $B_1(\alpha)$ betrachtet.

3.6.4 Kurzschluss

Schließt man die drei Klemmen der unerregten Maschine kurz (Abb. 3.130) und stellt anschließend den Erregerstrom I_{E0} ein, der im Leerlauf die Nennspannung induziert, fließt der *stationäre Dauerkurzschlussstrom* I_{k0}. Das Verhältnis

$$\frac{I_{k0}}{I_N} = \frac{U_N}{X_d \cdot I_N} = \frac{Z_N}{X_d} = \frac{1}{x_d} = k_c$$

bezeichnet man als *Leerlauf-Kurzschlußverhältnis*. x_d ist die auf die Nennimpedanz $Z_N = U_N^2/S_N$ bezogene Synchronreaktanz in relativen Einheiten („per unit“). Für Vollpolmaschinen rechnet man mit $0.4 < k_c < 0.9$, d. h. der 3-polige Dauerkurzschlussstrom liegt unterhalb des Nennstromes.

Etwas anders liegen die Verhältnisse bei unsymmetrischen Kurzschlüssen, also ein- und zweipoligen (Abb. 3.130). Bedingt durch die Unsymmetrie treten jetzt zusätzlich Wechselfelder auf, die

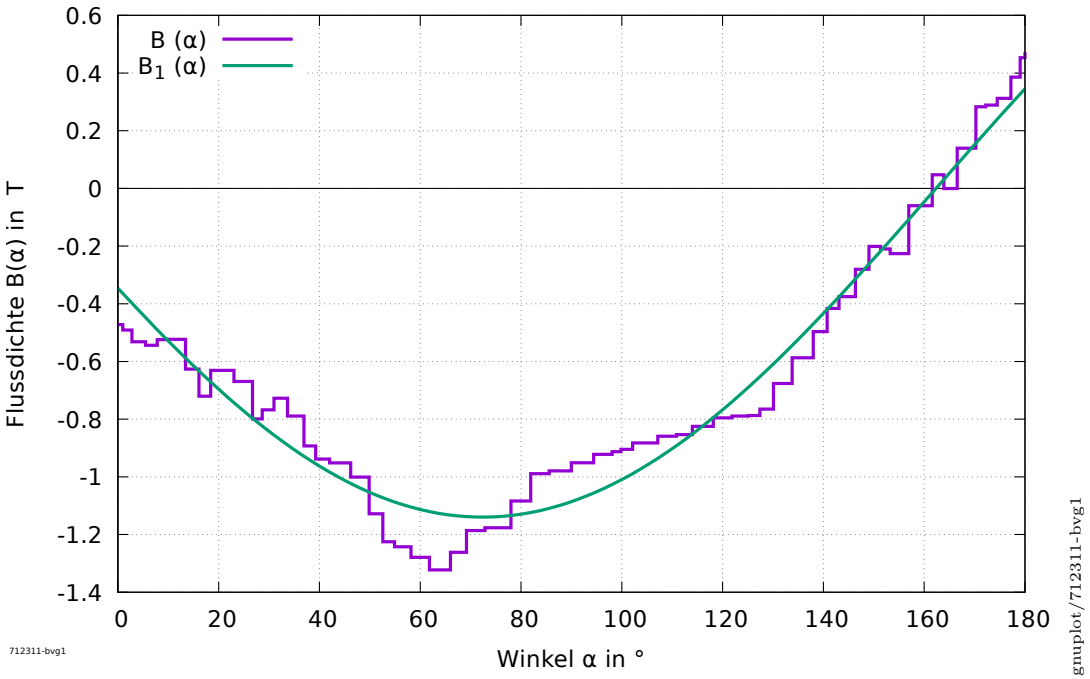


Abb. 3.129: Flussdichte in Luftspaltmitte bei belastetem Generator

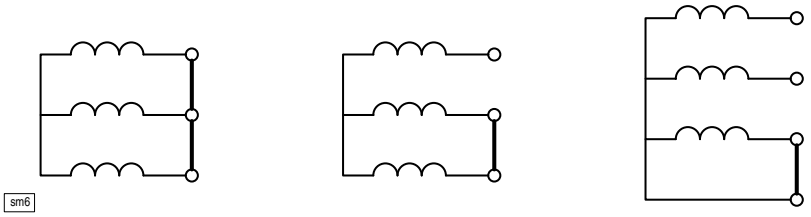


Abb. 3.130: Kurzschlussarten beim Synchrongenerator

in der Erregerwicklung Spannungen mit doppelter Frequenz und im massiven Läufer zusätzliche Wirbelstromverluste erzeugen. Für die Kurzschlussströme gilt

$$I_{\mathrm{k1pol}} = \sqrt{3} \cdot I_{\mathrm{k2pol}} = 3 \cdot I_{\mathrm{k3pol}} \ .$$

In der Praxis sind diese Werte etwas niedriger. Wie man sieht, ist die Synchronmaschine besonders beim 1-poligen Kurzschluss gefährdet.

Werden die drei Klemmen eines erregten Generators plötzlich kurzgeschlossen, kommt es im ersten Augenblick zum *Stoßkurzschluss*. Dabei treten während des Ausgleichsvorganges Stromspitzen sowohl in der Ständerwicklung als auch in der Läuferwicklung auf, die den Generator stark beanspruchen können. Ursache ist die zum Kurzschlusszeitpunkt fehlende Ankerrückwirkung.

Bei dem zeitlichen Verlauf des Kurzschlussvorganges unterscheidet man drei Phasen (Abb. 3.131):

1. Zum Kurzschlusszeitpunkt wirkt nur die sog. *subtransiente Reaktanz* X_d'', die durch die Wirkung der Dämpferwicklung bestimmt wird. Der Anfangskurzschlussstrom ergibt sich aus

$$I_k'' = \frac{U_N}{X_d''}$$

mit der Anfangszeitkonstanten $20 < \tau'' < 60\,\text{ms}$.

Je nach Kurzschlusszeitpunkt überlagert sich ein Gleichstromanteil, der maximal wird, wenn zum Kurzschlusszeitpunkt der mit dem Wicklungsstrang verkette Fluss am größten, d. h. die im Strang induzierte Spannung gleich Null ist (analog zum Einschaltstrom eines Transformators). Die Zeitkonstante des Gleichstromes bewegt sich in der Größenordnung $50 < \tau < 250\,\text{ms}$.

2. In der sich anschließenden Übergangsphase wirkt die *transiente Reaktanz* X'_d mit dem transienten Kurzschlussstrom

$$I'_k = \frac{U_N}{X'_d}\,,$$

der mit der Zeitkonstante $0.3 < \tau' < 1.5\,\text{s}$ abklingt. Der Wert von X'_d hängt von der Erregerwicklung ab.

3. Es stellt sich der stationäre Dauerkurzschluss gemäß Gleichung (2.52) ein.

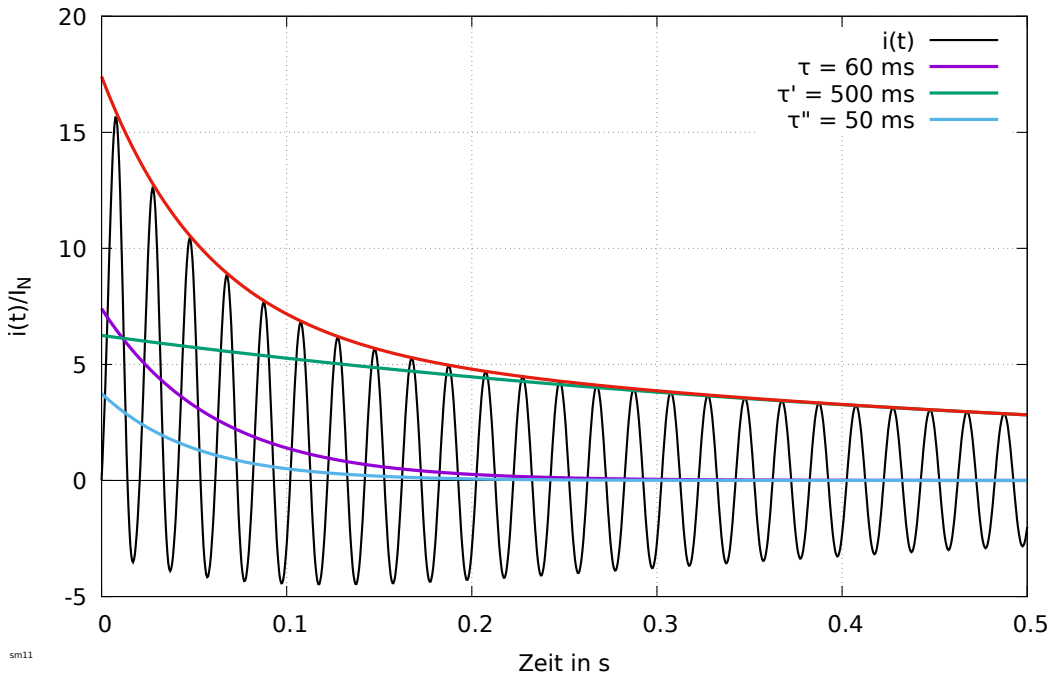


Abb. 3.131: Dreipoliger Stoßkurzschluss eines Synchrongenerators

Abbildung 3.131 zeigt den Verlauf des Kurzschlussstromes in einem Strang, wie er im ungünstigsten Fall auftritt. Man erkennt den subtransienten und transienten Zustand.

Nach DIN VDE 0530 Teil 1 »darf der Scheitelwert einer im Leerlauf auf Bemessungsspannung erregten und dann allpolig kurzgeschlossenen Synchronmaschine …das 15-fache des Scheitelwertes oder das 21-fache des Effektivwertes des Bemessungsstromes nicht überschreiten.« Unter Umständen muss dieser Kurzschluss im Prüffeld des Maschinenherstellers zur Demonstration der Haltbarkeit der Wicklung vorgeführt werden. Dazu bemerkt DIN VDE 0530 Teil 3: »Die Prüfung gilt als bestanden, wenn die Maschine anschließend ohne Reparatur oder nach nur geringfügiger Reparatur an der Ständerwicklung für betriebsbereit befunden wird und eine Spannungsprüfung …mit 80 % der Prüfspannung für die neue Maschine besteht.«

3.6.5 Schenkelpolmaschine

Vergleicht man den Läuferaufbau von Schenkelpol- und Vollpolmaschinen (z. B. Abbildungen 2.85 und 2.86 im Abschnitt Aufbau), erkennt man, dass der Luftspalt bei einem Vollpolläufer annähernd konstant ist. Bei der Schenkelpolmaschine ergeben sich jedoch wegen der ausgeprägten Pole Bereiche mit kleinem Luftspalt unter den Polen und großem Luftspalt in den Pollücken (Abb. 3.132).

Die Ständerdurchflutung $\underline{\Theta}_1$ sieht längs des Luftspaltes unterschiedliche magnetische Leitwerte. Der größte Leitwert tritt unter dem Pol, der kleinste in der Pollücke auf. Man zerlegt deshalb $\underline{\Theta}_1$ in zwei Anteile, je einen für den Pol in der *Längsachse* (Index „d“) $\underline{\Theta}_{1d}$ und für die Pollücke in der *Querachse* (Index „q“) $\underline{\Theta}_{1q}$. Ihnen kann man equivalente Stromkomponenten $\underline{I}_{1d}$ und $\underline{I}_{1q}$ zuordnen. Die Längsachse ist mit der Erregerachse $\underline{\Theta}_E, \underline{I}_E$ identisch. Den Stromkomponenten

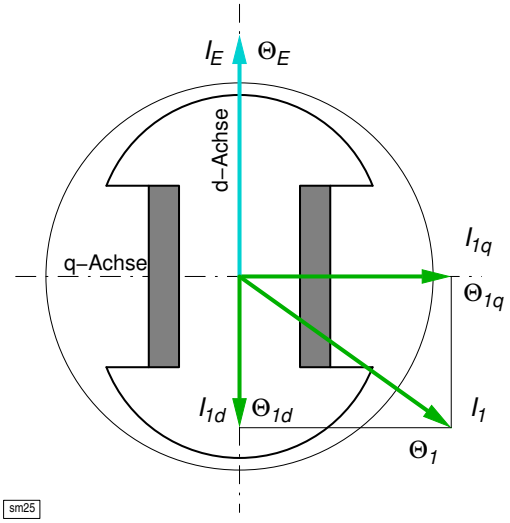


Abb. 3.132: Aufbau

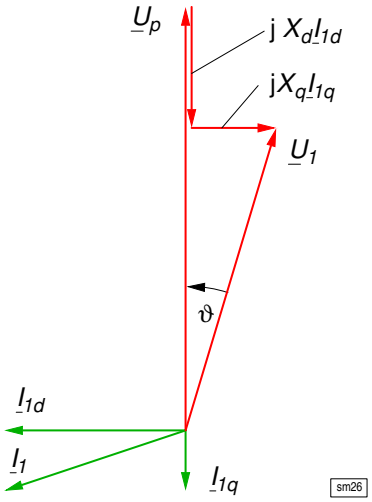


Abb. 3.133: Zeigerdiagramm

ordnet man zwei verschiedene Synchronreaktanzen zu: die synchrone *Längsreaktanz* X_d und die synchrone *Querreaktanz* X_q . Beide enthalten die Läuferstreureaktanz $X_{1\sigma}$.

Zur Bestimmung der beiden Reaktanzen treibt man eine Schenkelpolmaschine im unerregten Zustand mit fast synchroner Drehzahl an. Durch den Schlupf zwischen Ständerdrehfeld und Polrad verändert sich ständig die Lage beider Längsachsen zueinander. Haben sie die gleiche Richtung, nimmt der Ständerstrom ein Minimum an, aus dem man mit der Klemmenspannung die Längsreaktanz X_d ausrechnen kann. Stehen sie senkrecht aufeinander, fließt maximaler Ständerstrom, aus dem man die Querreaktanz X_q bestimmen kann (siehe auch DIN VDE 0530 Teil 4). Damit lässt sich das Zeigerdiagramm der Schenkelpolmaschine zeichnen (Abb. 3.133, hier mit $R_1 = 0$).

Berücksichtigt man Längs- und Querreaktanz in einer Synchronmaschine, kann man folgende Stromgleichung herleiten:

$$\underline{I}_1 = \mathrm{j}\,\frac{\underline{U}_p}{X_d} - \frac{\underline{U}_1}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin 2\vartheta - \mathrm{j}\,\frac{\underline{U}_1}{2}\left[\frac{1}{X_d} + \frac{1}{X_q} - \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\cos 2\vartheta\right]$$

mit deren Hilfe man die Stromortskurve der Schenkelpolmaschine konstruieren kann (Abb. 3.134).

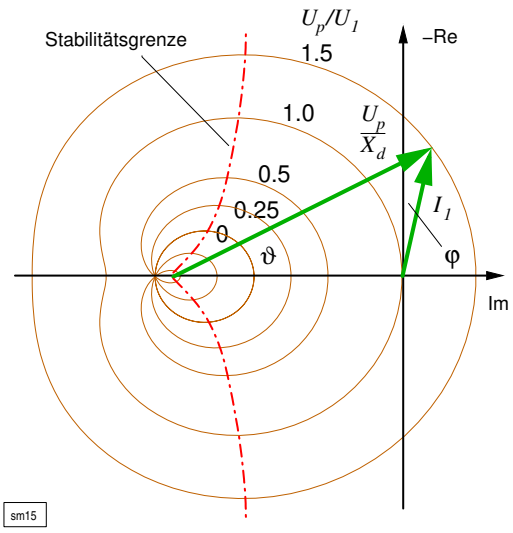


Abb. 3.134: Stromortskurve

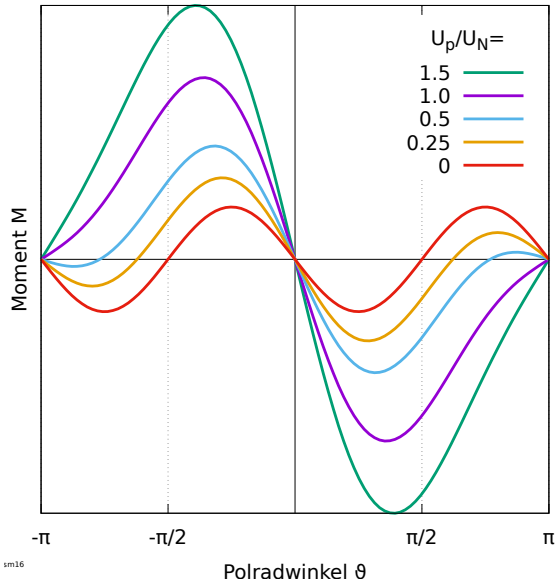


Abb. 3.135: Momentenverlauf

Für das Drehmoment ergibt sich die Gleichung

$$M = -\frac{3 \cdot U_1}{2\pi \cdot n_1} \left[\frac{U_p}{X_d} \cdot \sin\vartheta + \frac{U_1}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\vartheta \right]$$

Die Gleichung besteht aus zwei Anteilen: der erste Ausdruck entspricht dem der Vollpolmaschine, der zweite Term ist unabhängig von der Polradspannung und damit vom Erregerstrom. Das dazugehörende Moment bezeichnet man als *Reaktionsmoment*. Abb. 3.135 zeigt den Momentenverlauf in Abhängigkeit vom Polradwinkel mit U_p/U_N als Parameter. Bei voller Erregung ist der Drehmomentenverlauf identisch mit dem der Vollpolmaschine, das Kippmoment liegt bei $\vartheta = \pm 90\,^\circ_{\text{el}}$. Mit abnehmender Erregung macht sich das Reaktionsmoment bemerkbar, das Kippmoment sinkt, der Kippunkt bewegt sich zu kleineren Polradwinkeln hin. Für $U_p = 0$ wirkt nur noch das Reaktionsmoment. Kippmoment und -punkt richten sich nach den Werten von X_d und X_q.

Die Ursache des Reaktionsmomentes erkennt man im unerregten Fall: das Polrad besitzt keine eigene Magnetisierung, zwischen Ständer und Läufer befinden sich unterschiedliche magnetische Leitwerte. Das Ständerdrehfeld versucht, den Läufer immer so zu drehen, dass der magnetische Widerstand im magnetischen Kreis minimal wird, d. h. es versucht, den Luftspalt zu verkleinern.

Auf diesem Prinzip basiert auch die Funktionsweise der *Reluktanzmaschine*.

3.6.6 Normen und Vorschriften

- *Bemessungsdaten und Betriebsweise*: DIN VDE 0530 Teil 1 (Überlastung, Kurzschluß, Kurvenform von Spannungen, …)
- *Ermittlung der Verluste und des Wirkungsgrades:* DIN 57 530 Teil 2/VDE 0530 Teil 2, Hauptabschnitt Vier

- *Besondere Anforderungen an Dreiphasen-Turbogeneratoren:* VDE 0530 Teil 3
- *Verfahren zur Ermittlung von Kenngrößen von Synchronmaschinen durch Messungen:* DIN VDE 0530 Teil 4

4 EM-Labor

4.1 Bewertung elektrischer Maschinen

4.1.1 Fremderregte Gleichstrommaschine

Erfassen der Bemessungsdaten

Das Typenschild enthält die Daten der Maschine für den Bemessungsbetrieb (Nenndaten). Diese beziehen sich im allg. auf eine Betriebstemperatur, die sich vorwiegend nach der verwendeten Isolierstoffklasse richtet. Zu den wichtigsten Bemessungsgrößen zählen: Ankerspannung U_{AN}, Ankerstrom I_{AN}, Erregerstrom I_{EN} und Drehzahl n_N. Unter Umständen enthält das Typenschild Daten für unterschiedliche Betriebspunkte (z. B. Feldschwächbetrieb). Auf keinen Fall überschritten werden dürfen die max. Drehzahl (Zerstörung des Läufers) und Ankerspannung (Zerstörung des Kommutators durch Rundfeuer[1]). Maschinen mit einem großen Drehzahlstellbereich sind immer mit Fremdlüftung versehen. Fehlt diese (z.B. nur Eigenlüftung, Durchzugsbelüftung) kann man bei geringen Drehzahlen die Maschine kurzzeitig überlasten, wenn man die thermische Erwärmung und Trägheit der Maschine berücksichtigt.

Aus den Typenschildangaben lassen sich das Nenndrehmoment und der Nennwirkungsgrad der Maschine errechnen.

Die Maschine wird im allg. im kalten Zustand untersucht (typisch für einen Praktikumsbetrieb). Als Umgebungstemperatur nimmt man dafür etwa 25 °C an. Anker- und Erregerwiderstand rechnet man mit Hilfe der Formel (2.15) auf die Betriebstemperatur von 75 °C um.

Nenndaten einer Labormaschine: $n_N = 1450\,\mathrm{min}^{-1}; I_{AN} = 35\,\mathrm{A}; U_{AN} = 110\,\mathrm{V}; I_{EN} = 1.28\,\mathrm{A}$

Erregerwiderstand

Gemessen werden Strom und Spannung an der Erregerwicklung. Da der Erregerwiderstand linear ist, genügt ein Messpunkt, z. B. bei Nennspannung. Die Messdauer sollte möglichst kurz sein (max 5 s), da sonst die einsetzende Erwärmung das Ergebnis verfälscht. Zum Messen eignen sich besonders digitale Messgeräte.

gemessen: $U_E = 90.4\,\mathrm{V}; I_E = 1.18\,\mathrm{A}; \vartheta_k = 25\,^\circ\mathrm{C}$

$$R_{Ek} = \frac{U_E}{I_E} = 76.61\,\Omega; \qquad R_{Ew} = \frac{235 + \vartheta_w}{235 + \vartheta_k}\, R_{Ek} = 91.34\,\Omega \quad \text{bei} \quad \vartheta_w = 75\,^\circ\mathrm{C}$$

[1] durch Überschreitung der max. Stegspannung

Ankerwiderstand und Bürstenübergangsspannung

Der Ankerwiderstand ist wegen des Bürstenüberganges nichtlinear. Gemessen werden Ankerspannung als Funktion des Ankerstromes an der stillstehenden Maschine (Erregung ausgeschaltet). Damit man die Bürstenübergangsspannung und den Ankerwiderstand nach Abbildung 4.1

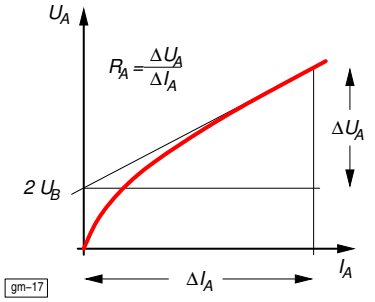


Abb. 4.1: Bestimmung von R_A und U_B

grafisch bestimmen kann, muss die Ankerspannung solange gesteigert werden, bis Strom und Spannung linear verlaufen. Die Messreihe muss man zügig durchführen, um Fehler durch Erwärmung zu vermeiden. Digitale Messgeräte erleichtern eine schnelle Messung[2]. Zeichnet man $U_A = f(I_A)$, lassen sich daraus grafisch R_A und $2\,U_B$ bestimmen (siehe Abbildung 4.2).

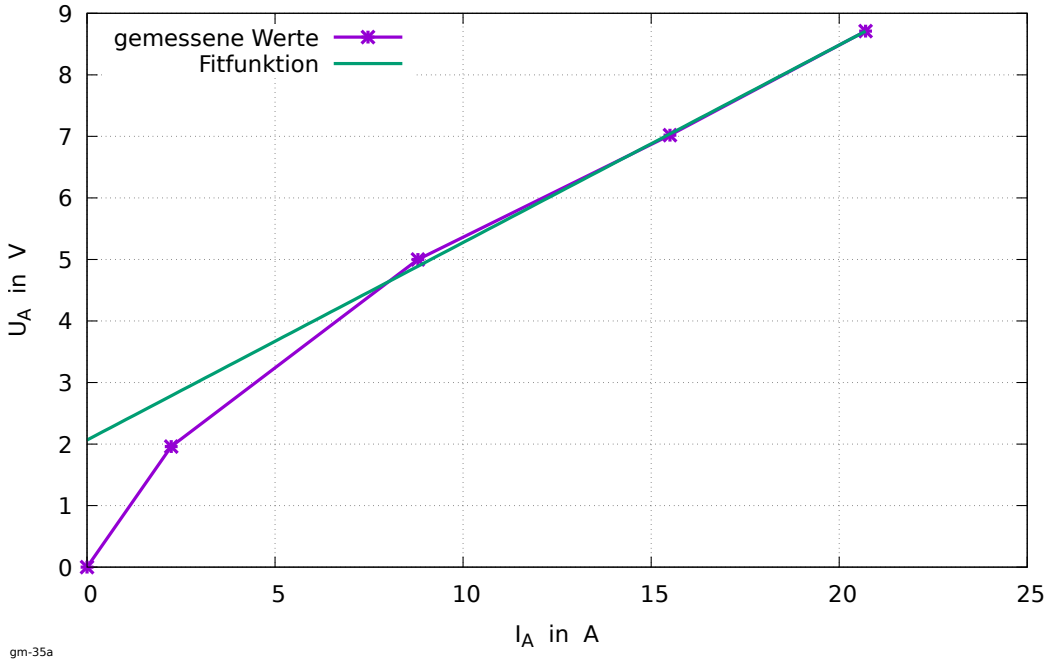


Abb. 4.2: Grafische Ermittlung von R_A und $2\,U_B$

☞ **Hinweis:** Zur numerischen Auswertung der Messung bietet sich als analytische Funktion die Geradengleichung $y = mx + c$ an. Es darf keine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte gelegt

[2]Da sich die Maschine nicht dreht, kann es bei zu hohen Stromstärken/-dichten zu unzulässigen, lokalen Erwärmungen an den Kollektorlamellen kommen. Das Kupfer verliert dabei seine Festigkeit, was zu einer Beeinträchtigung der Rundlaufeigenschaften führen kann.

werden sondern die Gerade muss tangential an dem linearen Teil der Messkurve anliegen. Die Steigung m entspricht dann dem Ankerwiderstand R_A, die Konstante c der Bürstenübergangsspannung $2\,U_B$.

Koeffizienten der Fitfunktion[3]: $m = 0.320937; c = 2.06557$

Bei der Berechnung einer Fitfunktion ist es bei dieser Kennlinie wichtig, dass man den Einfluss der unteren Messpunkte geringer wichtet als die Messwerte bei großen Strömen, da letztere die Steigung der Widerstandsgeraden bestimmen.

$2\,U_B = 2.07\,\mathrm{V};$ $R_{Ak} = 0.32\,\Omega;$ $R_{Aw} = 0.38\,\Omega$

Leerlaufversuch

Der Versuch dient dazu, die lastunabhängigen Eisen- und Reibungsverluste zu bestimmen. Diese Verluste hängen nur von der Drehzahl und dem Erregerstrom ab. An der Maschine werden bei verschiedenen Erregerströmen Ankerspannung U_{A0} und -strom I_{A0} in Abhängigkeit von der Drehzahl n gemessen.

☞ **Hinweis:** Sollen die Verluste auch bei anderen Erregerströmen ermittelt werden (beispielsweise für den Feldschwächbetrieb), muss der Versuch mit diesen Erregerströme wiederholt werden.

Die Eisen- und Reibungsverluste lassen sich gemäß Formel (2.21) bestimmen. Da der Versuch bei »kalter« Maschine durchgeführt wird, muss man für R_A den kalten Widerstand einsetzen. Abbildung 4.3 zeigt den Verlauf von $P_{\mathrm{F+R}}$ in Abhängigkeit von der Drehzahl mit I_E als Parameter.

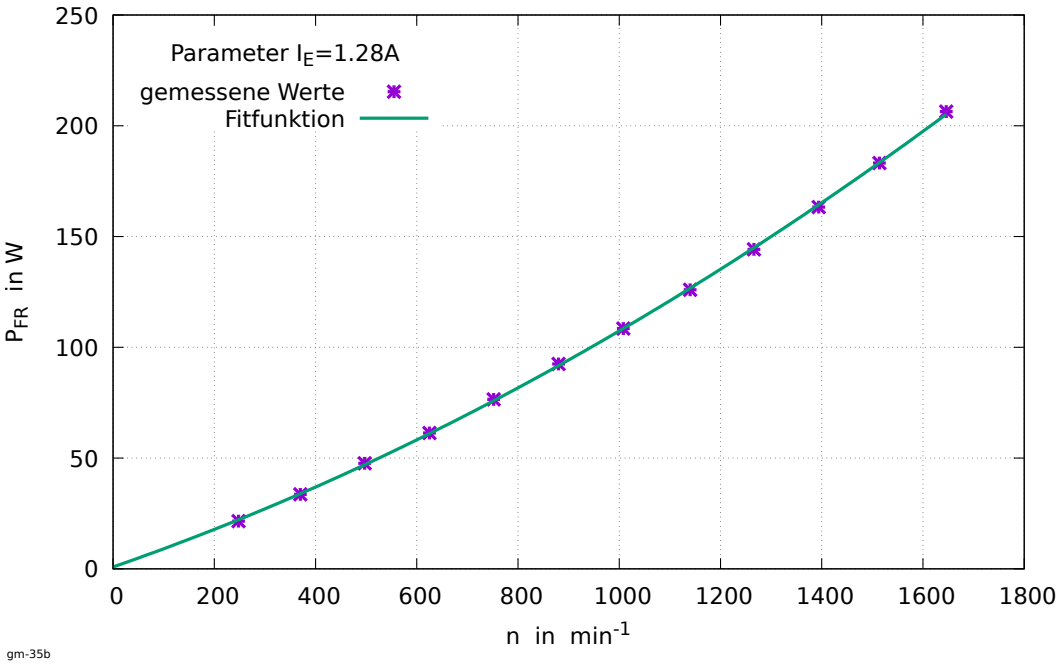


Abb. 4.3: Eisen- und Reibungsverluste $P_{\mathrm{F+R}}$ als Funktion der Drehzahl

[3] mit GNUPLOT berechnet

☛ **Hinweis:** Zur automatischen Auswertung der Messdaten ist es hilfreich, wenn $P_{\mathrm{F+R}}$ als geschlossene Funktion vorliegt. Da die Eisen- und Reibungsverluste sowohl linear als auch quadratisch von der Drehzahl abhängen, bietet sich als Fitfunktion $y = ax^2 + bx + c$ an. Diese Funktion ist ebenfalls in Abbildung 4.3 dargestellt (siehe Auswerten externer Daten, Fitfunktion im Anhang).

Koeffizienten der Fitfunktion:

$a = 2.72858 \cdot 10^{-5}; b = 0.0792465; c = 0.851305$ für $I_{EN} = 1.28\,\mathrm{A}$

Sollen die Eisen- und Reibungsverluste getrennt werden, muss für jede gewünschte Drehzahl eine Messreihe durchgeführt werden, bei der man die Erregung verändert und die Drehzahl durch Verändern der Ankerspannung konstant hält.

Wirkungsgrad anhand der Einzelverluste

Mit den bis hierhin gewonnenen Ergebnissen lässt sich *ohne Lastversuch* rein rechnerisch der Gesamtwirkungsgrad der Maschine in Abhängigkeit von der Belastung berechnen, und zwar bei dem Erregerstrom, zu dem auch die Eisen- und Reibungsveluste vorliegen (siehe Abschnitt 4.1.1).

Gibt man eine belastungsunabhängige, konstante Drehzahl vor, z. B. die Nenndrehzahl n_N, lässt sich für jeden Ankerstrom I_A das abgegebene Wellenmoment ausrechnen:

$$P_m(I_A) = P_A - P_{\mathrm{Cu}} - P_B - P_{\mathrm{F+R}} = U_A\, I_A - I_A^2\, R_{\mathrm{Aw}} - 2\, U_B\, I_A - P_{\mathrm{F+R}}(n_N, I_E)\ .$$

Die Eisenverluste $P_{\mathrm{F+R}}$ zum Erregerstrom I_E liest man aus dem Diagramm 4.3 bei der gewünschten Drehzahl ab. Der dazugehörige Wirkungsgrad ergibt sich aus:

$$\eta(I_A) = \frac{P_m(I_A)}{P_A + P_E} = \frac{P_m(I_A)}{U_A\ I_A + I_E^2\, R_{\mathrm{Ew}}}\ .$$

Trägt man den Wirkungsgrad über das Wellenmoment mit dem Ankerstrom als Parameter auf erhält man das Diagramm in Abbildung 4.4.

Stellt man Wirkungsgrad und Wellenmoment in Abhängigkeit vom Ankerstrom dar, erhält man für $I_A < I_{A0}$ für beide Größen negative Werte. Das stimmt insofern, da für $I_A < I_{A0}$ die Maschine die Drehzahl nicht halten kann und angetrieben werden müsste.

Wird die Maschine – wie bisher immer angenommen – mit konstanter Ankerspannung betrieben, ändert sich mit der Belastung die Drehzahl, wenn auch im geringen Maße. Dadurch ändern sich auch die Eisen- und Reibungsverluste. Die Drehzahl ergibt sich nach Gleichung 2.22 aus:

$$n = \frac{U_A - I_A\, R_{\mathrm{Aw}} - 2\, U_B}{C_1\, \Phi}\ .$$

Die Konstante $C_1\, \Phi$ kann man entweder aus den Nenndaten der Maschine oder einem Messpunkt der Leerlaufmessung unter Zuhilfenahme der gemessenen Werte von R_A und $2\, U_B$ berechnen. Sie ergibt sich zu:

$$C_1\, \Phi = \frac{U_A - I_A\, R_A - 2\, U_B}{n}\ .$$

Verwendet man die Leerlaufdaten, muss man in dieser Gleichung U_{A0}, I_{A0}, n_0 und R_{Ak} einsetzen, andernfalls U_{AN}, I_{AN}, n_N und R_{Aw}.

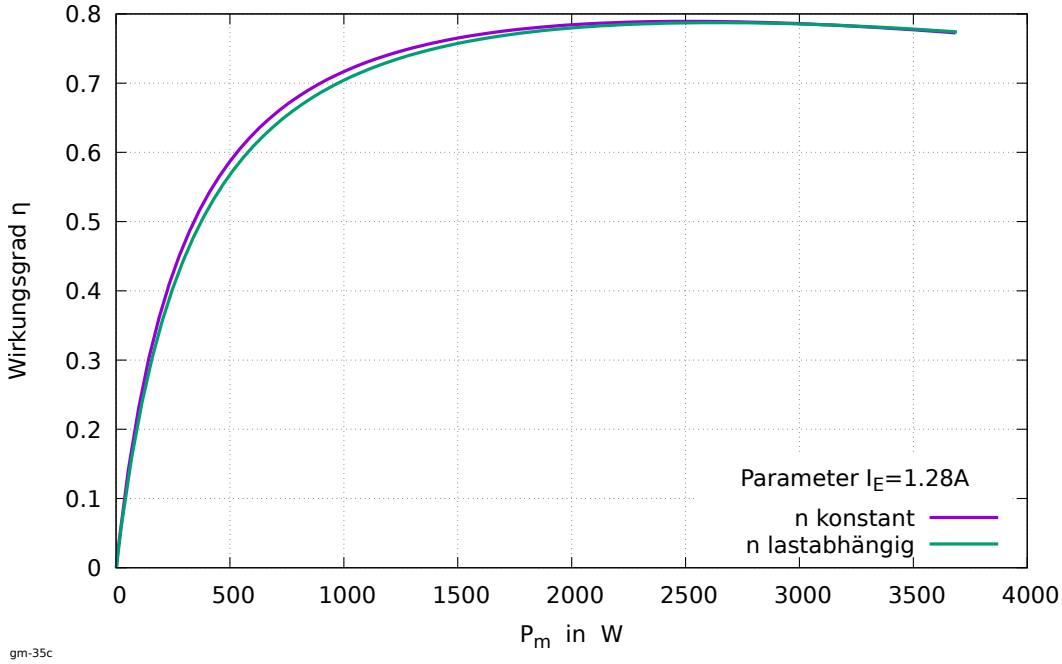


Abb. 4.4: Wirkungsgrad als Funktion des Wellenmomentes

Diese Korrektur hat jedoch nur einen geringen Einfluss auf den Wirkungsgrad, wie man dem Diagramm in Abbildung 4.4 entnehmen kann.

In allen Gleichungen wurde die Bürstenübergangsspannung mit $2\,U_B$ eingesetzt, unabhängig von der Höhe des Ankerstromes. Schaut man sich das Diagramm in Abbildung 4.2 an, erkennt man, dass dieser Spannungsabfall auch stromabhängig ist.

Der optimale Wirkungsgrad stellt sich ein, wenn die lastabhängigen Verluste gleich den lastunabhängigen Verlusten sind. Für eine fremderregte Maschine bedeutet das

$$P_B + P_{\mathrm{Cu}} = P_{\mathrm{F+R}} + P_{\mathrm{EN}} \ .$$

Lastversuch

Beim *Lastversuch* wird durch ein variables Lastmoment P_m, das vorteilhaft durch einen fremderregten Gleichstromgenerator aufgebracht wird, die Lastkennlinie entsprechend Gleichung (2.19) aufgenommen. Die Eisen- und Reibungsverluste treten dabei in gleicher Höhe wie im Leerlaufversuch *bei gleicher Drehzahl und Erregung* auf.

Indirekte Wirkungsgradbestimmung

Bei einer Haupt-/Reihenschlussmaschine ist z. B. ein Leerlaufversuch nicht möglich. Das Erregerfeld ist lastabhängig. In diesem Fall bestimmt man die Verluste der Belastungsmaschine und daraus das Wellenmoment P_m, das für beide Maschinen gleich ist (indirektes Verfahren, siehe Abschnitt Bestimmung des Wirkungsgrades).

4.1.2 Transformator

Zur Beurteilung eines Transformators gehören im allg. ein Leerlauf- und ein Kurzschlussversuch. Diese Versuche liefern Informationen, mit denen man die Elemente des Ersatzschaltbildes (ESB) und daraus die Spannungsänderung und den Wirkungsgrad für unterschiedliche Belastungen berechnen kann. In der Praxis wird man noch einen Erwärmungsversuch durchführen, je nach Einsatz schließen sich noch Prüfungen der elektrischen Festigkeit (Stoßspannungen, Stoßkurzschlüsse) an. Bei Drehstromtransformatoren kontrolliert man zuätzlich noch die richtige Verschaltung der Wicklungen (Schaltgruppe).

Die Vorgehensweise bei den Leerlauf- und Kurzschlussversuchen sowie die rechnerische Auswertungen sind ausführlich im Abschnitt Bestimmung der ESB-Parameter beschrieben. Grundsätzlich können beide Versuche von der Oberspannungsseite (OS) oder Unterspannungsseite (US) ausgeführt werden. Bei der Wahl spielen praktische und sicherheitsrelevante Gründe eine Rolle. Beim Leerlaufversuch richtet man sich nach den verfügbaren Spannungsquellen, bei Hochspannungstransformatoren speist man meistens mit verminderter Spannung von der OS ein und stellt damit sicher, dass keine höheren Spannungen am Transformator auftreten können. Der Kurzschlussversuch wird wegen der kleineren Ströme von der OS gemacht.

Die bei den Versuchen umgesetzte Wirkleistung ist unabhängig von der Seite der Einspeisung. Das gilt auch für die formelmäßige Berechnung der Wicklungsparameter ($R_1, R_2, X_{1\sigma}, X_{2\sigma}$), da sie reale Größen darstellen. Ganz anders sieht es bei der Hauptinduktivität L_h und dem Ersatzwiderstand für die Eisenverluste R_{Fe} aus. Der Eisenersatzwiderstand existiert nicht[4]. Er wurde eingeführt, um die Eisenverluste zu berücksichtigen. Die Hauptinduktivität repräsentiert den notwendigen Fluss zum Betrieb des Transformators. Wenn Fluss und Eisenverluste unabhängig von der Einspeisungsseite konstant sein sollen, müssen L_h und R_{Fe} je nach anliegender Spannung unterschiedliche Zahlenwerte aufweisen. Die Eisenverluste sind außerdem von der Frequenz und der Nenninduktion abhängig.

Betreibt man den Transformator bei konstanter Frequenz, ist der Fluss linear abhängig von der Primärspannung (*variabler Fluss*). Erhöht man mit steigender Primärspannung auch linear die Frequenz bleibt der *Fluss konstant*. Das erlaubt es, den Transformator auch mit höherer Spannung zu betreiben, zum Beispiel zur Prüfung der Spannungsfestigkeit der Isolation und zur Windungsprüfung. Dazu eignet sich u. a. ein Frequenzumformersatz, der aus einem drehzahlgeregelten Antriebsmotor mit einem gekuppelten Schleifringläufer besteht und im Gegenlauf betrieben wird (siehe Frequenzumformer im Kapitel 2.5.3). Durch die höhere Frequenz reduziert sich der Magnetisierungsstrom, die Eisenverluste nehmen aber zu.

Vor Versuchsbeginn ermittelt man vom Leistungsschild die Nennspannungen und -ströme und wählt danach die erforderlichen Netzgeräte aus.

Der Wirkungsgrad des Transformators hängt von der übertragenen Wirkleistung und dem *Lastfaktor* I/I_N ab und errechnet sich entsprechend der Formel (2.32) aus

$$\eta(x, \cos\varphi_2) = \frac{S_N \cdot x \cdot \cos\varphi_2}{S_N \cdot x \cdot \cos\varphi_2 + x^2 \cdot P_{\mathrm{CuN}} + P_{\mathrm{FeN}}} \quad \text{mit dem Lastfaktor} \quad x = \frac{I_2}{I_{2\mathrm{N}}} = \frac{I_1}{I_{1\mathrm{N}}} \,.$$

Er erreicht sein Maximum bei dem Lastfaktor, bei dem die lastabhängigen Kupferverluste gleich den lastunabhängigen Eisenverlusten sind. Die Nennkupferverluste P_{CuN} entsprechenden den Kupferverlusten bei Nennstrom (Kurzschlussversuch), die Nenneisenverluste P_{FeN} sind in erster Linie gleich den Leerlaufverlusten bei Nennspannung (Leerlaufversuch).

[4] Man kann ihn nicht mit einem Ohmmeter messen.

Die Spannungsänderung richtet sich ebenfalls nach dem sekundären Leistungsfaktor und dem Lastfaktor. Sie lässt sich aus dem Zeigerdiagramm herleiten. Die vereinfachte Berechnung findet man im Abschnitt Spannungsänderung bei Belastung.

Die Beurteilung eines Drehstromtransformators erfolgt in gleicher Weise wie bei einem Einphasentransformator. Das Ersatzschaltbild betrachtet nur eine Phase. Alle gemessenen Leistungen gehen nur zu einem Drittel bei der Berechnung der ESB-Parameter ein. Lediglich bei der Zuordnung der einphasigen Spannungen und Ströme muss die Schaltungsart berücksichtigt werden (siehe dazu auch Abschnitt Ersatzschaltung).

Messungen und Auswertungen an einem Einphasentransformator

Berechnungsgang siehe Kapitel Bestimmung der ESB-Parameter

Typenschild: 4 kVA; 220/110 V

$$I_{1N} = 18.18\,\mathrm{A} \qquad I_{2N} = 36.36\,\mathrm{A}$$

Leerlaufversuch: $U_{10} = 220\,\mathrm{V}$; $I_{10} = 1.84\,\mathrm{A}$; $P_{\mathrm{FeN}} = 40\,\mathrm{W}$; $U_{20} = 112.5\,\mathrm{V}$

$$\ddot{u} = 1.955\ldots \qquad i_0 = 0.1012 \qquad \cos\varphi_0 = 0.0988\ldots \qquad \sin\varphi_0 = 0.9951\ldots$$
$$I_{\mathrm{Fe}} = 0.1818\ldots\ \mathrm{A} \qquad I_{\mu} = 1.8309\ldots\ \mathrm{A} \qquad R_{\mathrm{Fe}} = 1210\,\Omega \qquad X_{\mu} = 120.15\ldots\ \Omega$$

Kurzschlussversuch: $U_{1k} = 10.2\,\mathrm{V}$; $I_{1k} = 18\,\mathrm{A}$; $P_{1k} = 120\,\mathrm{W}$

$$\cos\varphi_k = 0.6535\ldots \qquad \sin\varphi_k = 0.7568\ldots$$
$$Z_k = 0.5666\ldots\ \Omega \qquad R_k = 0.3703\ldots\ \Omega \qquad X_k = 0.4288\ldots\ \Omega$$
$$R_1 = 0.1851\ldots\ \Omega \qquad R_2 = 0.0484\ldots\ \Omega \qquad X_1 = 0.2144\ldots\ \Omega \qquad X_2 = 0.0560\ldots\ \Omega$$
$$u_k = 0.0468\ldots \qquad u_r = 0.0306\ldots \qquad u_x = 0.0354\ldots$$
$$P_{\mathrm{CuN}} = 122.43\ldots\ \mathrm{W} \qquad \eta_{\max} = 0.5715\ldots$$

Abb. 4.5 zeigt den Wirkungsgrad in Abhängigkeit vom Lastfaktor I/I_N.

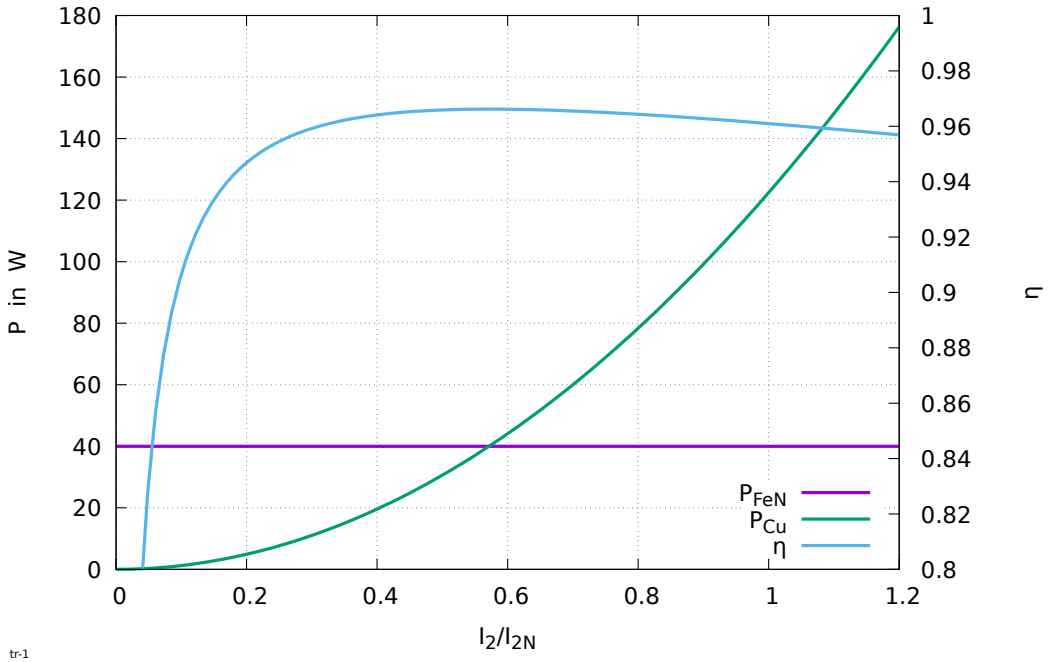


Abb. 4.5: Wirkungsgrad als Funktion des Lastfaktors I/I_N

4.1.3 Asynchronmaschine

Referenz: [24]

Mit Hilfe des Ersatzschaltbildes (ESB) kann man das Betriebsverhalten der Maschine einigermaßen genau berechnen. Die dazu notwendigen ESB-Parameter bestimmt man mit einer Widerstandsmessung sowie aus Leerlauf- und Kurzschlussversuchen.

Um die Berechnungen vorerst einfach zu halten, wird das ESB nach Abbildung 4.6 verwendet. Eisen- und Reibungsverluste werden durch einen gemeinsamen Ersatzwiderstand $R_{\mathrm{F+R}}$ erfasst.

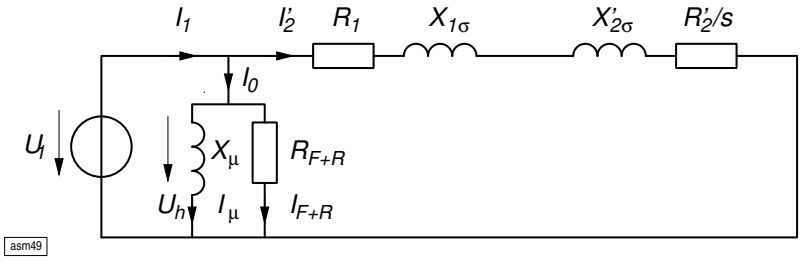


Abb. 4.6: Vereinfachtes Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine

Dieser Widerstand liegt mit der Hauptreaktanz X_μ parallel zu den Eingangsklemmen.

Vor den Versuchen sind natürlich die Angaben des Leistungsschildes aufzunehmen und die Versuchsschaltungen entsprechend zu dimensionieren.

Die folgenden Auswertungen beziehen sich auf eine Maschine mit den Bemessungsdaten:

$$\mathrm{Y}\ 380\,\mathrm{V};\quad 12.6\,\mathrm{A};\quad 6\,\mathrm{kW};\quad 1390\,\mathrm{min}^{-1};\quad \cos\varphi_N = 0.87;\qquad 50\,\mathrm{Hz}$$

Mit diesen Daten lassen sich sofort folgende Werte berechnen:

$$s_N = \frac{1500 - 1390}{1500} = 7.33..\,\%$$
$$M_N = \frac{6\,\mathrm{kW} \cdot 60\,\mathrm{s}}{2\pi \cdot 1390} = 41.22\,\mathrm{Nm}$$
$$\eta_N = \frac{6\,\mathrm{kW}}{\sqrt{3} \cdot 380\,\mathrm{V} \cdot 12.6\,\mathrm{A} \cdot 0.87} = 83.16..\,\%$$

Widerstandsmessung

Die Wicklungswiderstände erhält man durch eine Gleichstrommessung. Zur Erhöhung der Messgenauigkeit sollte man möglichst alle drei Phasen in Reihe schalten. Gleichzeitig mittelt man mit dieser Maßnahme eventuelle Widerstandsabweichungen.

Ist der Sternpunkt nicht zugänglich oder die Maschine in Dreieck geschaltet, misst man den Widerstand R_{LL} zwischen zwei Außenleitern und rechnet daraus den Phasenwiderstand R_1 aus. Es gilt:

$$R_{\mathrm{LL}} = 2\ R_1 \quad \text{bei Y-Schaltung,} \qquad R_{\mathrm{LL}} = \frac{2}{3}\ R_1 \quad \text{bei D-Schaltung.}$$

Es lässt sich zeigen, dass die Kupferverluste einer Maschine unabhängig von der internen Schaltung immer $1.5\,I^2\,R_{\mathrm{LL}}$ betragen. Natürlich muss der kalte Wicklungswiderstand auf Betriebstemperatur umgerechnet werden.

Für die untersuchte Maschine ergibt sich ein Phasenwiderstand von $R_1 = 0.853\,\Omega$ bei Betriebstemperatur.

Leerlaufmessung

Beim Leerlaufversuch werden folgende dreiphasigen Größen gemessen: U_0, I_0, P_0, n_0.

Entsprechend der Schaltungsart bestimmt man zuerst die einphasigen Größen U_{10}, I_{10} und P_{10} und anschließend gemäß der Schaltung in Abbildung 4.6:

$$R_{\mathrm{F+R}} = \frac{(U_{10})^2}{P_{10}}$$
$$I_{\mathrm{F+R}} = \frac{U_{10}}{R_{\mathrm{F+R}}}$$
$$I_\mu = \sqrt{I_{10}^2 - I_{\mathrm{F+R}}^2}$$
$$X_\mu = \frac{U_{10}}{I_\mu}$$

An der Versuchsmaschine wurden gemessen:

$$U_0 = 380\,\mathrm{V}; \quad I_0 = 3.9\,\mathrm{A}; \quad P_0 = 270\,\mathrm{W}; \quad n_0 = 1498\,\mathrm{min}^{-1}.$$

Daraus ergeben sich:

$$R_{\mathrm{F+R}} = 534.81\,\Omega \quad X_\mu = 56.57\,\Omega\,.$$

☛ Bei dieser Auswertung enthält der Ersatzwiderstand $R_{\mathrm{F+R}}$ neben den Eisen- und Reibungsverlusten auch die Kupferverluste des Ständers.

Kurzschlussmessung

Analog zum Transformator speist man die festgebremste Asynchronmaschine mit einer Spannung, die so eingestellt wird, dass möglichst der Nennstrom fließt. Gemessen werden dreiphasig U_k, I_k und P_k, daraus ergeben sich einphasig $U_{1\mathrm{k}}, I_{1\mathrm{k}}$ und $P_{1\mathrm{k}}$ und weiter

$$R = \frac{P_{1\mathrm{k}}}{I_{1\mathrm{k}}^2}$$
$$\frac{R_2'}{1} = R - R_1$$
$$Z = \frac{U_{1\mathrm{k}}}{I_{1\mathrm{k}}}$$
$$X = \sqrt{Z^2 - R^2}$$
$$X_{2\sigma}' = X_{1\sigma} = \frac{X}{2}$$
$$I_{1\mathrm{Anl}} = I_{1\mathrm{k}}\,\frac{U_{1\mathrm{N}}}{U_{1\mathrm{k}}} \qquad \text{(einphasiger Anlaufstrom)}$$

$$P_{1kN} = P_{1k} \left(\frac{U_{1N}}{U_{1k}}\right)^2 \qquad \text{(einphasige Kurzschlussleistung)}$$

$$P_{1Cu1Anl} = R_1 \; I_{1Anl}^2 \qquad \text{(einphasige Kupferverluste in der Ständerwicklung)}$$

$$M_{Anl} = 3 \; \frac{P_{1kN} - P_{1Cu1Anl}}{2 \; \pi \; n_1} \qquad \text{(dreiphasiges Anlaufmoment)} \; .$$

☛ Bei dieser Berechnung werden die Eisenverluste P_{Fe} vernachlässigt.

Mit $n_1 = 1500\,\text{min}^{-1}$ sowie den Messwerten

$$I_k = 12.6\,\text{A}; \quad U_k = 130\,\text{V}; \quad P_k = 1180\,\text{W}$$

erhält man für die Versuchsmaschine:

$$\begin{array}{lll} R = 2.477\,\Omega & R'_2 = 1.624\,\Omega & Z = 5.957\,\Omega \\ X = 5.417\,\Omega & X'_{2\sigma} = X_{1\sigma} = 2.709\,\Omega & I_{1Anl} = 36.93\,\text{A} \\ P_{1kN} = 3.3794\,\text{kW} & P_{1Cu1Anl} = 1.16334\,\text{kW} & M_{Anl} = 42.32\,\text{Nm} \; . \end{array}$$

Genauere Berechnung der Querimpedanz

Abbildung 4.7 zeigt ein ESB, bei dem der Spannungsabfall in der Ständerwicklung berücksichtigt wird. Dadurch entfällt eine etwas kleinere Spannung U_h auf die Querimpedanz. Mit Hilfe der

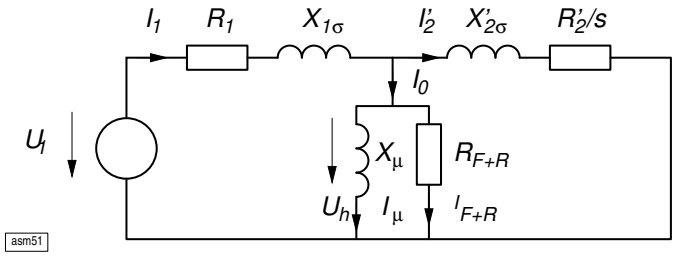


Abb. 4.7: Ersatzschaltbild, welches den Spannungsabfall der Ständerwicklung berücksichtigt

komplexen Rechnung ergibt sich:

$$\cos\varphi_0 = \frac{P_{10}}{U_{10} \; I_{10}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\varphi_0$$

$$\underline{I}_{10} = I_{10} \; (\cos\varphi_0 - \text{j} \; \sin\varphi_0)$$

$$\underline{U}_{1h} = \underline{U}_{10} - \underline{I}_{10} \; (R_1 + \text{j} \, X_{1\sigma}) \qquad \text{mit} \quad \underline{U}_{10} = U_{10} + \text{j}\,0\,\text{V}$$

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{U}_{1h}}{\underline{I}_{10}}$$

$$\underline{Y}_{10} = \frac{1}{\underline{Z}_{10}} = \frac{1}{R_{F+R}} + \frac{1}{\text{j} \, X_\mu} = \frac{1}{R_{F+R}} - \text{j} \, \frac{1}{X_\mu}$$

$$R_{F+R} = \frac{1}{\Re\{\underline{Y}_{10}\}}$$

$$X_\mu = -\frac{1}{\Im\{\underline{Y}_{10}\}} \; .$$

Da die Leerlaufspannung $\underline{U}_{10}$ willkürlich in die reelle Achse gelegt wurde und $\underline{I}_{10}$ nacheilend ist, muss der Imaginärteil von $\underline{I}_{10}$ mit einem Minuszeichen versehen werden.

Angewandt auf die Versuchsmaschine ergeben sich für die Querimpedanz folgende Werte:

$$R_{\mathrm{F+R}} = 564.66\,\Omega; \quad X_{\mu} = 53.72\,\Omega\ .$$

Die Abweichungen zum Leerlaufversuch in Abschnitt 4.1.3 sind gering.

Trennung der Eisen- und Reibungsverluste

Strenggenommen hängen die Reibungsverluste nur von der Drehzahl, die Eisenverluste von der Drehzahl und der Luftspaltinduktion und damit von U_h ab. Durch einen Leerlaufversuch mit konstanter Drehzahl und veränderlichem U_h lassen sich die beiden Verlustarten grafisch trennen. Dazu wird die Maschine an Netzspannung gelegt und die Netzspannung solange verringert, bis die Drehzahl merklich abfällt, d. h. der Versuch wird nahezu bei konstanter Drehzahl durchgeführt. Misst man die aufgenommene Leerlaufleistung in Abhängigkeit von der Netzspannung

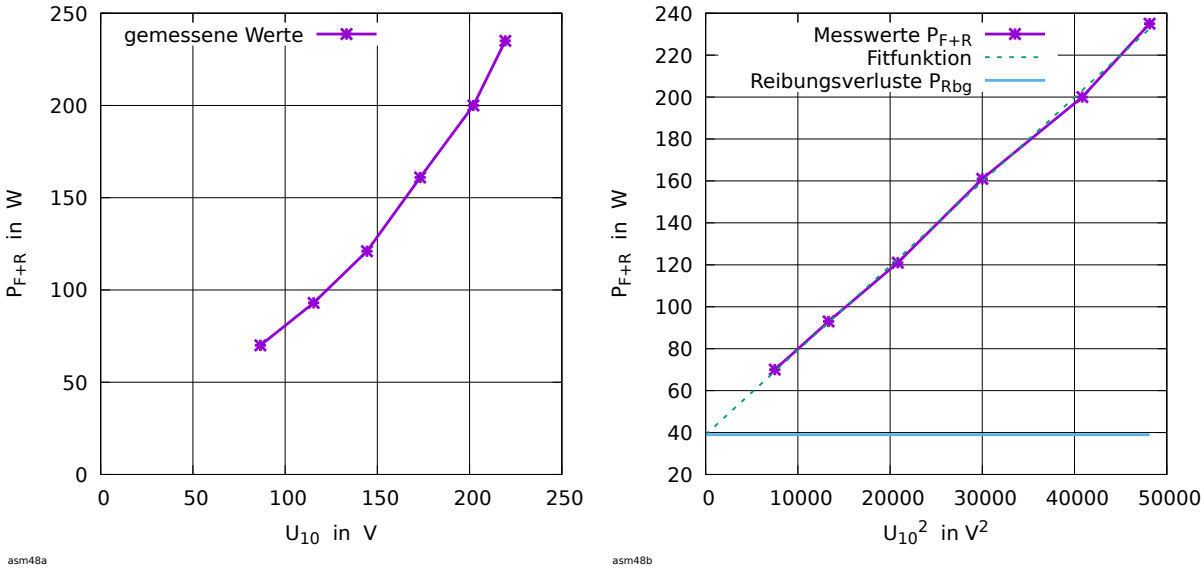


Abb. 4.8: Messung und Auswertung zur Trennen der Eisen- und Reibungsverluste

und zieht die Kupferverluste ab, erhält man

$$P_{\mathrm{F+R}} = P_{\mathrm{Fe}} + P_{\mathrm{Rbg}} = P_0 - P_{\mathrm{Cu0}} = f(U_1) = f(U_h)\ .$$

Das Verfahren zum Trennen der beiden Verluste ist im Kapitel Leerlaufversuch beschrieben. Abbildung 4.8 zeigt die Ergebnisse einer Auswertung.

Durch die Trennung der beiden Verlustarten ergibt sich das geänderte Ersatzschaltbild nach Abbildung 4.9. Statt $R_{\mathrm{F+R}}$ gibt es R_{Fe}, die konstanten Reibungsverluste P_{Rbg} lassen sich nicht in das ESB integrieren, sie müssen bei der Berechnung der Wellenleistung berücksichtigt werden. Man beachte, dass die so ermittelten Reibungsverluste P_{Rbg} strenggenommen nur für die Leerlaufdrehzahl n_0 gelten. Unter der Annahme, dass U_h sich nicht ändert, ergeben sich:

$$R_{\mathrm{Fe}} = \frac{P_{\mathrm{F+R}}}{P_{\mathrm{Fe}}}\ R_{\mathrm{F+R}} \qquad \text{und} \qquad M_{\mathrm{Rbg}} = \frac{P_{\mathrm{Rbg}}}{2\,\pi\ n}\ .$$

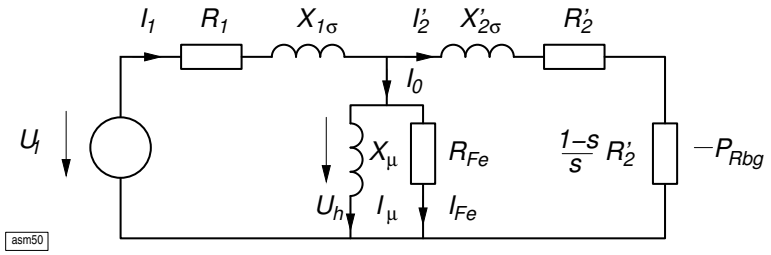


Abb. 4.9: Ersatzschaltbild mit getrennten Eisen- und Reibungsverlusten

Belastungsversuch

Der Belastungsversuch liefert die Belastungskennlinien und wird oft für Maschinen herangezogen, bei denen die Vorausberechnung des Betriebsverhalten ungenau ist, z. B. bei Stromverdrängungsläufern. Es werden Drehzahl, Motorstrom und aufgenommene Wirkleistung in Abhängigkeit von der Belastung gemessen. Aus den Messwerten n, I_1, P_1 und den Nenndaten lassen sich für $U_1 = U_N$ u. a. folgende Größen berechnen:

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{n_1 - n}{n_1} \\
P_D &= P_1 - P_{\mathrm{Cu1}} - P_{\mathrm{Fe}} \\
P_2 &= P_D(1-s) - P_{\mathrm{Rbg}} \\
M &= \frac{P_2}{2\,\pi\, n} \\
\eta &= \frac{P_2}{P_1} \\
\cos\varphi &= \frac{P_1}{\sqrt{3}\,U_N\,I_1}\ .
\end{aligned}
$$

Vorher müssen die Eisen- und Reibungsverluste getrennt werden (siehe Abschnitt 4.1.3).

Berechnung der Belastungskennlinien

Mit den ESB-Parametern lassen sich die Belastungskennlinien hinreichend genau berechnen (siehe dazu auch Abschnitt 3.5.3). Nimmt man die Drehzahl n als Parameter, ergeben sich für das ESB in Abb. 4.9 im einzelnen:

$$
\begin{aligned}
s(n) &= \frac{n_1 - n}{n_1} & \underline{Z}_1 &= R_1 + \mathrm{j}\,X_{1\sigma} & \underline{Z}'_2(s) &= \frac{R'_2}{s} + \mathrm{j}\,X'_{2\sigma} \\
\underline{Z}_0 &= \frac{\mathrm{j}\,R_{\mathrm{fe}} X_h}{R_{\mathrm{fe}} + \mathrm{j}\,X_h} & \underline{Z}(s) &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}'_2(s)\underline{Z}_0}{\underline{Z}'_2(s) + \underline{Z}_0} & \underline{I}_1(s) &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}(s)} \\
\cos\varphi(s) &= \cos\arctan\frac{\Im\{\underline{I}_1(s)\}}{\Re\{\underline{I}_1(s)\}} & \underline{I}'_2(s) &= \frac{\underline{U}_1\underline{Z}_0}{\underline{Z}(s)(\underline{Z}_0 + \underline{Z}'_2(s))} & P_D(s) &= 3\,\left|\underline{I}'_2(s)\right|^2\,\frac{R'_2}{s} \\
M(s) &= \frac{P_D(s)}{2\pi n_1} - \frac{P_{\mathrm{Rbg}}}{2\pi\ n} & P_m(s) &= 2\pi\ n\ M(s) & P_1(s) &= 3\ U_1\ I_1(s)\ \cos\varphi(s) \\
\eta(s) &= \frac{P_m(s)}{P_1(s)}\ . & & & &
\end{aligned}
$$

In diesem Gleichungssystem sind alle elektrischen Größen einphasig. Für U_1 wählt man die einphasige Spannung, zu der die Belastungskennlinien berechnet werden sollen, und legt sie in die reelle Achse. Bei der Berechnung des Drehmomentes M setzt man für P_{Rbg} das Ergebnis aus Abschnitt 4.1.3 ein[5]. Variiert man n im Bereich $n_N < n < n_1$ lassen sich daraus die Belastungskennlinien berechnen. Mit den Daten der Versuchsmaschine erhält man die Diagramme in Abbildung 4.10.

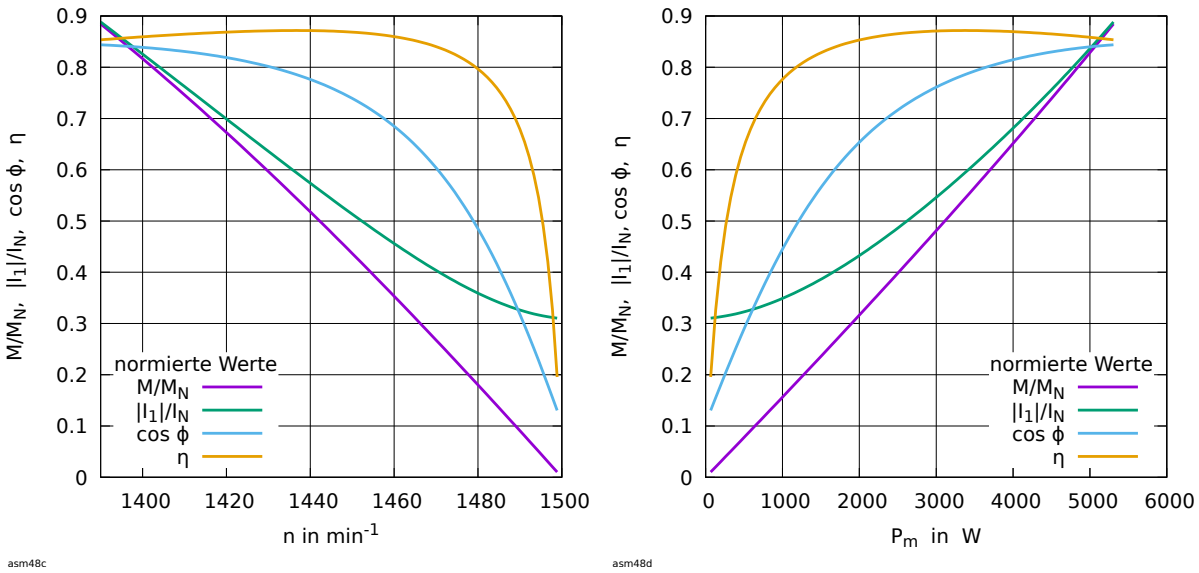


Abb. 4.10: Charakteristische Größen der ASM in Abhängigkeit von n und P_m

☞ Achtung: die gemessenen bzw. gerechneten Reibungsverluste P_{Rbg} gelten strenggenommen nur für die Leerlaufdrehzahl n_0 und ausreichend genau für die Nenndrehzahl n_N. Will man das o. a. Gleichungssystem zum Berechnen des Kreisdiagramms verwenden, muss man statt $M(s)$ und $P_m(s)$ die Größen $M_i(s)$ und $P_i(s)$ benutzen, da die Reibungsverluste für andere Drehzahlen/Schlupfwerte nicht berechnet werden können.

4.1.4 Synchronmaschine

Grundlage für die Auswertungen sind die Vorschriften in DIN VDE 0530 Teil 4 (im weiteren Text als »Vorschrift« bezeichnet).

Absolute und bezogene Größen

„Alle Kenngrößen und Kennlinien sollen in per-unit (p.u.)-Werte angegeben werden, wobei als Bezugswerte die Nennspannung U_N und die Nennscheinleistung S_N gelten. Für diesen Fall lautet die Beziehung für den Nennstrom:

$$I_N = \frac{S_N}{\sqrt{3}\,U_N} \qquad \text{und für die Nennimpedanz} \qquad Z_N = \frac{U_N^2}{S_N} = \frac{S_N}{3\,I_N^2}\,.$$

[5] Man achte in der Formel auf die beiden verschiedenen Drehzahlen n und n_1.

> Falls es bequem ist, können Zwischenrechnungen in physikalischen Größen (Absolutwerten) durchgeführt werden mit anschließender Umrechnung in die per-unit-Werte (Relativwerte). […] Bei der Berechnung von Kennlinien und beim Zeichnen von Schaubildern wird als Bezugswert des Erregerstromes derjenige Erregerstrom gewählt, welcher sich auf der Leerlauf-Kennlinie bei Nennspannung ergibt."

Auf die Normierung der Erregerströme wird im Rahmen dieser Auswertung von Messwerten verzichtet.

Gleichstrom-Widerstand

Vereinfacht gegenüber der Vorschrift schaltet man die drei Phasen in Reihe und speist diese Schaltung mit einem regelbaren Gleichspannungsnetzgerät. Diese Maßnahme mittelt evtl. vorhandene Widerstandsabweichungen in den drei Phasen. Die Gleichspannung sollte so bemessen sein, dass die Wicklungstemperatur während der Messung adiabatisch um höchstens 1 K zunimmt. Die adiabatische Erwärmung errechnet sich nach der Formel

$$\Delta\vartheta = \frac{J^2}{200}\ \mathrm{K\ je\ Sekunde\ für\ Kupfer}$$

mit J als Stromdichte während der Messung in $\mathrm{A/mm^2}$. Geht man von einer Stromdichte von $5\,\mathrm{A/mm^2}$ für die Ständerwicklung aus, hat man für die Messung ca. 8 s Zeit. Zur Messung von Gleichstrom I_{DC} und -spannung U_{DC} sollte man zwecks schneller und genauer Ablesung Digitalmessgeräte verwenden.

Den Gleichstrom-Widerstand einer Phase erhält man aus

$$R_1 = \frac{U_{\mathrm{DC}}}{3\,I_{\mathrm{DC}}}\ .$$

Daten der Synchronmaschine:

DY 220/380 V 10/5.8 A $1500\,\mathrm{min^{-1}}$ 50 Hz $\cos\varphi = 1$
3 kW(Motor) 3.8 kVA(Generator) Erregung: 220 V, 1.5 A

Messung von R_1 (3 Stränge in Reihe): $U_{\mathrm{DC}} = 3.3\,\mathrm{V}$, $I_{\mathrm{DC}} = 1.09\,\mathrm{A}$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $R_1 \approx 1\,\Omega$

Leerlaufversuch

Die Synchronmaschine wird mittels fremderregter Gleichstrommaschine auf Nenndrehzahl hochgefahren. Man stellt mit einem Stroboskop diese Drehzahl genau ein und liest die Spannung des Tachogenerators U_{TG0} mit einem Digitalvoltmeter ab. Unter der Annahme eines linearen Verlaufs der Tachospannung mit der Drehzahl verwendet man bei allen weiteren Drehzahlmessungen diese Spannung als Referenzwert.

Gemessen wird die Leerlaufspannung (=Polradspannung) $U_p = f(I_E)$ bei Nenndrehzahl. Zur Kontrolle wird auch die Drehzahl (= Tachospannung U_{TG}) gemessen. Dabei soll die Erregung vom Maximalwert bis auf den Wert Null geändert werden. Bei $I_E = 0$ macht sich die *Remanenzspannung* der Maschine bemerkbar, d. h. die Leerlaufkennlinie geht nicht durch den Nullpunkt sondern schneidet die Ordinatenachse oberhalb des Nullpunktes. Verlängert man diesen Teil der Kennlinie zur Abszissenachse, erhält man als Schnittpunkt einen negativen Erregerstrom.

Addiert man diesen Wert zu allen gemessenen Erregerstromwerten, entspricht dies einer Korrektur/Verschiebung der Leerlauf-Kennlinie derart, dass sie durch den Nullpunkt geht.

Man wird bemerken, dass die Nennspannung schon bei geringen Erregerströmen erreicht wird, d. h. beim Erregerstrom hat man im Leerlauf noch sehr viel »Reserve« bezogen auf den Erregernennstrom. Diese Reserve ist aber aus mehreren Gründen notwendig:

- bei induktiver Belastung muss der Generator zusätzliche Blindleistung liefern, damit er die geforderte Klemmenspannung halten kann (übererregter Betrieb);
- mit zunehmender Sättigung der Maschine muss der Erregerstrom überproportional gesteigert werden um die Leerlaufspannung zu erhöhen;
- der Luftspalt einer Synchronmaschine ist gegenüber Gleichstrom- oder Asynchronmaschinen sehr groß. Entsprechend muss die Erregerleistung der Maschine dimensioniert sein.

Auswertung

Die gemessenen Spannungswerte müssen auf bezogene Größen umgerechnet werden. Berücksichtigt man auch noch die Drehzahlschwankungen ergibt sich:

$$u_p(I_E) = \frac{U_P(I_E)}{U_N} \frac{U_{\mathrm{TG0}}}{U_{\mathrm{TG}}(I_E)}$$

Manchmal ist es vorteilhafter, statt der Messpunkte eine geschlossene Funktion zur Beschreibung des Verlaufs einer Kennlinie zu haben. Im Falle der Leerlauf-Kennlinie eignet sich ein ungerades Polynom in der Form

$$u_p(x) = a_1\, x + a_3\, x^3 + a_5\, x^5 + a_7\, x^7 \ .$$

Würde man noch das absolute Glied a_0 hinzufügen, könnte man den Einfluss der Remanenzspannung berücksichtigen (s. o.)[6]. Abbildung 4.11 zeigt den Verlauf der gemessenen und analytisch ermittelten Leerlauf-Kennlinie.

Dreiphasiger Dauerkurzschlussversuch

Bei ausgeschaltetem Erregerstrom schließt man alle drei Phasen kurz. Erst danach darf der Erregerstrom eingeschaltet werden. Gemessen wird der Dauerkurzschlussstrom $I_k = f(I_E)$ möglichst bei Nenndrehzahl. »Einer der Messpunkte sollte in der Nähe des Anker-Nennstromes liegen« (lt. Vorschrift).

Variiert man während des Kurzschlussversuches die Drehzahl, stellt man fest, dass Drehzahländerungen auf die Messwerte keinen Einfluss haben. Mit der Drehzahl ändert sich nämlich die Höhe *und* die Frequenz der Spannung. Dadurch ändert sich auch die Größe der Synchron-Reaktanz, beide Änderungen heben sich wieder auf:

$$I_k \approx \frac{U_p}{X_d} \approx \frac{K \cdot \omega}{\omega\, L} \approx \text{ konstant} \ .$$

Diese Tatsache nutzt die Drehstromlichtmaschine aus. Der Ladestrom entspricht im Prinzip dem Kurzschlussstrom der Maschine und ist weitgehend unabhängig von der Drehzahl. Außerdem

[6] Die Koeffizienten lassen sich in GNUPLOT mit dem fit-Kommando berechnen (siehe Auswerten externer Daten, Fitfunktion im Anhang).

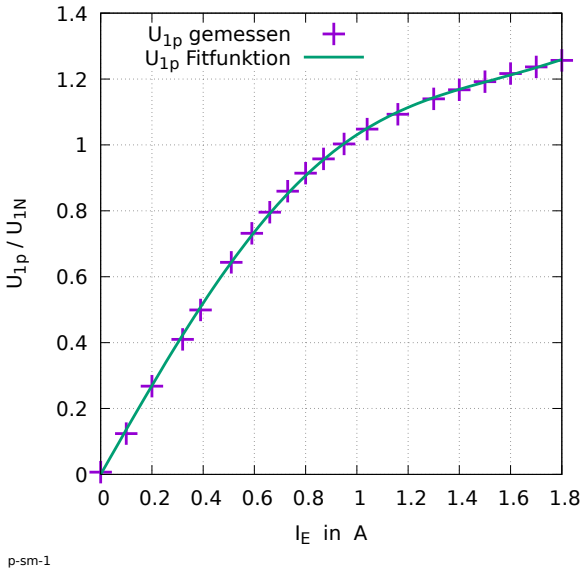


Abb. 4.11: Leerlaufkennlinie

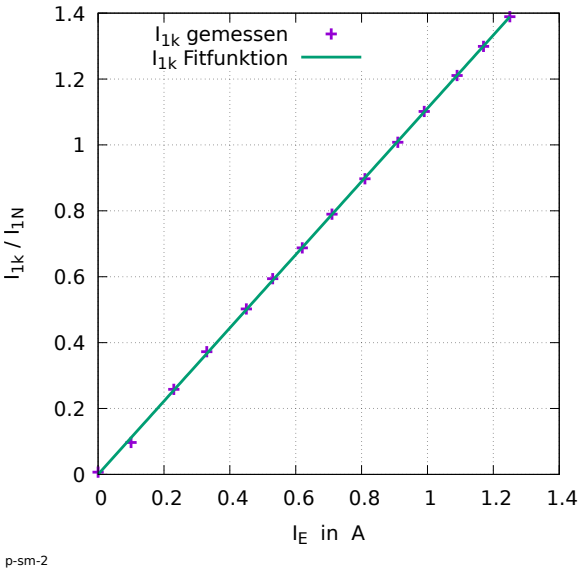


Abb. 4.12: Kurzschlusskennlinie

ergibt sich eine einfache Schaltung für den Laderegler, da Ladestrom und Erregerstrom linear voneinander abhängen.

Zum Antrieb der kurzgeschlossenen Maschine kommt man mit einem geringen Moment aus, da die Maschine keine Wirkleistung umsetzt (der ohmsche Widerstand der Ständerwicklung ist klein gegenüber dem induktiven Widerstand). Bei sehr geringen Drehzahlen gewinnt der ohmsche Widerstand an Einfluss, das Moment steigt. Fährt man die kurzgeschlossene und erregte Maschine an, macht sich dieser Einfluss als ein sehr großes Anfahrmoment bemerkbar.

Da Drehzahlschwankungen so gut wie keinen Einfluss auf die Messungen haben, kann man den Ankerstrom als bezogene Größe über den Erregerstrom direkt auswerten mit

$$i_k(I_E) = \frac{I_k(I_E)}{I_N}$$

Da diese Funktion der Theorie nach eine Gerade sein muss, die durch den Nullpunkt geht, bietet sich als analytische Funktion das Polynom

$$i_k(x) = b_1\, x$$

an. Abbildung 4.12 zeigt den Verlauf der Messungen und die berechnete *Fit*-Funktion.

Ermittlung von Kenngrößen aus dem Leerlauf- und Dauerkurzschlussversuch

Im Folgenden sind alle Absolutwerte einphasige Größen (Index 1…).

Für die Synchronreaktanz gilt $X_d = U_{1p}/I_{1k}$. Trägt man U_{1p} und I_{1k} als Funktion von I_E in ein Diagramm ein und bildet für jeden Erregerstrom das Verhältnis U_{1p}/I_{1k} erkennt man, dass X_d nicht konstant sondern von I_E abhängig ist. Abbildung 4.13 zeigt die gleichen Größen, jedoch

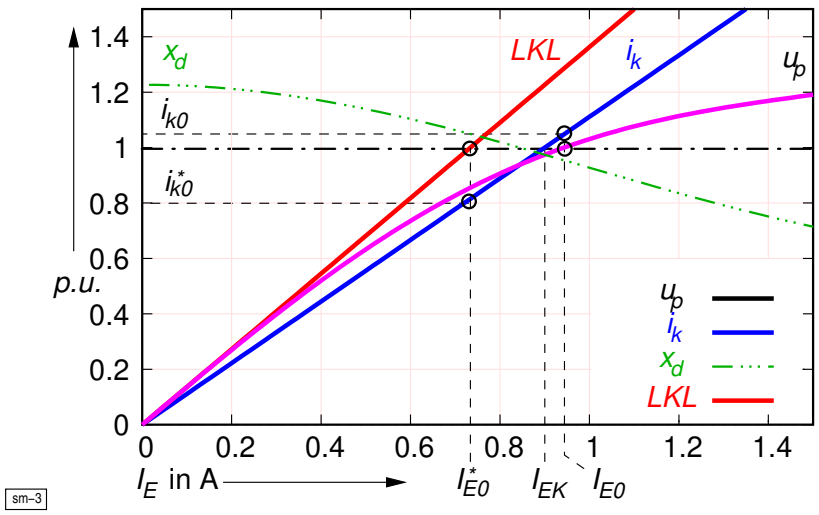


Abb. 4.13: Ermittlung von Kenngrößen aus dem Leerlauf- und Dauerkurzschlussversuch

in per-unit-Werten, wobei statt der Messwerte die analytischen Funktionen verwendet wurden, und zwar unter Beibehaltung der unabhängigen Variablen x statt I_E:

$$u_p(x) = a_1\,x + a_3\,x^3 + a_5\,x^5 + a_7\,x^7$$
$$i_k(x) = b_1\,x$$
$$x_d(x) = \frac{u_p(x)}{i_k(x)}\ .$$

Aus Abbildung 4.13 lassen sich weitere Größen ableiten:

- Nimmt man eine lineare Maschine an, würde die Leerlaufspannung linear mit dem Erregerstrom verlaufen (Luftspaltgerade LKL). Diese erreicht die Nennspannung $u_{1N} = 1$ bei dem Erregerstrom I^*_{E0}. Der gleiche Erregerstrom verursacht einen Kurzschlussstrom i^*_{k0}. Daraus ergibt sich für die *ungesättigte Synchronreaktanz*

  $$X_{du} = \frac{U_{1N}}{I^*_{k0}} \qquad \Longrightarrow \qquad x_{du} = \frac{1}{i^*_{k0}}\ .$$

  Dies entspricht der *Synchron-Reaktanz der Längsachse* entsprechend der Vorschrift.

- Für eine reale Maschine ändert sich X_d mit dem Erregerstrom. Den zur Erreichung der Nennspannung erforderliche Erregerstrom I_{E0} liest man mit Hilfe der Leerlauf-Kennlinie ab. Dieser Erregerstrom erzeugt beim Kurzschluss den Strom I_{k0}. Daraus erhält man die *gesättigte Synchronreaktanz*

  $$X_{dg} = \frac{U_{1N}}{I_{k0}} \qquad \Longrightarrow \qquad x_{dg} = \frac{1}{i_{k0}}\ .$$

- Das Leerlauf-Kurzschlussverhältnis K_c ergibt sich aus dem Quotienten der Erregerströme, die jeweils zur Nennspannung im Leerlauf auf der Leerlauf-Kennlinie und zum Nennstrom auf der Kurzschluss-Kennlinie gehören:

  $$K_c = \frac{I_{E0}}{I_{Ek}}\ .$$

Der Faktor K_c beschreibt das Verhalten der Klemmenspannung bei Belastungsänderungen[7]. Er bestimmt die *Stabilität* des Generators im Verbundbetrieb.

Legt man die analytischen Funktionen zugrunde, lassen sich die gewünschten Größen sehr einfach bestimmen. Für I^*_{E0} muss die Geradengleichung der Luftspaltkennlinie LKL den Wert Eins annehmen. Die Geradengleichung von LKL ergibt sich aus der ersten Ableitung von $u_p(x)$ an der Stelle $x = 0$ zu $a_1\, x$. Daraus folgt:

$$a_1\, x = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{1}{a_1} = I^*_{E0}\ .$$

Den Kurzschlussstrom i^*_{k0} bei I^*_{E0} errechnet sich dann aus

$$i^*_{k0} = b_1 \cdot I^*_{E0} = b_1\ \frac{1}{a_1} = \frac{b_1}{a_1}\ .$$

Etwas komplizierter wird es nur bei der analytischen Bestimmung von I_{E0}. Dazu muss die Leerlaufkennlinie den Wert Eins annehmen. Es muss also die Lösung der Gleichung $u_p(x) = 1$ gesucht werden. Aus Abb. 4.11 kann man den Wert direkt ablesen.

Damit lässt sich der Kurzschlussstrom i_{k0} bei I_{E0} bestimmen:

$$i_{k0} = b_1 \cdot I_{E0}$$

Den Erregerstrom I_{Ek} bei Nennkurzschlussstrom $i_k = 1$ erhält man mit

$$b_1\, x = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{1}{b_1} = I_{Ek}\ .$$

Die Synchronreaktanzen ergeben sich aus

$$x_{du} = \frac{1}{i^*_{k0}} \qquad x_{dg} = \frac{1}{i_{k0}}\ .$$

Die Größen für K_c sind damit auch vorhanden.

☞ **Hinweis:** Als »Kompromiss« zwischen linearer und gesättigter Maschine bietet sich die Gerade an, die vom Nullpunkt durch den Punkt der Leerlaufkennlinie geht, bei dem die Leerlaufspannung gleich der Nennspannung ist, also $U_p = U_N$ bzw. $u_p = 1$ (in Abbildung 4.13 nicht eingezeichnet) und als *Arbeitskennlinie* bezeichnet wird. Man rechnet mit der gesättigten Reaktanz, die als konstant angenommen wird. Mit Hilfe des Dreisatzes ergibt sich dann ein linearer Zusammenhang zwischen Erregerstrom und Leerlaufspannung.

Mit diesem Kompromiss kann man den Erregerbedarf bei beliebiger Belastung berechnen.

Beispiel: $U_{1N} = 220\,\mathrm{V}, I_{1N} = 5.8\,\mathrm{A}, \cos\varphi = 0.8(\text{induktiv}) \Longrightarrow \varphi = -37°$, es soll mit $X_{dg} = 36\,\Omega$ gerechnet werden. Nach dem Ersatzschaltbild in Abbildung 4.14 gilt:

$$\underline{U}_{1p} = U_{1N} + \mathrm{j}\, X_d\, \underline{I}_{1N} \quad \text{mit} \quad \underline{I}_{1N} = I_{1N}\left(\cos(-37°) + \mathrm{j}\,\sin(-37°)\right)\ .$$

Für $|\underline{U}_{1p}|$ ergibt sich damit eine Spannung von etwa 384 V. Mittels Dreisatz und der Arbeitskennlinie erhält man den benötigten Erregerstrom:

$$I_E = \frac{|\underline{U}_{1p}|}{U_{1N}}\ I_{E0}\ .$$

Der Generator arbeitet *übererregt*.

[7] Er enstpricht in gewisser Weise der reziproken, relativen Kurzschlussspannung beim Transformator.

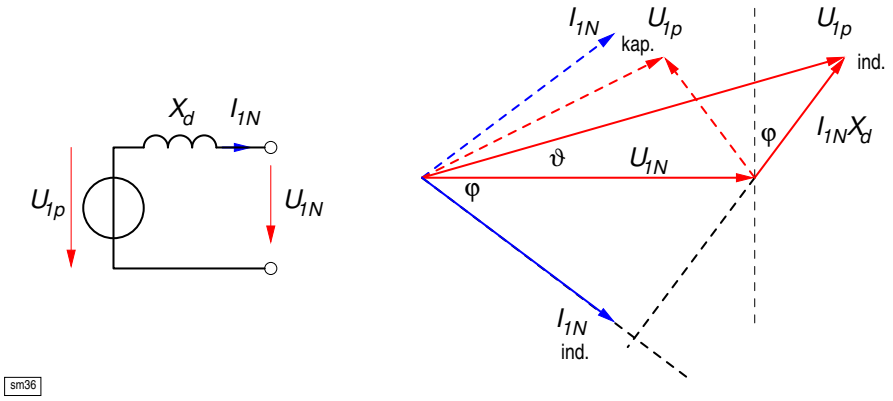


Abb. 4.14: Bestimmung des Erregerbedarfs bei Belastung

☞ **Wichtiger Hinweis:** Für eine genaue Berechnung muss die Synchronreaktanz X_d aufgespalten werden in $X_{1\sigma}$ und X_h (siehe auch Kapitel Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm und Abbildung 2.87). Außerdem ist der Spannungsabfall $\mathrm{j}\,X_d\ \underline{I}_1$ auch von der Sättigung abhängig da $X_d = f(I_E)$. Der tatsächliche Bedarf liegt deshalb wesentlich höher. [8]

Zum Vergleich: ändert man den Leistungsfaktor auf $\cos\varphi = 1$ bei sonst gleichen Bedingungen ergibt sich eine Leerlaufspannung von 303 V, bei einem kapazitiven Leistungsfaktor von 0.8 benötigt man nur etwa 192 V (strichlierte Vektoren in Abbildung 4.14). Dieser Fall tritt z. B. beim Speisen von leerlaufenden Freileitungen auf. Der Generator arbeitet dann *untererregt*.

Den Polradwinkel ϑ erhält man aus der Lage von $\underline{U}_{1p}$. Da U_{1N} willkürlich in die reelle Achse gelegt wurde, ergibt sich der Polradwinkel aus:

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{\Im\{\underline{U}_{1p}\}}{\Re\{\underline{U}_{1p}\}}\right) .$$

Für den Lastfall $\cos\varphi = 0.8$ induktiv erhält man einen Polradwinkel von $\vartheta = 25.9°$.

Bestimmung der Leerlaufverluste

Hierzu betreibt man die Synchronmaschine als leerlaufenden Motor ohne Gleichstrommaschine. Die Messung erfolgt bei Nenndrehzahl und Nennspannung U_0. Den Erregerstrom der Maschine stellt man dabei so ein, dass der Ankerstrom I_0 minimal wird ($\cos\varphi = 1$), d. h. die Maschine nimmt reine Wirkleistung auf. Zieht man von dieser Leerlaufleistung P_0 die relativ geringen Kupferverluste ab, erhält man die Eisen- und Reibungsverluste. Zusatzverluste bleiben unberücksichtigt. Es gilt:

$$P_{\mathrm{F+R}} = P_0 - 3\ I_{10}^2\ R_1$$

wobei für I_{10} der entsprechende Phasenstrom einzusetzen ist. Zur Trennung der Eisen- und Reibungsverluste misst man $P_{\mathrm{F+R}}$ als Funktion der Klemmenspannung U_0. Durch Extrapolation nach $U_0 = 0$ lassen sich die beiden Verlustarten trennen.

[8] Der Erregerstrom lässt sich grafisch bestimmen, z. B. aus dem *Potier*-Diagramm, *ASA*-Diagramm oder *Schweden*-Diagramm.

Mit den Leerlauf- und Kurzschlussversuchen hat man im Prinzip die wichtigsten Parameter, die das stationäre Verhalten der Maschine beschreiben. Die im folgenden beschriebenen Versuche liefern keine neuen Parameter sondern dienen eigentlich nur dazu, das Betriebsverhalten der Maschine zu demonstrieren und Abweichungen, die durch vereinfachte Annahmen gemacht werden, aufzuzeigen. Mit den bekannten Daten lässt sich das Verhalten der Maschine auch vorausberechnen.

V-Kurven (Generatorbetrieb)

Dieser Abschnitt erläutert die Theorie der V-Kurven für einen Synchrongenerator, der in ein Netz einspeist.

Die V-Kurven stellen eine andere Sichtweise zwischen Erregerstrom und Ständerstrom dar. Dazu stellt man eine konstante Wirkleistung P an der Antriebsmaschine des Generators ein und variiert den Erregerstrom. Beobachtet wird der Netzstrom I_1. Am Zeigerdiagramm (Abb. 4.15)

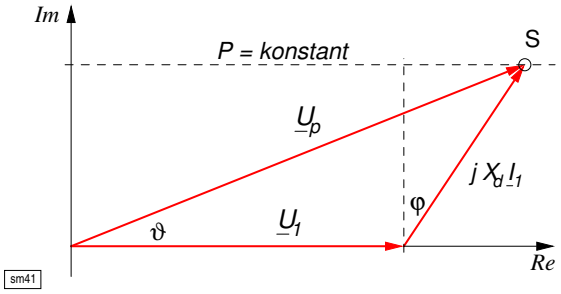


Abb. 4.15: Zeigerdiagramm für V-Kurven

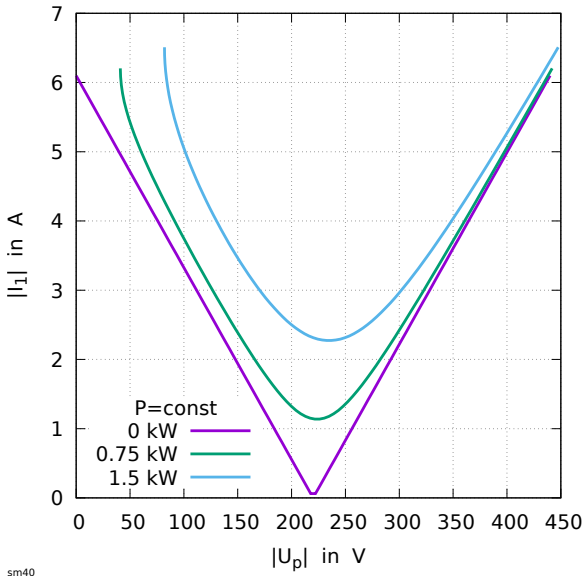


Abb. 4.16: V-Kurven (Generator)

kann man verdeutlichen, wie I_1 in Abhängigkeit von U_p verläuft. Der Betriebspunkt S stellt eine bestimmte Wirkleistung dar: $U_1\, I_1 \cos\varphi$. Durch Verändern des Erregerstromes verändert sich die Leerlaufspannung U_p entsprechend der Leerlaufkennlinie. Dadurch wandert der Punkt auf einer waagerechten Linie parallel zur reellen Achse. Die Wirkleistung ändert sich nicht[9], die Blindleistung (Winkel φ) geht von kapazitiv (untererregt) über rein ohmsch nach induktiv (übererregt). Gleichzeitig ändert sich die Länge von $\underline{I}_1$, wenn man X_d als konstant annimmt. Der Ständerstrom erreicht seinen kleinsten Wert bei $\varphi = 0$. Das Zeigerdiagramm zeigt auch anschaulich, dass bei gleicher Wirkleistung (Wellenmoment) der Polradwinkel mit abnehmender Leerlaufspannung zunimmt, d. h. die Gefahr des Kippens nimmt bei Untererregung und Wirkleistungsabgabe zu.

[9] Es mag etwas verwundern, dass die Wirkleistung vom Imaginärteil der Spannungen abhängt, aber das Diagramm ist kein Leistungsdiagramm!

Zum Zeichnen der V-Kurven kann man folgenden Weg beschreiten: man legt die konstante Netzspannung U_1 in den Ursprung des Koordinatensystems in Richtung der reellen Achse. Der Abstand der Linie für konstante Wirkleistung P entspricht $U_p \sin\vartheta$ und man erhält ihn entsprechend der Formel (2.54) aus

$$U_p \ \sin\vartheta = \frac{P\, X_d}{3\, U_1} \ .$$

Dabei wurde das Minuszeichen zum Pluszeichen, da bei dem Ersatzschaltbild nach Abbildung 4.15 die Stromrichtung von I_1 entgegengesetzt angenommen wurde wie bei der Formel (2.54). Führt man den Parameter x ein, lässt sich der Punkt S und damit U_p in der komplexen Ebene beschreiben durch

$$\underline{U}_p = x + \mathrm{j}\,\frac{P\, X_d}{3\, U_1}$$

und für den Ständerstrom erhält man

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_p - U_1}{\mathrm{j}\, X_d} \ .$$

Gezeichnet wird $|\underline{I}_1|$ über $|\underline{U}_p|$ in Abhängigkeit von z. B. $0 < x < 2\ U_{1N}$ für verschiedene Vorgaben von P (Abb. 4.16).

☛ Hinweis: Man beachte, dass für $P > 0$ die Leerlaufspannung $U_p > 0$ gilt.

Motorbetrieb mit konstantem Lastmoment (V-Kurve)

Dazu wird die Synchronmaschine als *Motor* mit einem fremderregten Gleichstromgenerator belastet. Das Lastmoment wird so am Generator eingestellt, dass der Motor während der Messung eine konstante Wirkleistung P_1 aufnimmt. Begonnen wird die Messung mit maximalem Erregerstrom, wobei darauf zu achten ist, dass der Ankernennstrom nicht überschritten wird. Gemessen werden Ankerstrom I_1 und Klemmenspannung U_1 als Funktion des Erregerstromes I_E. Zur Kontrolle erfasst man auch die aufgenommene Leistung P_1.

Aus diesen Messwerten lassen sich u. a. folgende Größen berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{P_1}{\sqrt{3}\, U_1\ I_1}$$
$$\sin\vartheta = \frac{(P_1 - P_{\mathrm{F+R}} - 3\, I_1^2\ R_1)\ X_d(I_E)}{3\, U_1\ U_p(I_E)} \ .$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass man auch den Polradwinkel ϑ berechnen kann, da durch die Leerlaufkennlinie die Ausdrücke $U_p(I_E)$ und $X_d(I_E)$ bekannt sind. Abbildung 4.17 zeigt die ausgewerteten Ergebnisse der Messung. Deutlich sieht man, wie sich der Polradwinkel gefährlich nahe dem Wert von 90° bei kleinen Erregerströmen nähert.

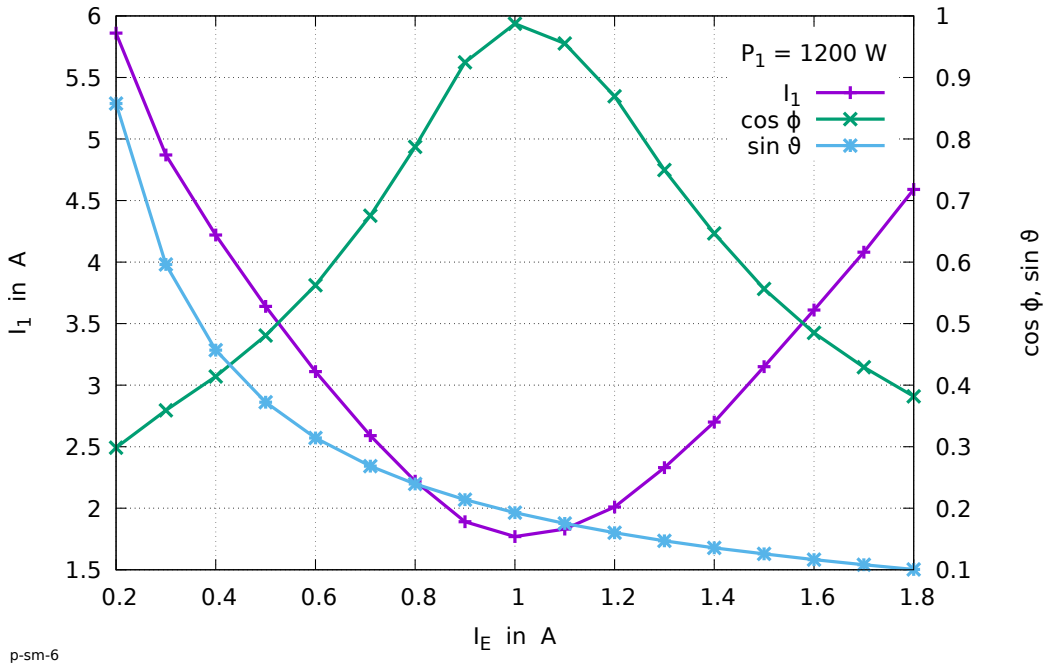


Abb. 4.17: Motorbetrieb bei konstantem Lastmoment

Motorbetrieb mit konstanter Erregung (Momentenverlauf)

Der Versuchsaufbau ist identisch mit dem in Kapitel Motorbetrieb mit konstantem Lastmoment (V-Kurve). Statt der Belastung wird der Erregerstrom konstant gehalten und die Belastung geändert. Gemessen werden der Ankerstrom I_1 und die Klemmenspannung U_1 als Funktion der aufgenommenen Wirkleistung P_1 mit dem Erregerstrom I_E als Parameter. Daraus lässt sich der Momentenverlauf $M = f(\vartheta, I_E)$ der Maschine berechnen:

$$P_2 = P_1 - 3\,I_1^2\;R_1 - P_{\mathrm{F+R}} \qquad M = \frac{P_2}{2\,\pi\;n_N} \qquad \vartheta = \arcsin\frac{P_2\;X_d(I_E)}{3\,U_1\;U_p(I_E)}\;.$$

Auch hier ist zu beachten, dass die Maschine bei kleinen Erregerströmen und zu großer Belastung außer Tritt fallen kann. Abbildung 4.18 zeigt die Resultate.

Belastungsversuche bei einem Generator im Inselbetrieb

Die Belastungsversuche liefern Aufschluss über die Klemmenspannung der Maschine bei konstanter Leerlaufspannung ($I_E = \mathrm{const}$) und unterschiedlicher Belastung. Sie lassen sich nur im Inselbetrieb durchführen. Abbildung 4.19 zeigt noch einmal das Zeigerdiagramm eines Generators bei ohmsch-induktiver Belastung. Anders als in Abbildung 4.14 ist hier $\underline{U}_p$ konstant und $\underline{U}_1$ muss konstruiert werden. Legt man $\underline{U}_1$ willkürlich in die reelle Achse, kann man von der Spitze von $\underline{U}_1$ aus den Vektor $\mathrm{j}\,X_d\,\underline{I}_1$ abtragen (X_d ist bekannt, I_1 und φ werden vorgegeben). Um den Endpunkt schlägt man einen Kreis mit dem Radius U_p. Der Schnittpunkt des Kreises mit der reellen Achse bestimmt dann die gesuchte Länge von U_1.

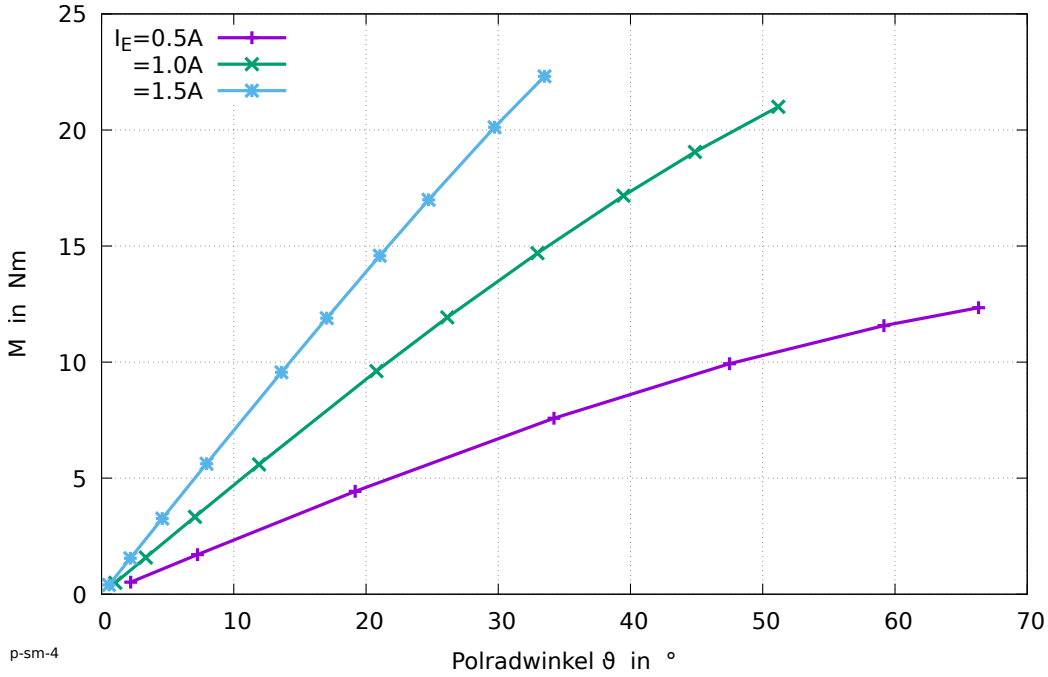


Abb. 4.18: Motormomente bei konstanter Erregung

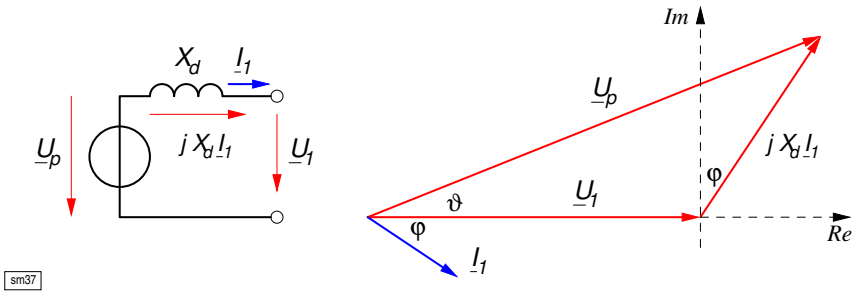


Abb. 4.19: Synchrongenerator im Inselbetrieb bei ohmsch-induktiver Belastung

Mit Hilfe der komplexen Rechnung erhält man die Klemmenspannung U_1 für beliebige Belastung aus

$$U_1 = \sqrt{U_p^2 - \Im\{\mathrm{j}\, X_d\, \underline{I}_1\}^2} - \Re\{\mathrm{j}\, X_d\, \underline{I}_1\}\ .$$

Abbildung 4.20 zeigt die Ausgangsspannung als Funktion des Belastungsstromes bei den Leistungsfaktoren $\cos\varphi = 1$ und $\cos\varphi = 0$ (induktiv und kapazitiv). Dazu setzt man für $\underline{I}_1$ ein:

$$\underline{I}_1 = I_1 \text{ (ohmsch)} \qquad \underline{I}_1 = \mathrm{j}\, I_1 \text{ (kapazitiv)} \qquad \underline{I}_1 = -\mathrm{j}\, I_1 \text{ (induktiv)}\ .$$

Man erkennt, dass die Ausgangsspannung des Generators stark von der Belastung abhängt. Verursacht werden die Schwankungen von der Synchronraktanz X_d. Man wird versuchen, diese Reaktanz möglichst gering zu machen, ein Grund, warum die Synchronmaschine im Vergleich zur Gleichstrom- und Asynchronmaschine einen sehr großen Luftspalt hat.

Ausregeln lassen sich die Spannungsabweichungen, in dem man die Leerlaufspannung U_p ändert, d. h. den Erregerstrom nachstellt. Wie man $\underline{U}_p$ bestimmt, erkennt man anhand des Zeigerdiagramms in Abbildung 4.19. Legt man wieder die Klemmenspannung U_1 in die reelle Achse (die

Länge ist jetzt bekannt) und trägt von der Pfeilspitze den Spannungsabfall $\mathrm{j}\,X_d\,\underline{I}_1$ ab, erhält man $\underline{U}_p$ als dritte Seite des so gebildeten Dreiecks. Aus der Leerlaufkennlinie entnimmt man den dazugehörigen Erregerstrom. Berechnen lässt sich die Spannung $\underline{U}_p$ durch die komplexe Gleichung

$$\underline{U}_p = \underline{U}_1 + \mathrm{j}\,X_d\,\underline{I}_1$$

wobei man auch hier bei $\underline{I}_1$ je nach Belastungsart die entsprechenden Werte für den Real- und Imaginärteil einsetzen muss. Für den Erregerstrom ist natürlich $|U_p|$ maßgebend. Der Verlauf der sog. *Regulierkennlinien* ist in Abbildung 4.21 wiedergegeben. Die Regulierkennlinien gelten nicht nur im Inselbetrieb sondern auch im Netzbetrieb.

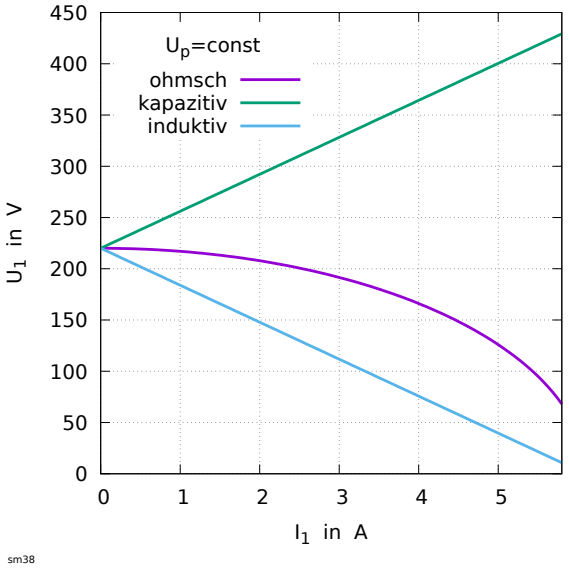


Abb. 4.20: Belastungskennlinien

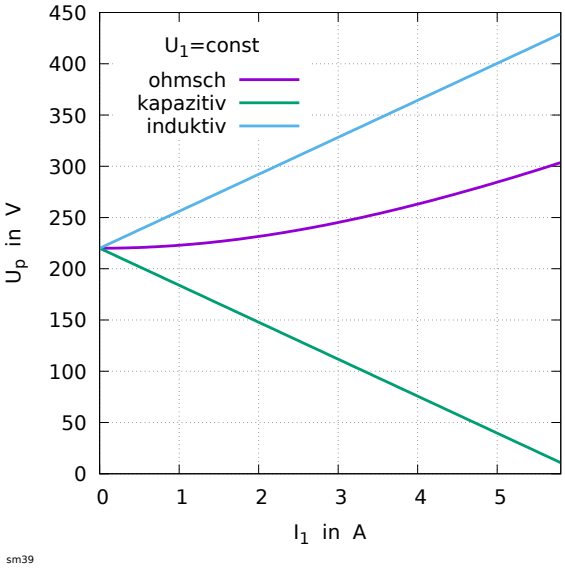


Abb. 4.21: Regulierkennlinien

Stromortskurven

Hält man den Erregerstrom konstant und variiert die Belastung P des Generators, bewegt sich der Ständerstrom $\underline{I}_1$ auf einem Kreisbogen, der von dem Erregerstrom $\mathrm{j}\,\underline{U}_p/X_d$ gebildet wird (siehe Abbildung 2.96 auf Seite 91).

Zum Zeichnen der gemessenen Ortskurve $\underline{I}_1 = f(P)$ müssen die Ströme in Real- und Imaginärteil zerlegt werden. Bei konstanter Netzspannung U_1 ergeben sich

$$\cos\varphi = \frac{P/3}{U_1\ I_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\varphi$$
$$\underline{I}_1 = I_1\ \cos\varphi + \mathrm{j}\,I_1\ \sin\varphi\ .$$

Aus den Grundgleichungen lässt sich die Ortskurve von $\underline{I}_1$ ebenfalls zeichnen. Nimmt man die Leistung P als Parameter ($-P_N < P < P_N$ für Motor und Generatorbetrieb), ergibt sich für den Polradwinkel ϑ entsprechend Formel (2.54)

$$\sin\vartheta = \frac{P\,X_d}{3\,U_1\,U_p} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\vartheta \tag{4.1}$$

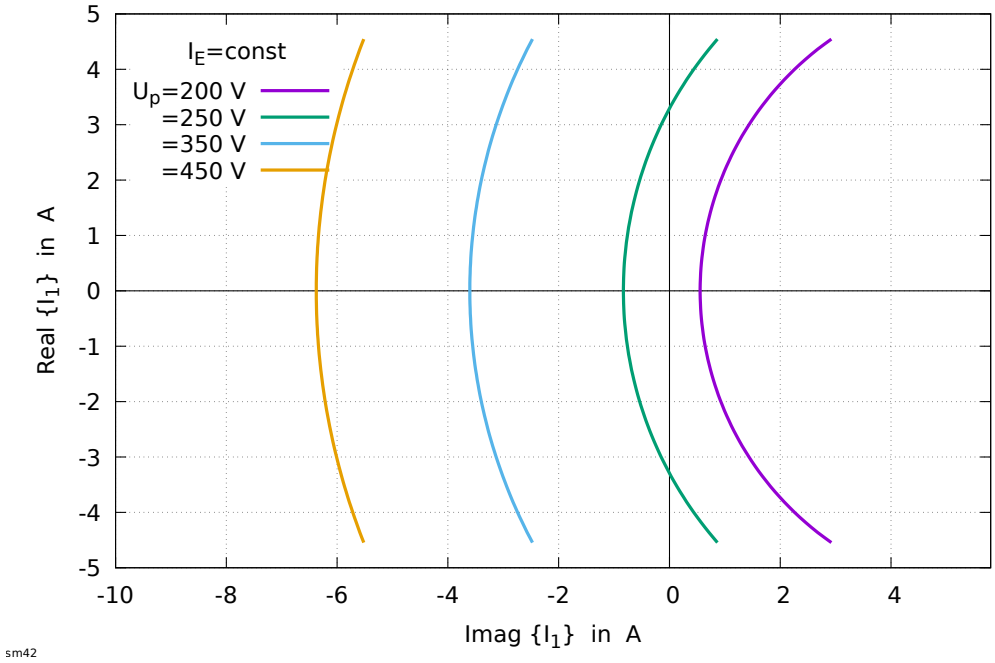


Abb. 4.22: Stromortskurven bei verschiedenen Leerlaufspannungen

bei Vorgabe der Leerlaufspannung U_p entsprechend der Leerlaufkennlinie $U_p = f(I_E)$. In der komplexen Ebene lässt sich die Leerlaufspannung wie folgt ausdrücken:

$$\underline{U}_p = U_p \ \cos\vartheta + \mathrm{j}\, U_p \ \sin\vartheta \ .$$

Für das Ersatzschaltbild gilt

$$\underline{U}_p = \underline{U}_1 + \mathrm{j}\, X_d \ \underline{I}_1$$

und nach $\underline{I}_1$ aufgelöst und $\underline{U}_p$ eingesetzt schließlich

$$\underline{I}_1 = \frac{\mathrm{j}\,(U_1 - \underline{U}_p)}{X_d}$$

mit U_1 in der reellen Achse. Die Lösung dieser Gleichung für den Versuchsgenerator zeigt Abbildung 4.22. Beim Zeichnen ist auf gleiche Teilung der x- und y-Achse zu achten.

☞ **Hinweis:** Bei Untererregung ($\underline{U}_p < \underline{U}_1$) muss die Leistung P reduziert werden, andernfalls kippt die Maschine (Gleichung (4.1) wird > 1).

A Anhang

A.1 Numerische Feldberechnung

Das folgende Kapitel behandelt die grundlegenden Begriffe der Feldtheorie und die numerische Feldberechnung, wobei der Schwerpunkt auf der Methode der *finiten Differenzen (FD)* liegt. Ausführlich wird die numerische Feldberechnung in [4] behandelt.

A.1.1 Feldbegriffe

Felder beschreiben physikalische Größen, die räumlich verteilt sind. Je nach Abhängigkeit werden sie in die folgenden Kategorien eingeteilt:

- **Richtung**

  Skalares Feld: richtungsunabhängige physikalische Größen; Beispiel: Temperaturfeld T

  Vektorfeld: richtungsabhängige physikalische Größen, wird aus mehreren Skalarfeldern gebildet; Beispiel: Gravitation, Strömungsgeschwindigkeiten $\vec{v}$, elektrisches Feld $\vec{E}$, magnetisches Feld $\vec{H}$

  Tensorfeld: setzt sich aus mehreren Vektorfeldern zusammen; Beispiel: mechanische Flächenspannung, Permeabilität in anisotropen Stoffen

- **Ort**

  homogenes Feld: ortsunabhängig; Beispiel: elektrisches Feld zwischen den Platten eines Kondensators (nicht im Randbereich), magnetisches Feld in einer langgestreckten Spule (nicht an den Spulenenden)

  inhomogenes Feld: ortsabhängig; dies trifft fast für alle Felder zu; Beispiel: siehe »homogenes Feld«

- **Zeit**

  stationäres Feld: zeitunabhängig; Beispiel: elektromagnetische Felder in eingeschwungenen Gleichstromkreisen, laminare Strömungen

  instationäres Feld: zeitabhängig; Beispiel: elektromagnetische Felder bei transienten Vorgängen, turbulente Strömungen

A.1.2 Koordinatensystem

Felder werden dem Raum und evtl. auch der Zeit zugeordnet

$$Z = Z(\text{Raum; Zeit})$$

wobei Z eine physikalische Feldgröße (Skalar, Vektor oder Tensor) darstellt. Zur mathematischen Beschreibung des Raumes benötigt man ein Koordinatensystem, welches man möglichst so wählt, dass die Beschreibung des Feldes einfach wird. Beispiele:

- kartesisches Koordinatensystem: $Z = Z(x, y, z; t)$
- Zylinderkoordinaten: $Z = Z(r, \varphi, z; t)$
- Kugelkoordinaten: $Z = Z(r, \vartheta, \alpha; t)$

Sonderformen (Vereinfachung) der o. a. Koordinatensysteme sind

- 2D kartesische Koordinaten: $Z = Z(x, y; t)$
- 2D Polarkoordinaten: $Z = Z(r, \varphi; t)$
- 2D axialsymmetrische Koordinaten: $Z = Z(r, z; t)$

Durch Koordinatentransformationen lassen sich Geometrien von einem System in ein anderes überführen. Das physikalische Feld ist vom Koordinatensystem unabhängig, nur die Zweckmäßigkeit der mathematischen Beschreibung ist entscheidend.

A.1.3 Felddarstellung

Skalarfeld

In einem beliebigen 3-dimensionalen Koordinatensystem bildet ein Skalarfeld eine Funktion

$$U = U(x_1, x_2, x_3)$$

mit den Ortskoordinaten x_1, x_2 und x_3 (Abb. A.1). Raumpunkte mit gleichem Wert U bilden *Äquipotential-* oder *Niveauflächen*, die perspektivisch nicht immer zweifelsfrei dargestellt werden können. Hängen die Felder nur von zwei Ortskoordinaten ab, spricht man von 2-dimensionalen Feldern, eine Darstellung ist möglich, z. B. als Höhenlinien (Wanderkarten, Wetterkarten), durch die Verwendung von Farben (Landkarten). Wird der Funktionswert als 3. Koordinate verwendet, entstehen bei perspektivischer Ansicht Höhengebirge, die mehr oder weniger aussagekräftig sein können (Abb. A.2).

Eindimensionale Felder hängen nur von einer Ortskoordinate ab und lassen sich als Funktion mit einer Veränderlichen (als Ortskoordinate) zeichnen.

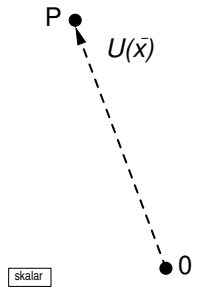


Abb. A.1: Skalarfeld

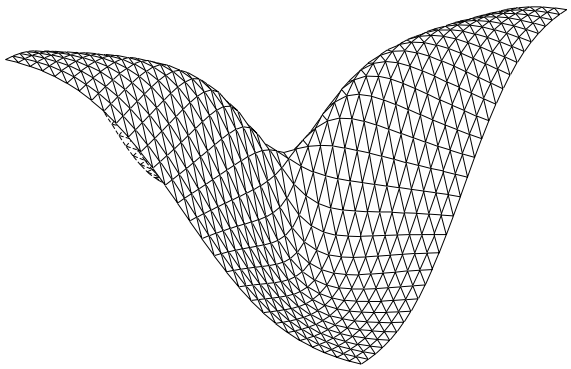


Abb. A.2: Niveaufläche

Vektorfelder

Bei einem Vektorfeld lässt sich jedem Raumpunkt ein Vektor $\vec{U}$ zuordnen (Abb. A.3)

$$\vec{U} = \vec{U}(x_1, x_2, x_3) \; .$$

Dieses Vektorfeld lässt sich in 3 Komponenten (Skalarfelder) zerlegen, die sich zweckmäßigerweise auf die Einheitsvektoren des Koordinatensystems beziehen:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(x_1, x_2, x_3) \\ U_2 &= U_2(x_1, x_2, x_3) \\ U_3 &= U_3(x_1, x_2, x_3) \; , \end{aligned}$$

d. h. die Darstellung von Vektorfeldern beschränkt sich im allg. auf die Darstellung einzelner Komponenten als Skalarfelder. Eine bildliche Darstellung eines Vektorfeldes gewinnt man, wenn

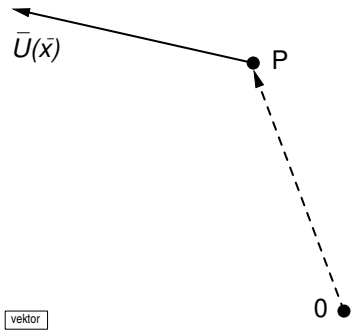


Abb. A.3: Vektorfeld

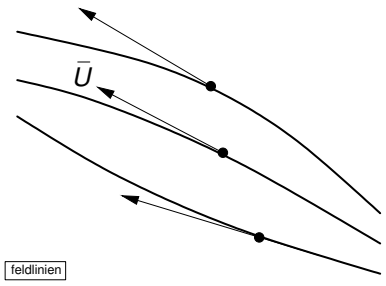


Abb. A.4: Feldlinien

man Raumlinien so konstruiert, dass die Feldvektoren $\vec{U}$ Tangenten dieser Raumlinien sind und der Linienabstand umgekehrt proportional zu $|\vec{U}|$ ist (Abb. A.4). Solche Raumlinien bezeichnet man als *Feldlinien*.

Man unterscheidet im Prinzip zwei Arten von Feldern:

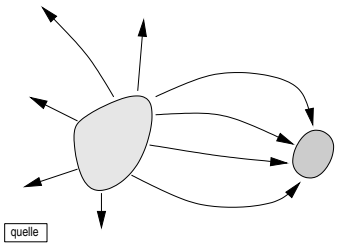


Abb. A.5: Quellenfeld

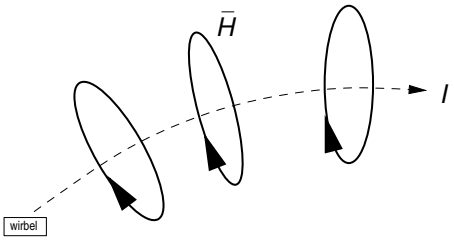


Abb. A.6: Wirbelfeld

- *Quellenfelder* (wirbelfreie Felder): sie haben einen Anfangspunkt (Quelle) und einen Endpunkt (Senke). Beispiel: elektrisches Feld zwischen zwei entgegengesetzten Ladungen (Abb. A.5). Wandert einer der Punkte ins Unendliche, erhalten wir ein Zentralfeld.
- *Wirbelfelder* (quellenfreie Felder): sie besitzen keinen Anfangs- und Endpunkt. Die Feldlinien sind im Endlichen oder Unendlichen geschlossen. Beispiel: magnetische Felder um einen stromführenden Leiter (Abb. A.6).

Tensorfelder

Tensorfelder lassen sich im Prinzip durch 3 Vektorfelder oder 9 Skalarfelder beschreiben.

A.1.4 Rechenoperationen mit Feldern

Einfache Operationen

Für skalare Feldgrößen gelten die Rechenregeln der reellen Zahlen. Zu den wichtigsten Vektoroperationen gehören:

- Addition: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$
- Skalarmultiplikation: $\lambda\vec{A} = \vec{B}$
- Vektorprodukt: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$
- Skalarprodukt: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \lambda$

Linienintegral

Unter einem *skalaren* Linienintegral versteht man den Ausdruck

$$\lambda = \int \vec{A}(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \; .$$

Dabei bedeuten (Abb. A.7)

$\vec{x} = \vec{x}(x_1, x_2, x_3)$**:** Koordinaten der Raumkurve, längs der das Integral gebildet werden soll

$\vec{A}(\vec{x})$**:** Vektorfeld längs der Raumkurve

λ**:** Wert des Integrals (Skalar!)

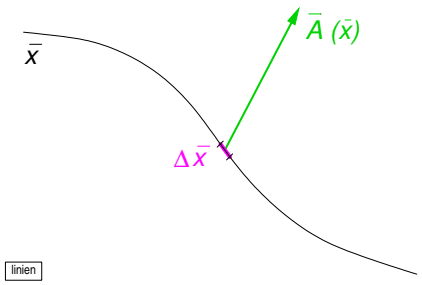


Abb. A.7: Linienintegral

Ist die Raumkurve geschlossen, schreibt man

$$\lambda = \oint \vec{A}(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \; .$$

Typische Linienintegrale der Elektrotechnik sind

- Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten: $U_{ab} = \int_a^b \vec{E}\mathrm{d}\vec{x}$
- Durchflutungssatz: $\sum I = \oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{x}$

Vollständigkeitshalber sei erwähnt, dass es auch *vektorielle Linienintegrale* $\vec{B} = \int \vec{A}(\vec{x}) \times \mathrm{d}\vec{x}$, skalare und vektorielle *Flächen-* und *Volumenintegrale* gibt, auf die hier jedoch nicht eingegangen wird, da sie mittels numerischer Verfahren berechnet werden können.

Praktische Beispiele

1. Wie groß ist die Spannung zwischen den Punkten A und B (Abb. A.8)?
   $(\vec{E} = (1\,\vec{e}_x + 0.5\,\vec{e}_y)\,\mathrm{V/mm})$
2. Zeigen Sie, dass gilt $\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{s} = I$ (Abb. A.9).
   $(I = 70\,\mathrm{A}, r_1 = 10\,\mathrm{mm}, r_2 = 100\,\mathrm{mm})$

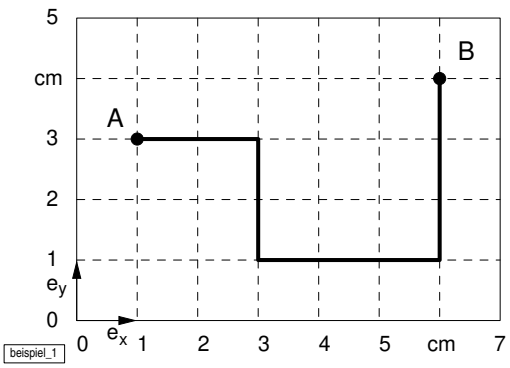


Abb. A.8: Beispiel 1

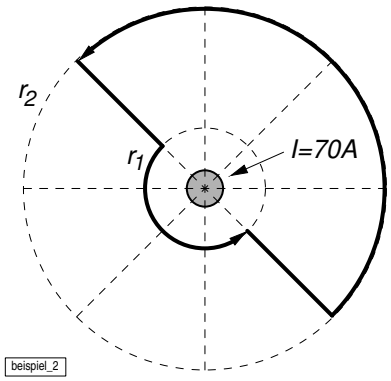


Abb. A.9: Beispiel 2

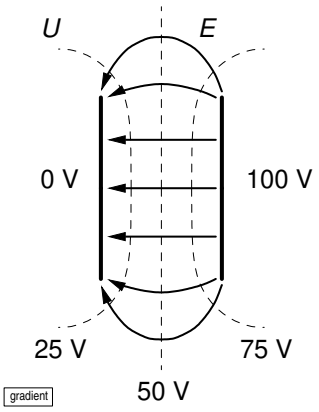


Abb. A.10: Äquipotentiallinien

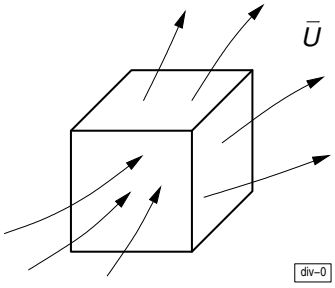


Abb. A.11: Definition der Divergenz

Gradient

In einem Skalarfeld bezeichnet man die Richtung der größten Steigung bzw. Änderung als den Gradienten. Da man sowohl die Richtung als auch den Wert der Änderung erhält, muss der Gradient ein Vektor sein.

Benutzt man zur Darstellung eines 2-dimensionalen Skalarfeldes z. B. Höhenlinien (*Äquipotentiallinien*), erhält man das dazugehörige Gradientenfeld, indem man Linien einzeichnet, die immer senkrecht (*orthogonal*) zu den Äquipotentiallinien verlaufen. Man erhält Feldlinien, die die steilste Änderung im Skalarfeld markieren.

Der Gradient des Skalarfeldes U ist ein Vektorfeld $\vec{V}$, das überall orthogonal auf den Äquipotentialflächen steht. Mathematisch schreibt man diese Operation

$$\operatorname{grad} U = \vec{V} \ .$$

Zwischen zwei elektrisch geladenen Elektroden stellen sich die Potentiale U (Spannungen, also Skalarwerte) ein. Punkte gleichen Potentials bilden die Äquipotentiallinien (Abb. A.10). Diese lassen sich z. B. mit halbleitendem Papier ermitteln. Zeichnet man dazu die Orthogonalen ein, erhält man den Feldverlauf von $\vec{E}$ zwischen den Elektroden. Mathematisch schreibt man

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U \ .$$

Das Minuszeichen ist erforderlich, weil die Feldlinien vom höheren Potential zum niedrigeren verlaufen.

Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes besagt, ob das Feld Senken bzw. Quellen besitzt. Sie liefert die Differenz zwischen den in ein endliches Volumen ein- und austretenden Feldlinien (Abb. A.11). Dies entspricht in der Elektrotechnik den elektrischen bzw. magnetischen Flüssen.

$$\operatorname{div} \vec{U} = V \, .$$

Ist die Divergenz für dieses Volumenelement größer Null, befinden sich Quellen in dem Volumen, bei negativer Divergenz entsprechend Senken. Bei einem quellenfreien Feld ist die Divergenz Null.

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalarfeld.

Angewandt auf ein reines Wirbelfeld, z. B. Magnetfeld (Abb. A.12), ist die Divergenz überall Null, da die magnetischen Feldlinien immer geschlossen sind und es keine magnetische Ladungen gibt, also

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \; .$$

Für ein elektrostatisches Feld liefert die Divergenz die in dem betrachteten Gebiet vorhandenen Ladungen (Abb. A.13), und zwar unter Berücksichtigung der Permittivität (= Dielektrizitätskonstante), also

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \; .$$

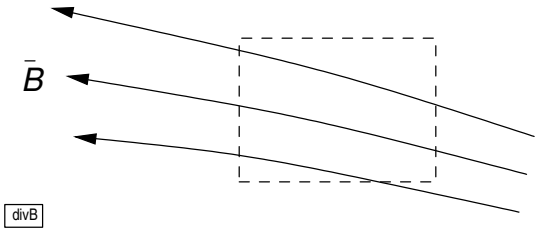


Abb. A.12: Divergenz im Magnetfeld

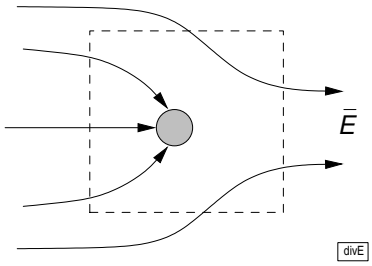


Abb. A.13: Divergenz im elektrostatischen Feld

Rotation

Die Rotation beschreibt die in einem Vektorfeld vorhandenen »Wirbel«, wobei unter Wirbel nicht nur geschlossene Feldlinien sondern auch inhomogene Felder zu verstehen sind.

Um die Rotation an einem beliebigen Raumpunkt P im Vektorfeld $\vec{U}$ bestimmen zu können, berechnet man das geschlossene Linienintegral $\oint \vec{U} \mathrm{d}\vec{x}$ an diesem Punkt und variiert die *Richtung* der Integrationsfläche (der geschlossene Integrationsweg bildet eine Integrationsfläche) solange, bis dieses Integral ein Maximum erreicht. Die Flächennormale der Integrationsfläche gibt die Richtung, der Wert des Integrals die Länge des gesuchten Rotationsvektors $\vec{V}$. Mathematisch schreibt man

$$\operatorname{rot} \vec{U} = \vec{V} \; .$$

In der Praxis wird man das Linienintegral im Punkt P jeweils für alle drei Koordinatenrichtungen bestimmen und aus diesen drei Komponenten den resultierenden Rotationsvektor zusammensetzen.

Die Rotation eines Vektorfeldes liefert wieder ein Vektorfeld.

Für ein homogenes Feld gilt $\operatorname{rot} \vec{U} = 0$.

Der Rotationsvektor eines Magnetfeldes, welches durch einen stromführenden Leiter erzeugt wird, stellt die Tangente an der Raumkurve des Leiters dar (Abb. A.15). Daraus folgt die Beziehung

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \qquad \text{mit der Stromdichte} \quad J = \frac{I}{A} \; .$$

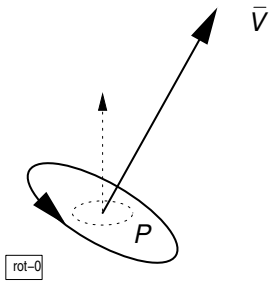


Abb. A.14: Definition der Rotation

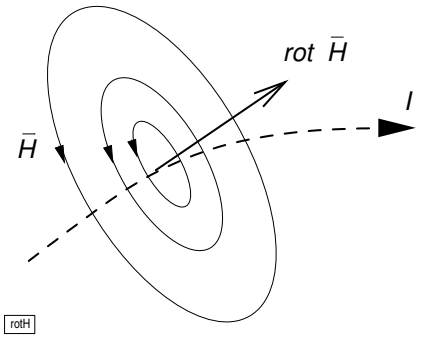


Abb. A.15: Rotationsvektor im Magnetfeld

A.1.5 Maxwellsche Gleichungen

Im Jahre 1862 veröffentlichte James Clerk Maxwell (1831 – 1879) die nach ihm benannten Gleichungen, die eine Zusammenfassung der elektrischen und magnetischen Kräfte in eine einheitliche Theorie darstellen. Eine Beschreibung und Interpretation zu den Maxwellschen Gleichungen findet man im Anhang von [13].

A.1.6 Feldberechnung

Allgemeines

Die Feldtheorie in der Elektrotechnik beschäftigt sich mit der Lösung der Maxwellschen Gleichungen. Unter Einsatz komplexer mathematischer Methoden lassen sich für einfache Feldprobleme (einfache Konturen, linear) mit idealisierten Annahmen analytische Lösungsverfahren angeben (Spiegelungsverfahren, Methode der konformen Abbildung, Potenzreihenentwicklung, Entwicklung nach orthogonalen Funktionen, …).

Unter Verwendung von programmierbaren Rechnern begann man Mitte der 1960-er Jahre numerische Lösungsverfahren zu entwickeln. Dabei setzte man diese Rechner sowohl für die bisher bekannten, analytisch oder empirisch entwickelten Methoden ein oder entwickelte neue Algorithmen, die der Arbeitsweise der Rechner angepasst waren.

Die heute weitverbreiteteste Methode zur Berechnung von Feldern, seien es mechanische Spannungsfelder, Strömungsfelder oder elektromagnetische Felder, besteht darin, das Feldproblem zu *diskretisieren*. Darunter versteht man die Unterteilung des zu untersuchenden Feldgebietes in kleine Elementarbereiche, innerhalb derer die physikalischen Größen als konstant angenommen werden. Dabei werden natürlich die Wechselwirkungen zwischen benachbarter Bereiche berücksichtigt. Mittels Rechnerprogramme können diese Elementarbereiche nach der gleichen Vorschrift berechnet werden. Die Lösung des Feldproblems ergibt sich aus der Gesamtheit aller Einzelbereiche. Man erkennt, dass die Qualität der Feldberechnung und der damit verbundene Rechenaufwand in engem Zusammenhang stehen.

Zur numerischen Lösung von Feldproblemen haben zwei Verfahren Bedeutung erlangt:

- die Methode der finiten Elemente (FE)
- die Methode der finiten Differenzen (FD).

Beiden Verfahren gemeinsam ist, dass zur Lösung des Feldproblems

- die Feldgleichungen diskretisiert und
- die dabei entstehenden Gleichungssysteme gelöst werden müssen.

Zur Diskretisierung wird bei beiden Verfahren der zu untersuchende Bereich mit einem Gitternetz versehen, das nicht äquidistant sein muss. Bei den FE besteht das Gitternetz aus Dreiecken, bei FD aus Rechtecken. Dabei wählt man das Gitternetz so, dass die Materialkanten auf den Gitterlinien liegen.

Die Zahl der Unbekannten entspricht etwa der Anzahl der durch die Diskretisierung entstandenen Elementarbereiche (ca. 1000 bis 5000 bei einem 2-dimensionalen Feldproblem). Beim Übergang zur 3-dimensionalen Berechnung entstehen sehr leicht Gleichungssysteme mit 50 000 bis mehreren 100 000 Unbekannten.

Liegen nichtlineare Materialeigenschaften vor, z. B. Magnetisierungskennlinien, wird das Gleichungssystem zusätzlich nichtlinear. Eine direkte Lösung solcher Systeme scheidet wegen des enormen Speicherbedarfes aus. Statt dessen verwendet man iterative Verfahren.

Die Maxwellschen Gleichungen eignen sich nicht zum direkten Lösen. Es existieren mehrere *Lösungsansätze*. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, die gesuchten Feldgrößen mit Hilfe einer anderen Feldgröße, die man als *Systemvariable* bezeichnet und den Gitterpunkten zugeordnet wird, zu bestimmen.

Ohne Beweis sind hier die Lösungsansätze für die verschiedenen Feldprobleme aufgeführt.

Vektorpotential

Das Feld $\vec{B}$ wird aus dem Vektorpotential $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ hergeleitet.

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{A}} \ .$$

Für $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ gilt die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{A}} = \vec{J} + \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \vec{M} \ .$$

Diese Gleichung ist numerisch nur für 2-dimensionale Fälle gut lösbar. Die Größe $\vec{M}$ enthält die Magnetisierung bei hartmagnetischen Werkstoffen

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{M} \ .$$

Bei weichmagnetischen isotropen Werkstoffen gilt $\vec{M} = 0$.

Skalares Potential

Magnetostatik

$\vec{H}$ wird aufgespalten in einen Anteil $\vec{H}_i$, dessen Wirbel mit denen von $\vec{H}$ übereinstimmen und einen wirbelfreien Anteil $\operatorname{grad} \Phi_m$, wobei Φ_m das skalare magnetische Potential ist.

$$\vec{H} = \vec{H}_i - \operatorname{grad} \Phi_m$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_i = \vec{J} \ .$$

Daraus ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \Phi_m = \operatorname{div} \mu \vec{H}_i + \operatorname{div} \vec{M} \ .$$

Diese Gleichung ist sowohl für 2- als auch für 3-dimensionale Geometrien gut lösbar.

Elektrostatik

Aus der Wirbelfreiheit von $\vec{E}$ folgt

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi_e \ .$$

Für das skalare elektrische Potential Φ_e erhält man die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \Phi_e = -\rho$$

mit ρ als Ladungsdichte.

Stationäres elektrisches Strömungsfeld

Analog zur Elektrostatik wird die Stromdichte $\vec{J}$ mit Hilfe des skalaren elektrischen Potentials Φ_e errechnet aus

$$\operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} \Phi_e = -q$$

mit der Stromergiebigkeit $q = \operatorname{div} \vec{J}$.

Stationäre Temperaturverteilung

Ein stationäres Temperaturfeld gehorcht der Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T = -w$$

mit der Temperatur T, der Wärmeleitfähigkeit λ und der Wärmequellendichte w. Die Wärmestromdichte $\vec{J}_w$ ergibt sich dann aus

$$\vec{J}_w = -\lambda \operatorname{grad} T \ .$$

Die Bestimmungsgleichungen, mit Ausnahme der Magnetostatik, haben den gleichen Aufbau, auch für die Temperaturverteilung. Es bietet sich daher an, diese Bestimmungsgleichung unabhängig von der physikalischen Bedeutung zu lösen.

Finite Differenzen (FD)

Beim Differenzenverfahren diskretisiert man das zu untersuchende Feldgebiet (Rechenbereich) mit drei Flächenscharen, die im allgemeinen durch die Koordinatenflächen von orthogonalen Koordinatensystemen gebildet werden.

Wahl des Rechenbereiches

Die Wahl des Rechenebreiches ist von außerordentlicher Bedeutung, da sie die Anzahl der Rechenpunkte (Unbekannte im Gleichungssystem), den Rechenaufwand und damit die Qualität der Feldberechnung bestimmt.

Unter allen Umständen sind Symmetrien auszunutzen. Dazu gehören auch wiederkehrende geometrische und magnetische Strukturen, wie sie z. B. bei elektrischen Maschinen anzutreffen sind, z. B. die Polteilung. Je nach *Randbedingung* (s. u.) erhält man die fehlenden Feldwerte durch einfache Spiegelung oder Spiegelung mit entgegengesetztem Vorzeichen der berechneten Felder an den Symmetrieflächen.

Ausdehnungen in das Unendliche müssen auf endliche Werte begrenzt werden. Durch Wahl der richtigen Randbedingungen und der richtigen Größe des Rechenbereiches lassen sich realistische Annahmen treffen.

Dreidimensionale Rechnungen vervielfachen den Rechenaufwand um die Anzahl der zweidimensionalen Ebenenen. Insofern sind 2D-Rechnungen den Vorzug zu geben, vor allem bei Abschätzungen oder für Feldrechnungen in Querschnitten langer Anordnungen, bei denen die Felder in den Endpartien eine untergeordnete Bedeutung spielen.

Feldlinienbilder sind nur bei 2D-, nicht bei 3D-Ergebnissen möglich.

Gitternetz

Die orthogonalen Flächenscharen zum Diskretisieren des Rechenbereiches werden durch ein zwei- bzw. dreidimensionales Gitternetz erzeugt, die sich in den *Gitterpunkten* P kreuzen (Abb. A.16). Benachbarte Gitterpunkte bilden *Elementarstrecken* S, *Elementarflächen* A und *Elementarquader* Q. Da innerhalb eines Elementarbereiches (Strecke, Fläche, Quader) die physikalischen Werte $(\mu, \kappa, \varepsilon)$ als konstant angenommen werden, folgt daraus, dass die Gitterlinien mit den Materialkanten zusammenfallen müssen. Mit entsprechendem Programmieraufwand ist es auch möglich, Materialkanten auf Raum- bzw. Flächendiagonalen legen zu können.

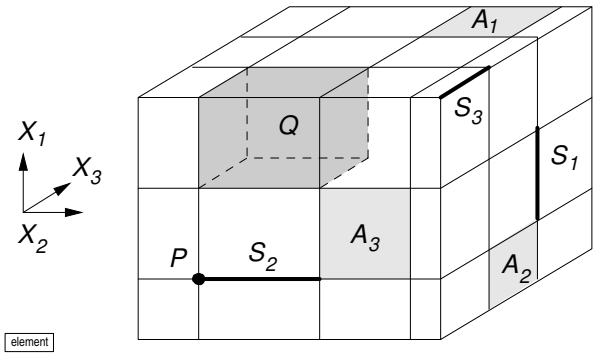


Abb. A.16: Elementarfiguren in einem dreidimensionalen Gitternetz

Vorteilhaft wird man das Koordinatensystem so wählen, dass sich die nachzubildende Struktur möglichst einfach darin beschreiben lässt, also z. B. Polar- oder Zylinderkoordinaten für rotierende Anordnungen.

Äquidistante Gitternetze vereinfachen den Lösungsaufwand des Gleichungssystems (s. u.). Andererseits erzeugt man dadurch Rechenpunkte in Bereichen, in denen das Feld nicht interessiert.

Durch variable Gitterabstände kann man das Gitternetz den Erfordernissen anpassen. Grundsätzlich sollte man sehr große und sehr kleine Gitterabstände nebeneinander vermeiden.

Randbedingungen

Der Rechenbereich wird bei zweidimensionaler Rechnung von 4 Rändern (Strecken), bei 3D-Rechnung von 6 Flächen begrenzt. Dem Rand kommen dabei zwei Bedeutungen zu:

- Er stellt eine endliche Begrenzung für eine unendliche Ausdehnung dar. In diesem Fall wird angenommen, dass das Feld am Rand verschwindend klein ist.
- Der Rand stellt eine Symmetrielinie/-fläche dar. Wahlweise kann man fordern, dass entweder die Normal- oder Tangentialkomponente des Feldvektors auf dem Rand stetig sein soll, d. h. auf beiden Seiten des Randes gleich.

Im allgemeinen kennt man folgende Randbedingungen (die Variable X stellt die Systemgröße dar):

$X = \text{const}$	Auf dem Rand herrscht überall das gleiche Potential X, die Äquipotentiallinien verlaufen parallel zum Rand (1. Randbedingung oder *Dirichlet'sche* Randbedingung).
$\partial X/\partial \mathrm{n} = \text{const}$	Die Äquipotentiallinien treten mit konstantem Winkel zur Normalenrichtung n aus, falls $\partial X/\partial \mathrm{n} = 0$ stehen die Äquipotentiallinien senkrecht auf dem Rand (2. Randbedingung oder *Neumannsche* Randbedingung).

Für gegenüberliegende Ränder (a, b) besteht die Möglichkeit, symmetrische oder antisymmetrische Felder zu definieren:

$X(a) = X(b)$	periodische Randbedingung, das Feld wiederholt sich am Rand b mit dem gleichen Verlauf (Vorzeichen) wie am Rand a. Beispiel: elektrische Maschinen mit 2 Polteilungen.
$X(a) = -X(b)$	antiperiodische Randbedingung, das Feld wiederholt sich am Rand b, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen wie am Rand a. Beispiel: elektrische Maschine mit 1 Polteilung.

☞ **Hinweis:** Je nach verwendetem Lösungssansatz haben die Randbedingungen unterschiedliche Bedeutungen, da die Systemgröße entweder das Skalarpotential Φ oder das Vektorpotential $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sein kann:

Randbedingung	Vektorpotential $\boldsymbol{\mathcal{A}}$	Skalarpotential Φ
$\dfrac{\partial X}{\partial \mathrm{n}} = 0$	B-Linien $\perp$ zum Rand	H- bzw. E-Linien $\parallel$ zum Rand
$X = 0$	B-Linien $\parallel$ zum Rand	H- bzw. E-Linien $\perp$ zum Rand

Materialbeschreibung

Den im Rechenbereich befindlichen Materialien können verschiedene Eigenschaften zugeordnet werden. Man unterscheidet im Prinzip folgende Materialarten:

eigentliches Material: Darunter fallen alle Werkstoffe, in denen Felder eindringen können. Für die Magnetostatik sind das alle Werkstoffe, auch Abschirmmaterial[1]. Für elektrostatische Rechnungen betrifft das nur die Isolierstoffe, da elektrisch leitende Materialien Potentiale annehmen können und im Innern feldfrei sind (siehe *Uneigentliches Material*). Die Materialeigenschaften können Stoffkonstanten ($\varepsilon, \kappa, \mu, \lambda$) sein oder in Form von Kennlinien (z. B. Magnetisierungskennlinie) vorliegen. Ebenfalls berücksichtigt werden müssen Lamellierungen von Werkstoffen (Blechung) mittels Füllfaktoren.

Uneigentliches Material: In uneigentlichen Werkstoffen können keine Felder berechnet werden. Die von ihnen belegten Teilbereiche werden von der Feldberechnung ausgeschlossen. Ihnen werden keine physikalischen Eigenschaften sondern Randbedingungen zugeordnet, die an der Oberfläche des Werkstoffes gelten. Im allgemeinen definiert man in der Elektrostatik Elektroden als uneigentliches Material und weist der Oberfläche ein Potential zu. Statt einer räumlichen Ausdehnung kann man auch den Gitterflächen, -linien und -punkten Potentiale zuweisen. Bei Temperaturberechnungen entsprechen den Potentialen die Temperaturen.

hartmagnetische Werkstoffe: Diese Werkstoffe liefern durch ihre Eigenschaften eine magnetische Anregung, die man als Polarisation bezeichnet. Diese Polarisation ist abhängig vom Herstellungsprozess (Vorzugsrichtung). Charakteristisch sind die Entmagnetisierungskennlinien $M = f(H)$.

Luft ist ein eigentliches Material.

Feldanregung

Bei elektrostatischen Rechnungen erfolgt die Anregung durch Vorgabe von Potentialen (siehe »Uneigentliches Material«) und Ladungen, bei Temperaturberechnungen durch Temperaturen und Wärmequellen, bei Strömungsfeldern durch Stromquellen. Magnetfelder werden durch

- hartmagnetische Werkstoffe (s. o.)
- Ströme

angeregt. Ströme können als dreidimensionale Leiterpolygone oder als »stromführende« Materialien definiert werden. Für die Feldrechnung werden die von den Strömen durchflossenen Elementarflächen bestimmt und ihnen die entsprechenden Stromdichten zugewiesen.

Herleitung des Gleichungssystems

Das Aufstellen des Gleichungssystems wird im folgenden anhand eines zweidimensionalen, kartesischen Koordinatensystems erläutert.

Durch die Diskretisierung ergeben sich Elementarbereiche, in denen die Materialeigenschaften (hier μ) als konstant angenommen werden (Abb. A.17).

Zur numerischen Lösung der Maxwellschen Gleichungen geht man von der integralen Schreibweise aus. Da für statische und niederfrequente Rechnungen der Verschiebungsstrom keinen Einfluß auf das elektromagnetische Feld hat, vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\oint_s \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_A \vec{J}\mathrm{d}\vec{A} \qquad \oint_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \vec{B} = \mu(H)\,\vec{H} \tag{A.1}$$

[1] da es kein reales Material mit $\mu \to \infty$ gibt

Der *Ansatz des Vektorpotentials* geht von der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes aus entsprechend Gleichung (A.1). Daraus folgt, dass die Normalkomponenten von $\vec{B}$ beiderseits benachbarter Elementarbereiche gleich sein müssen. Weiterhinhin bedeutet Gleichung (A.1), dass die Summe der magnetischen Flüsse in einem Elementarquader Null sein muss. Wegen der zweidimensionalen Betrachtungsweise ergibt sich damit (Abb. A.18)[2]

$$B_1 s_{41} + B_2 s_{12} - B_3 s_{23} - B_4 s_{34} = 0 \tag{A.2}$$

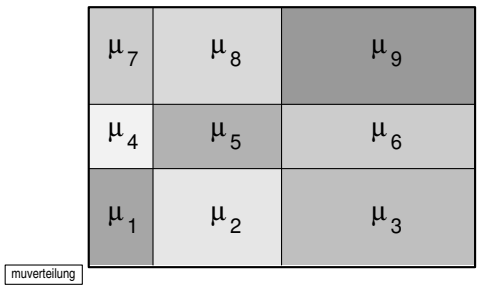


Abb. A.17: 2D-Beispiel: μ-Verteilung

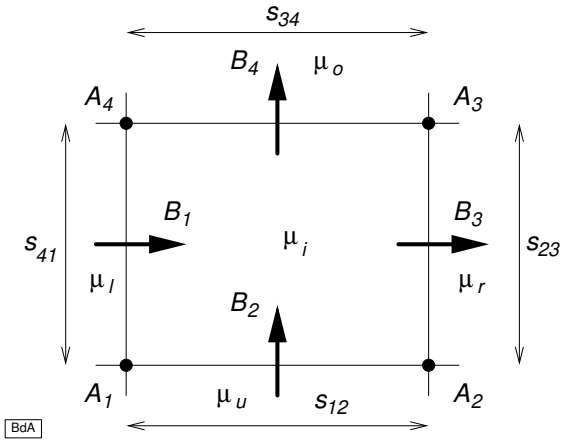


Abb. A.18: Auswertung $\oint_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0$

Bekanntlich kann man ein Vektorfeld mit Hilfe der Rotation eines zweiten Vektorfeldes beschreiben (siehe Abschnitt A.1.4). Daraus resultiert der Vektorpotentialansatz $\vec{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{A}}$ (siehe Abschnitt A.1.6). Für 2D Felder besitzt das Vektorpotential $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ nur eine Komponente $\mathcal{A}_z$ senkrecht zur Koordinatenebene, so dass man in diesem Fall das Vektorpotential wie eine skalare Größe $\mathcal{A}$ behandeln kann.

Für den dargestellten Elementarbereich ergeben sich damit folgende Definitionsgleichungen:

$$B_1 = \frac{\mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_1}{s_{41}} \qquad B_2 = -\frac{\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1}{s_{12}} \qquad B_3 = \frac{\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_2}{s_{23}} \qquad B_4 = -\frac{\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4}{s_{34}}\,. \tag{A.3}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (A.3) in Gleichung (A.2) erkennt man die Richtigkeit der Definitionsgleichungen.

Wendet man den Durchflutungssatz aus Gleichung (A.1) auf die vier benachbarten Elementarquader mit jeweils vier verschiedenen Strömen an, ergibt das Umlaufintegral (Abb. A.19):

$$B_3\left(\frac{\delta_1}{\mu_1} + \frac{\delta_2}{\mu_2}\right) + B_6\left(\frac{\delta_3}{\mu_2} + \frac{\delta_4}{\mu_3}\right) - B_5\left(\frac{\delta_5}{\mu_3} + \frac{\delta_6}{\mu_4}\right) - B_4\left(\frac{\delta_7}{\mu_4} + \frac{\delta_8}{\mu_1}\right) = \frac{1}{4}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \tag{A.4}$$

Ersetzt man in Gleichung (A.4) die magnetischen Induktionen durch die Vektorpotentiale nach Gleichung (A.3), erhält man eine Differenzengleichung, auf deren linken Seite die unbekannten Vektorpotentiale $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6$ und auf der rechten Seite die vom Integrationsweg eingeschlossenen Ströme stehen. Die Koeffizienten der Vektorpotentiale haben die Form $\left(\frac{\delta_i}{\mu_j} + \frac{\delta_k}{\mu_l}\right)/s_m$

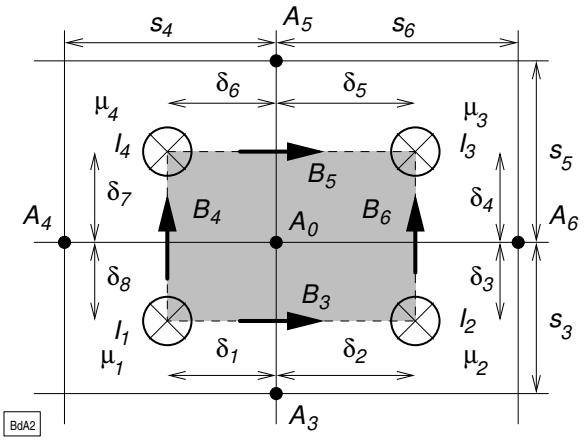


Abb. A.19: Durchflutungssatz beim Vektorpotential

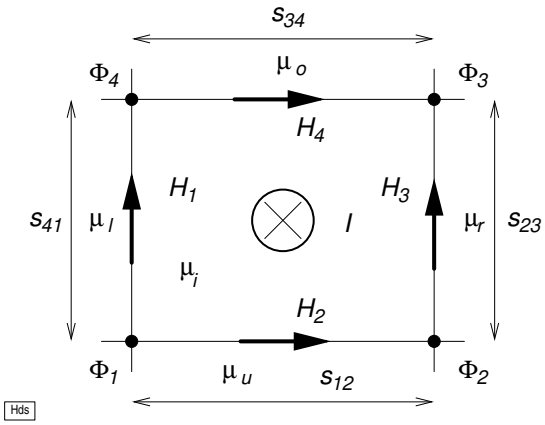


Abb. A.20: Durchflutungssatz beim Skalarpotential

und werden sehr klein, wenn Bereiche mit hoher Permeabilität μ (Eisenbereiche) kleine Gitterabstände (δ und s) aufweisen.

Der *Ansatz des Skalarpotentials* nutzt die Tatsache aus, dass die Tangentialkomponenten von $\vec{H}$ auf beiden Seiten der Trennfläche zwischen zwei Elementarbereichen gleich sind. Dies lässt sich aus dem Durchflutungssatz herleiten (Abb. A.20).

Analog zum Vektorpotential definiert man an den Gitterpunkten die skalaren Potentiale Φ_1 bis Φ_4. Da das $\vec{H}$-Feld im allgemeinen nicht wirbelfrei ist — im Gegensatz zur Elektrostatik, zum elektrischen Strömungsfeld bzw. Temperaturfeld (siehe Abschnitt A.1.6) — bedient man sich eines Tricks: man spaltet vom Feld $\vec{H}$ ein sog. *Hilfsfeld* $\vec{H}_\mathrm{i}$ ab, welches nur die Wirbel von $\vec{H}$ enthalten soll. Damit setzt sich das gesuchte Feld $\vec{H}$ aus zwei Anteilen zusammen:

$$\vec{H} = \vec{H}_\mathrm{i} + \vec{H}_\mathrm{u} \; . \tag{A.5}$$

Das Hilfsfeld $\vec{H}_\mathrm{i}$ lässt sich aus der Stromverteilung ohne Berücksichtigung der Materialien berechnen aus

$$\mathrm{rot}\, \vec{H}_\mathrm{i} = \vec{J} \; . \tag{A.6}$$

Da der zweite Anteil $\vec{H}_\mathrm{u}$ jetzt wirbelfrei ist, lässt er sich aus dem Gradienten von Φ berechnen:

$$\vec{H}_\mathrm{u} = -\mathrm{grad}\, \Phi \; .$$

Für das gezeigte 2D kartesische Koordinatensystem erhält man die Komponenten von $\vec{H}_\mathrm{u}$ aus den Gleichungen

$$H_\mathrm{u1} = \frac{(\Phi_1 - \Phi_4)}{s_{41}} \qquad H_\mathrm{u2} = \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)}{s_{12}} \qquad H_\mathrm{u3} = \frac{(\Phi_2 - \Phi_3)}{s_{23}} \qquad H_\mathrm{u4} = \frac{(\Phi_4 - \Phi_3)}{s_{34}} \; . \tag{A.7}$$

Die gesuchten Komponenten H_1 bis H_4 setzen sich nach Gleichung (A.5) aus den beiden Komponenten von H_i und H_u zusammen:

$$H_n = H_{\mathrm{i}n} + H_{\mathrm{u}n} \qquad 1 \le n \le 4 \; . \tag{A.8}$$

[2] In den Abbildungen wird das Vektorpotential $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ durch den Buchstaben A dargestellt.

Wendet man den Durchflutungssatz aus (A.1) auf einen stromführenden Teilbereich an, erhält man

$$\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{s} = \oint (\vec{H}_\mathrm{i} + \vec{H}_\mathrm{u})\mathrm{d}\vec{s} = \oint \vec{H}_\mathrm{i}\mathrm{d}\vec{s} = H_{i2}s_{12} + H_{i3}s_{23} - H_{i4}s_{34} - H_{i1}s_{41} = I\,.$$

($\oint \vec{H}_\mathrm{u}\mathrm{d}\vec{s} = 0$, da $\vec{H}_\mathrm{u}$ definitionsgemäß wirbelfrei ist.)

Die Quellenfreiheit des Feldes entsprechend Gleichung (A.1) lässt sich mit dem skalaren Potential folgendermaßen beschreiben (Abb. A.21):

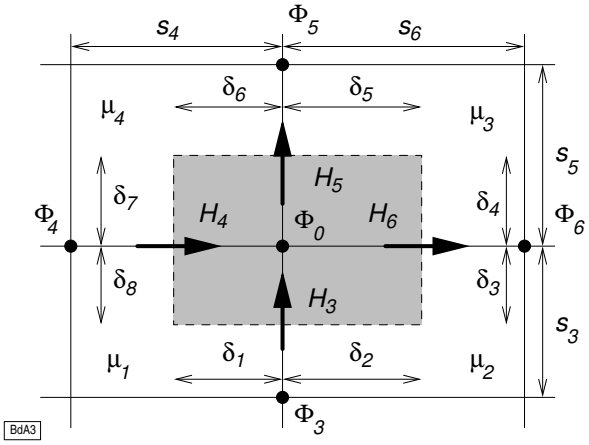


Abb. A.21: Quellenfreiheit beim skalaren Potential

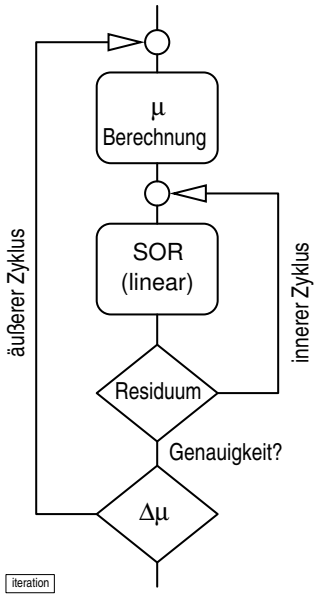


Abb. A.22: Iterationsablauf

$$H_4(\mu_1\delta_8 + \mu_4\delta_7) + H_3(\mu_1\delta_1 + \mu_2\delta_2) - H_6(\mu_2\delta_3 + \mu_3\delta_4) - H_5(\mu_3\delta_5 + \mu_4\delta_6) = 0\,.$$

Ersetzt man die Komponenten $\vec{H}_n$ durch die beiden Komponenten von $\vec{H}_\mathrm{u}$ und $\vec{H}_\mathrm{i}$ nach Gleichung (A.8), erhält man

$$H_{\mathrm{u}4}(\mu_1\delta_8 + \mu_4\delta_7) + H_{\mathrm{u}3}\ldots = -H_{\mathrm{i}4}(\mu_1\delta_8 + \mu_4\delta_7) - H_{\mathrm{i}3}\ldots\,.$$

Zusammen mit Gleichung (A.7) ergibt sich daraus die zu lösende Differenzengleichung, auf deren linken Seite die unbekannten Skalarpotentiale $\Phi_0, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6$ und auf der rechten Seite die Komponenten des bekannten Hilfsfeldes $\vec{H}_i$ entsprechend der Vektorgleichungen (A.6) stehen. Die Koeffizienten der Skalarpotentiale haben die allgemeine Form $(\mu_i\delta_j + \mu_k\delta_l)/s_m$, d. h. die Koeffizienten werden sehr klein sobald die Gitterabstände (δ und μ) in Luft ($\mu = \mu_0$) sehr klein sind.

Der *Skalarpotentialansatz* eignet sich ebenfalls zur Berechnung wirbelfreier Felder (Elektrostatik, el. Strömungsfeld, Temperaturfeld). Die Herleitung des Gleichungssystems vereinfacht sich beträchtlich, da kein Hilfsfeld berechnet werden muss.

Das Gleichungssystem kann für den *Skalarpotentialansatz* auch im dreidimensionalen Koordinatensystemen hergeleitet werden. Die Differenzengleichungen müssen dann die Potentiale Φ_1 und Φ_2 des vorderen und hinteren Gitterpunktes zu Φ_0 berücksichtigen, d. h. die Differenzengleichung erhält zwei weitere unbekannte Potentiale.

Eine Erweiterung des *Vektorpotentialansatzes* auf dreidimensionale Geometrien führt auf ein kompliziertes Gleichungssystem gekoppelter Differentialgleichungen und ist nur mit Einschränkungen numerisch lösbar.

Lösung des Gleichungssystems

Die Differenzengleichungen bilden ein Gleichungssystem der Form

$$\boldsymbol{A}\ \vec{X} = \vec{C}\ . \tag{A.9}$$

Der Lösungsvektor $\vec{X}$ besteht aus N unbekannten Potentialen, je nach Lösungsansatz den Skalarpotentialen Φ oder den Vektorpotentialen $\mathcal{A}$. Die $N \times N$-Matrix $\boldsymbol{A}$ enthält die Koeffizienten und $\vec{C}$ die Anregungen (Stromdichten, etc.). $\boldsymbol{A}$ und $\vec{C}$ enthalten außerdem die Materialeigenschaften $(\varepsilon, \mu, \kappa, \lambda)$. Sind diese feldabhängig, z. B. $\mu = \mu(H)$ oder $\lambda = \lambda(T)$, handelt es sich um ein nichtlineares Gleichungssystem.

Jede Gleichung stellt eine Zeile in der Matrix $\boldsymbol{A}$ dar und verknüpft das Potential eines Gitterpunktes mit den Potentialen der Nachbarpunkte, also 4 Punkte bei 2D-, 6 Punkte bei 3D-Geometrien. Entsprechend sind in jeder Matrixzeile nur 4 bzw. 6 Koeffizienten $\neq$ Null. Man bezeichnet eine solche Matrix als *schwach besetzt*. Weiterhin hat sie die Eigenschaft, *schwach diagonal dominant* und, falls das Gitternetz nicht in Teilbereiche unterteilt ist, auch *symmetrisch* zu sein.

Zur Lösung existieren zwei grundlegende Verfahren:

Die *direkten Verfahren* liefern die Lösung durch Anwenden eines aus endlich vielen Schritten bestehenden Algorithmus. Zu ihnen gehört z. B. die Cramer'sche Regel, der Gauss'sche Algorithmus und das Choleski-Verfahren. Die exakte Lösung wird nur erhalten, wenn man zur Darstellung von Zahlen unendlich viele Dezimalstellen zur Verfügung hat. Da dies nie der Fall ist, muss dem bei jedem Rechenschritt auftretende Rundungsfehler und seiner Fortpflanzung während der folgenden Rechenoperationen besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Unter Umständen kann eine geforderte Genauigkeit überhaupt nicht erreicht werden, in ungünstig gelagerten Fällen ist das Endergebnis so verfälscht, dass es mit der gesuchten Lösung nichts mehr zu tun hat.

Zwar lassen sich direkte Verfahren einfach handhaben, aber ihr Speicher- und Rechenzeitbedarf, vor allem bei großen Feldproblemen, ist eher nachteilig. Der Rechenaufwand steigt mit N^2. Beim vorzeitigen Abbruch der Berechnung sind alle Ergebnisse unbrauchbar.

Bei *iterativen Verfahren* wird ein meist sehr einfacher Algorithmus wiederholt auf die bereits errechnete Näherung angewendet. Ist das Iterationsverfahren konvergent, so strebt der Näherungsvektor $\vec{X}^{(n)}$ für $n \to \infty$ dem Lösungsvektor zu. Rundungsfehler brauchen bei konvergierenden Verfahren nicht berücksichtigt zu werden, da sie während der Iteration ebenso abgebaut werden, wie die zu Beginn der Iteration vorhandenen Abweichungen.

Vor allem beim Lösen großer Gleichungssysteme erweisen sich die iterativen Verfahren besonders vorteilhaft, da sie einfacher zu programmieren sind, im allgemeinen mit weniger Speicherplatz auskommen und der Iterationsprozess jederzeit abgebrochen werden kann, wenn die geforderte Genauigkeit erreicht ist. Beim vorzeitigen Abbruch stehen immer noch die Näherungen des letzten Iterationsschrittes zur Verfügung. Der Rechenaufwand steigt mit $N^{1.5}$ für 2D-, mit $N^{1.33}$ für 3D-Geometrien.

Zu den bekanntesten Iterationsverfahren gehören die Jacobi-Iteration (Gesamtschrittverfahren) und das Gauss-Seidel-Verfahren (Einzelschritt).

Das *SOR-Verfahren* verwendet die Gauss-Seidel Methode, aber extrapoliert die errechnete Näherung mit dem sog. *Iterationsparameter* ω, bevor sie im nächsten Iterationsschritt wieder eingesetzt wird (SOR=*successive overrelaxation*). Das SOR-Verfahren konvergiert für $1 < \omega < 2$ und divergiert für $\omega \leq 1$ und $\omega \geq 2$. Für ω lassen sich willkürliche Werte einsetzen, der optimale Wert, bei dem das SOR-Verfahren am schnellsten konvergiert, lässt sich in der Praxis ebenfalls nur iterativ berechnen und liegt etwa im Bereich $1.95 < \omega < 1.99$.

☞**Hinweis**: Der optimale Iterationsparameter ω_{opt} hängt stark von den Größenunterschieden der Gleichungskoeffizienten ab. Gute Konvergenz erreicht man, wenn die Koeffizienten die gleiche Größenordnung haben.

Sind die Materialeigenschaften $(\mu, \kappa, \varepsilon, \lambda)$ konstant, handelt es sich bei Gleichung (A.9) um ein *lineares Gleichungssystem*. Der Lösungsvektor $\vec{X}$ enthält die gesuchten Gitterpotentiale.

Im Falle nicht konstanter Materialeigenschaften, z. B. wenn eine Magnetisierungskennlinie vorliegt, sind die Stoffgrößen feldabhängig, das Gleichungssystem ist *nichtlinear*. Mit sog. Anfangswerten der Stoffgrößen (hier als Beispiel μ) wird das Gleichungssystem zuerst linear mit geringer Genauigkeit gelöst (innerer Zyklus), der Lösungsvektor enthält eine erste Näherung für das Feld (Abb. A.22). Daraus werden die Stoffgrößen anhand der Kennlinien neu berechnet und die ganze Iteration wiederholt (äußerer Zyklus). Erst wenn die mittleren Änderungen der Stoffgrößen unter einer geforderten Abbruchsschranke liegen, wird das Gleichungssystem mit der gewünschten Genauigkeit gelöst (letzter äußerer Zyklus). Als Kriterium für die Genauigkeit dienen

- für die äußeren Zyklen die mittlere Änderungen der Stoffgrößen (z. B. $\Delta\mu$)
- für die inneren Zyklen die Summe der Änderungen des Lösungsvektors $\vec{X}$ (Residuum).

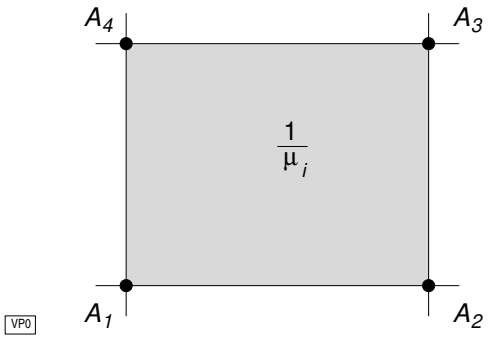
☞ **Hinweis:** Für die Quellenfreiheit von $\vec{B}$ ist die Genauigkeit der inneren Zyklen (Residuum) ausschlaggebend!

Auswertung der Ergebnisse

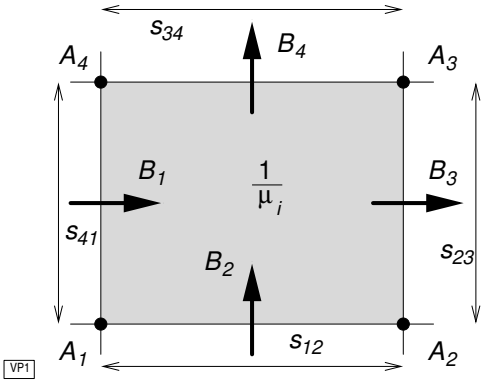
Bei der Auswertung der Ergebnisse ist darauf zu achten, welchem Geometrieelement diese Größe zugewiesen ist.

Mit dem Lösungsvektor $\vec{X}$ sind die Potentiale an den Gitterpunkten **P** bekannt (primäre Größe). Aus diesen Potentialen lassen sich, entsprechend der Herleitung der Differenzengleichungen, die weiteren Auswertegrößen bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass diese sekundären Größen bestimmten Geometrieelementen zugeordnet sind. Die folgende Übersicht zeigt die Berechnung einiger sekundärer Größen am Beispiel der Magnetostatik (2D) und deren Zuordnung zu den Elementarquadern **Q**, Elementarstrecken zwischen den Gitterpunkten **S** oder den Elementarflächen **A** (bei 2D senkrecht zu den Elementarstrecken).

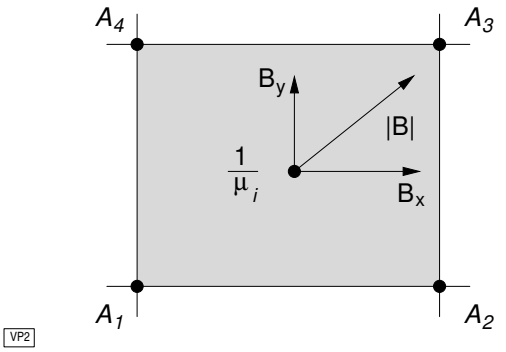
Systemvariable: Vektorpotential $\mathcal{A}_z \longrightarrow$ **(P)**
Materialeigenschaften: $\mu, \kappa, \varepsilon, \lambda \longrightarrow$ **(Q)**



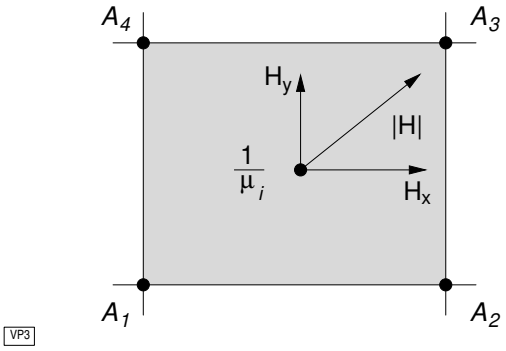
$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_1}{s_{41}} \\ B_2 &= -\frac{\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1}{s_{12}} \\ B_3 &= \frac{\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_2}{s_{23}} \\ B_4 &= -\frac{\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4}{s_{34}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textbf{(A)}$$



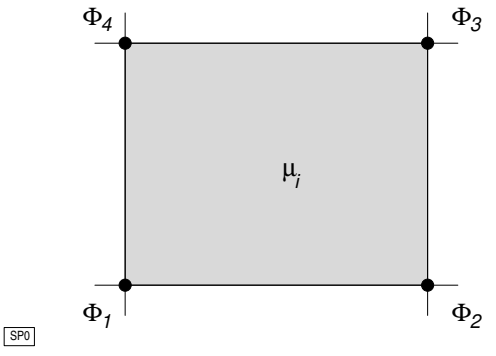
$$\left.\begin{aligned} B_y &= \frac{1}{2}(B_2 + B_4) \\ B_x &= \frac{1}{2}(B_1 + B_3) \\ |B| &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textbf{(Q)}$$



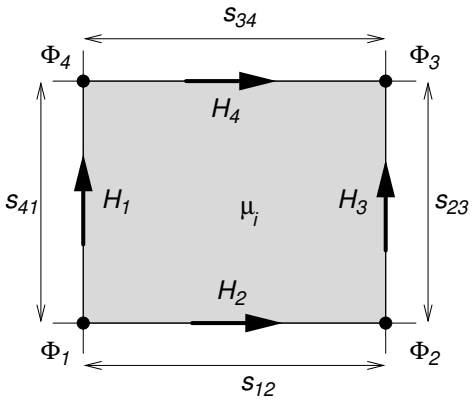
$$\left.\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{\mu} B_x \\ H_y &= \frac{1}{\mu} B_y \\ |H| &= \sqrt{H_x^2 + H_y^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textbf{(Q)}$$



Systemvariable:
Skalarpotential $\Phi(\Phi_m, \Phi_e, T) \longrightarrow$ **(P)**
Materialeigenschaften: $\mu, \kappa, \varepsilon, \lambda \longrightarrow$ **(Q)**

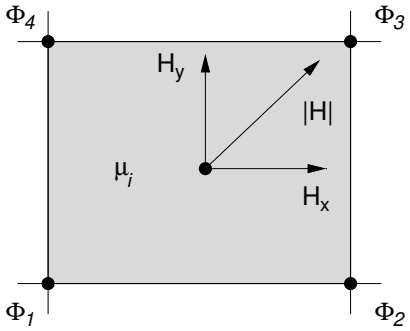


$$\left.\begin{aligned} H_1 &= H_{\mathrm{i}1} + \frac{(\Phi_1 - \Phi_4)}{s_{41}} \\ H_2 &= H_{\mathrm{i}2} + \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)}{s_{12}} \\ H_3 &= H_{\mathrm{i}3} + \frac{(\Phi_2 - \Phi_3)}{s_{23}} \\ H_4 &= H_{\mathrm{i}4} + \frac{(\Phi_4 - \Phi_3)}{s_{34}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textbf{(S)}$$



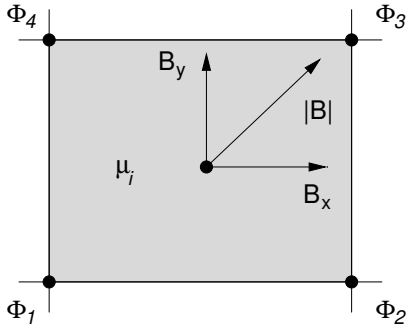
SP1

$$\left.\begin{aligned} H_y &= \frac{1}{2}(H_1 + H_3) \\ H_x &= \frac{1}{2}(H_2 + H_4) \\ |H| &= \sqrt{H_x^2 + H_y^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textbf{(Q)}$$



SP2

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \mu H_x \\ B_y &= \mu H_y \\ |B| &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textbf{(Q)}$$



SP3

Wie man sieht, sind die sekundären Feldgrößen nur exakt definiert an bestimmten Geometrieelementen. Bei der Auswertung der Ergebnisse ist dies unbedingt zu beachten! Mit einigen Überlegungen lassen sich einige Feldgrößen auch an anderen Stellen exakt berechnen.

Beispiel: Zur Berechnung von Kräften an den Elementarflächen, also zwischen zwei verschiedenen Materialien, kann man den sog. *Maxwellschen Spannungstensor* verwenden. Diese Methode liefert nur dann exakte Grenzflächenkräfte, wenn die Normalkomponente B_{n} und Tangentialkomponente H_{t} an diesen Flächen bekannt sind. Der Skalarpotentialansatz liefert nur H_{t} exakt, B ist quaderbezogen. Beim Vektorpotentialansatz wird B_{n} exakt an den Flächen berechnet, dafür ist H nur im Innern des Quaders bekannt. Rechnet man die Skalarpotentiale in Vektorpotentiale um (oder umgekehrt), erhält man die fehlenden Größen.

Feldlinienbilder lassen sich am einfachsten mit den Vektorpotentialen zeichnen. Die B-Linien stellen definitionsgemäß Linien gleichen Vektorpotentials dar.

Finite Elemente (FE)

Das finite Differenzenverfahren arbeitet mit einem orthogonalen Gitternetz, an den Gitterpunkten stehen die Gitterlinien bzw. -flächen senkrecht aufeinander. Da die Materialkonturen auf Gitterlinien liegen müssen[3], ist die Modellierungsmöglichkeit kompliziter Strukturen u. U. sehr aufwendig.

Die Methode der finiten Elemente vermeidet diesen Umstand, in dem es den zu untersuchenden Bereich mit einem Gitternetz aus beliebigen Dreiecken verwendet. Jedes Dreieck darf jedoch nur mit einem Material belegt sein. Durch die Unterteilung in Dreiecke lassen sich nicht nur beliebige Materialkonturen nachbilden, sondern man hat auch die Möglichkeit, durch Verwendung von kleineren und größeren Dreiecken die Genauigkeit der Berechnung den Erfordernissen anzupassen.

Es lässt sich zeigen, dass sich die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen auf ein *Variationsproblem* zurückführen lässt, die identisch ist mit der direkten Lösung der Feldgleichungen. Dazu muss in dem Ausdruck

$$S = \int_R \left(\int_0^B \frac{1}{\mu}\, b \,\mathrm{d}b - \vec{J}\boldsymbol{\mathcal{A}} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

das Vektorpotential $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ so bestimmt werden, dass das Integral einen minimalen Wert annimmt.

Das Diskretisierungsverfahren besteht aus folgenden Schritten:

- Das o. .a. Integral wird durch eine endliche Summe über die Beiträge aller Dreieckselemente approximiert.
- Die Systemvariablen sind die Vektorpotentiale an den Dreieckspunkten. In der Summe treten diese Größen als Unbekannte auf. Wenn die Summe zu einem Minimum werden soll, so müssen sämtliche partiellen Ableitungen $\partial S/\mathcal{A}_k$ verschwinden. Es ergeben sich dann genau so viele lineare Gleichungen wie Unbekannte vorhanden sind.

Eine ausführliche Herleitung der Differenzengleichungen findet der interessierte Leser in [4, Kap. 3.4].

»Ein besonderer Vorteil der Verwendung der finiten Elemente wurde bereits {…} erwähnt: man hat größere Freiheit bei der Aufteilung des Rechenbereichs und kann das Netz in idealer Weise an die vorgegebenen Material- und Stromdichteverteilung anpassen. Die Anzahl der Gitterpunkte und damit der Unbekannten ist wesentlich geringer.{…}

Weiterhin ist zu erwähnen, dass der hier beschriebene Lösungsweg nur auf zweidimensionale Fälle anwendbar ist, bei denen das Vektorpotential nur eine von Null verschiedene Komponente hat. Eine Erweiterung auf dreidimensionale Geometrien ist nicht nur mit den bereits bekannten Schwierigkeiten behaftet, es treten darüber hinaus auch für den Anwender besondere Probleme auf, da die Unterteilung eines dreidimensionalen Bereichs in Tetraeder eine Aufgabe ist, die große Anforderungen an das räumliche Vorstellungsvermögen stellt.«

[3] Es gibt auch die Möglichkeit, Diagonalen in den Elementarbereichen zuzulassen.

A.2 Auslegung von Spulen

Hat man den Durchflutungsbedarf eines magnetischen Kreises ermittelt, steht man vor dem Problem der Spulen-/wicklungsauslegung. Die erforderliche Durchflutung Θ wird aus 2 Parametern gebildet, dem Produkt aus Stromstärke I und Windungszahl N. Bei Vorgabe einer dieser Größen liegt die andere Größe fest. Aufgabe des Konstrukteurs ist es, beide Parameter so zu bestimmen, dass die Spule möglichst ohne Vorwiderstand an eine vorgegebene Betriebsspannung angeschlossen werden kann und sich ein Strom einstellt, der mit der Windungszahl die gewünschte Durchflutung aufbringt.

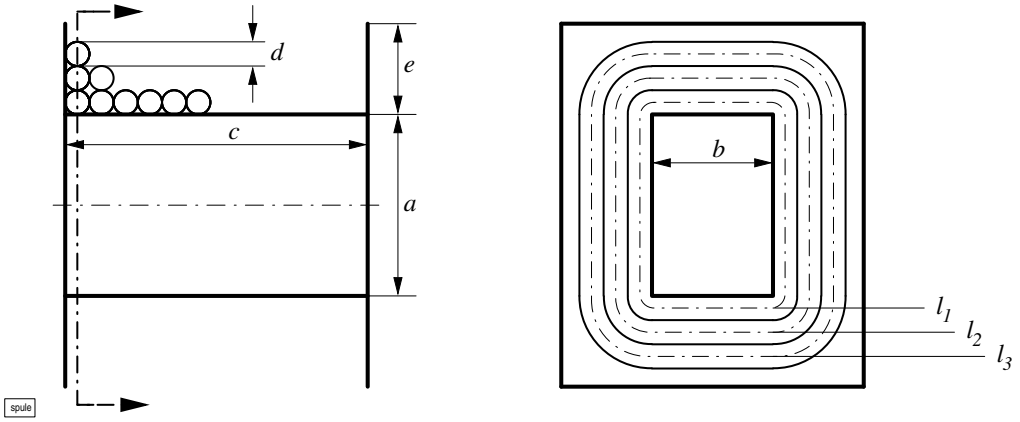


Abb. A.23: Abmessungen der im Beispiel verwendeten Spule

Die folgende Herleitung berechnet den Gesamtwiderstand und die maximal erzielbare Durchflutung einer Spule (Abb. A.23) in Abhängigkeit vom Drahtdurchmesser mit folgenden Vereinfachungen:

- es wird ein Runddraht angenommen;
- der Kupferfüllfaktor wird mit 1 angenommen;
- eine Lagenisolation wird nicht berücksichtigt;
- die Abmessungen $e \cdot c$ stellen das maximal verfügbare Wickelfenster auf allen vier Seiten der Spule dar.

Die Vereinfachungen werden gemacht, damit sich die Berechnung möglichst einfach nachvollziehen lässt. Durch entsprechende Zusatzfaktoren kann man die Vereinfachungen aufheben.

Aus den Abmessungen des Wickelfensters e und c und dem gewählten Drahtdurchmesser d (einschließlich Drahtisolation) erhält man die maximale Anzahl der Lagen N_l und Windungen pro Lage N_w:

$$N_l = \text{int}\left(\frac{e}{d}\right) \qquad \text{abrunden auf die nächste Ganzzahl}$$
$$N_w = \text{int}\left(\frac{c}{d}\right) \qquad \text{ebenfalls}$$
$$N_g = N_l \cdot N_w$$

mit der Gesamtwindungszahl N_g, die in dem Wickelfenster untergebracht werden kann.

Die mittlere Länge l_i aller Windungen ergibt sich aus den Abmessungen des Spulenkörpers unter Berücksichtigung des Drahtdurchmessers d. Für die ersten drei (untersten) Lagen ergibt sich z. B.

$$\begin{aligned} l_1 &= N_w(2a + 2b + 4d) \\ l_2 &= N_w(2a + 2b + 4d + 8d) \\ l_3 &= N_w(2a + 2b + 4d + 16d) \ . \end{aligned}$$

Die Längen jeder Lage bilden eine arithmetische Reihe, deren Gesamtsumme die Gesamtlänge l_g des Drahtes darstellt und man durch folgende Formel ermitteln kann:

$$l_g = \sum_{i=1}^{N_l} l_i = N_g \left[2a + 2b + 4d + 4d\ (N_l - 1)\right] \ .$$

Für die Strombelastbarkeit des Kupferdrahtes muss die maximale Stromdichte $J_{\max}$ vorgegeben werden, die sich nach den Abmessungen bzw. Kühlverhältnissen richtet. Zusammen mit dem Drahtdurchmesser lässt sich daraus der maximale Spulenstrom bestimmen:

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{Cu}} &= \frac{\pi \cdot d^2}{4} \\ I_{\max} &= J_{\max} \cdot A_{\mathrm{Cu}} \ , \end{aligned}$$

wobei man die Drahtisolation z. B. durch eine verringerte Stromdichte berücksichtigen kann. Der Gesamtwiderstand der Spule beläuft sich damit auf

$$R_g = \frac{l_g}{\kappa \cdot A_{\mathrm{Cu}}} \ .$$

Die maximale Durchflutung, die im Dauerbetrieb erzielt werden kann, ergibt sich zu

$$\Theta_{\max} = V_{\max} = I_{\max} \cdot N_g$$

und die maximale Betriebsspannung mit

$$U_{\max} = I_{\max} \cdot R_g \ .$$

Zahlenbeispiel

$$a = b = 20\,\mathrm{mm}, \quad e = 12\,\mathrm{mm}, \quad c = 40\,\mathrm{mm}, \quad J_{\max} = 4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}, \quad \kappa = 56\,\frac{\mathrm{m}}{\Omega\mathrm{mm}^2}$$
$$U_N = 24\,\mathrm{V}, \quad \theta = 1200\,\mathrm{A}$$

Abb. A.24 zeigt die nach dem o. a. Formelplan berechneten Maximaldurchflutungen $V_{\max}$ und Betriebsspannungen $U_{\max}$ für Drahtstärken von 0.2 bis 1 mm mit einer Abstufung von 0.01 mm. Die unregelmäßigen Schwankungen von $V_{\max}$ rühren von den Ganzzahldivisionen für die Lagenzahl und die Windungszahlen pro Lage her. Wird der Wickelraum voll ausgenutzt (bei der Ganzzahldivision bleibt kein Rest), sind Maximaldurchflutungen von über 1500 A möglich. Mit zunehmendem Drahtdurchmesser werden die Schwankungen größer, da auch der Divisionsrest größer werden kann.

Mit Hilfe der beiden Größen $V_{\max}$ und $U_{\max}$ kann man den benötigten Drahtdurchmesser noch nicht direkt ablesen, da sich die Betriebsspannungen auf die Maximaldurchflutungen beziehen.

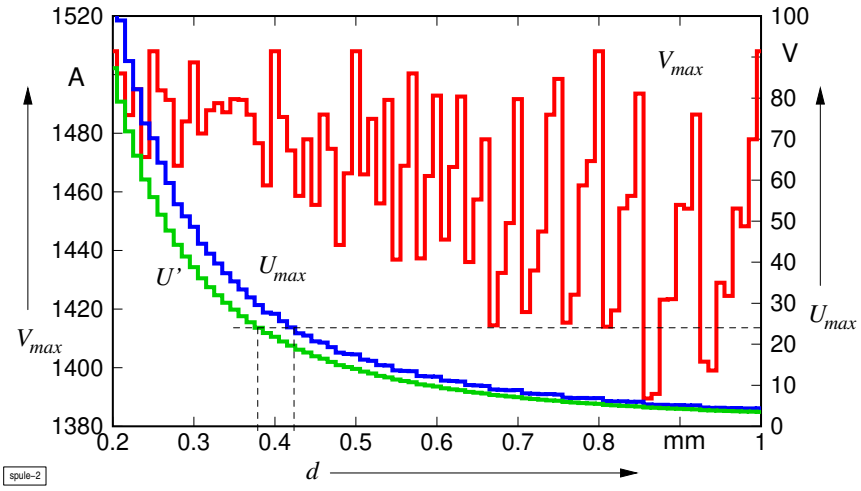


Abb. A.24: Max. Durchflutungen und Spannungen für Drahtdurchmesser $0.2 < d < 1.0\,\text{mm}$

Für $d = 0.42\,\text{mm}$ ergibt sich eine max. Betriebsspannung von etwa 24 V, es stellt sich aber eine zu hohe Durchflutung von ca. 1474 A ein. Um bei diesem Drahtdurchmesser auf die geforderten 1200 A zu kommen, müsste die Spannung auf 19.6 V abgesenkt werden:

$$U' = \frac{\theta_{\text{soll}}}{\theta_{\text{max}}}\, U_{\text{max}} = \frac{1200\,\text{A}}{1474\,\text{A}}\, 24.1\,\text{V} = 19.6\,\text{V}\ .$$

Zeichnet man statt dessen die Kurve $U' = f(d)$, kann man direkt den erforderlichen Drahtdurchmesser von 0.38 mm ablesen.

Kontrollrechnung

Mit dem gefunden Drahtdurchmesser wird der Formelplan erneut durchgerechnet mit folgenden Ergebnissen:

```
Drahtdurchmesser:   0.38
Anzahl der Lagen:   31
Windungen/Lage:     105
Gesamtwindungszahl: 3255
max. Stromdichte:   4.0
Drahtquerschnitt:   0.113411494794592
max. Spulenstrom:   0.453645979178366
Gesamtwiderstand R: 65.150803394158
max. Spannung Umax: 29.5554
max. AW-Zahl in A:  1476.61766222558
Sollspanung in V:   24
Soll AW-Zahl in A:  1200
Nennstrom in A:     0.368376117402599
Ist-AW-Zahl in A:   1199.06426214546
```

Bei einer Betriebsspannung von 24 V fließt ein Strom von 0.368 A, es stellt sich eine Durchflutung von 1199 A ein.

A.3 Das Drehmoment in elektrischen Maschinen

A.3.1 Einleitung

[4] Die wichtigste Anwendung des elektrischen Stromes im Magnetfeld ist die elektrische Maschine, je nach Richtung der Energiewandlung als Motor oder Generator. Das erforderliche Drehmoment ergibt sich aus den tangentialen Kräften, die auf die rotierenden Teile in einem bestimmten Abstand von der Drehachse angreifen. Die Bestimmung des Drehmomentes lässt sich somit auf die Ermittlung dieser Kräfte zurückführen.

A.3.2 Kraftwirkung auf bewegte Ladungen

Herleitung der Kraftgleichungen

Auf ein Elektron im luftleeren Raum mit der Ladung q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ wirkt die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Befindet sich die Ladung in einem elektrischen Leiter, so wird diese Kraft auf den Leiter ausgeübt (Abbildung A.25). Für die Kraft auf einen Leiter der Länge $\vec{l}$ ergibt sich dann:

$$\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B} \qquad \text{mit} \quad [F] = 1\,\frac{\mathrm{AmVs}}{\mathrm{m^2}} = 1\,\frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{N}\,.$$

Für eine stromduchflossene Leiterschleife mit der Länge l und der Breite b ergibt sich dann das

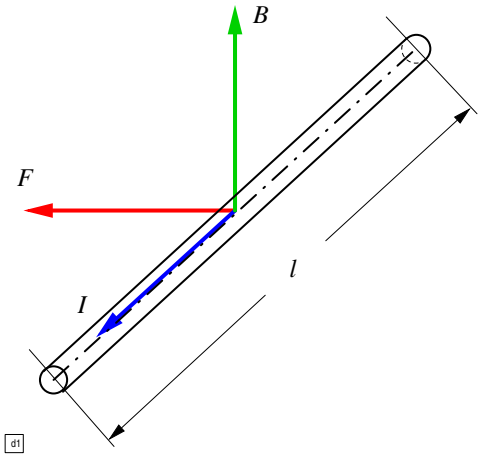


Abb. A.25: Stromführender Leiter

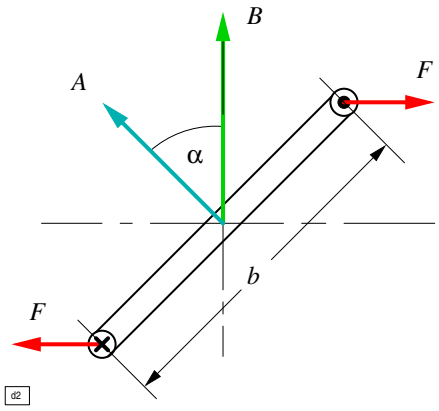


Abb. A.26: Leiterschleife

Drehmoment in einem homogenen Magnetfeld entsprechend Abbildung A.26 zu

$$M_d = 2\,F\,\frac{b}{2}\,\sin\alpha = i \cdot l \cdot b \cdot B \cdot \sin\alpha$$

oder in der Vektorschreibweise

$$\vec{M}_d = i\,\vec{A} \times \vec{B} \tag{A.10}$$

mit $\vec{A}$ als Flächenvektor der Fläche $l \cdot b$ und dem Winkel α zwischen dem Flächenvektor $\vec{A}$ und der Richtung von $\vec{B}$.

[4] Vortrag an der FH Giessen–Friedberg, gehalten am 19.11.91

Anwendungen

Anwendungen, bei denen die oben hergeleitete Kraftwirkung ausschlaggebend sind, zeichnen sich dadurch aus, dass die stromführenden Leiter entweder als Luft- oder Oberflächenspulen ausgeführt sind.

Luftspulen in Magnetfeldern treten z. B. bei Lautsprechern auf. Hierbei erzeugen die Kräfte translatorische Bewegungen.

Je nach Richtung von i und $\vec{B}$ kann die Umwandlung in Drehmomente auf zwei verschiedene Arten erzeugt werden:

1. $\vec{B}$ parallel, i senkrecht zur Drehachse: Barlowsches Rad, Scheibenläufer (Abbildung A.27)
2. $\vec{B}$ senkrecht, i parallel zur Drehachse: Drehspulmessgerät, Zugriffsmechanismus eines Festplattenspeichers (Abbildung A.28).

In allen Fällen dient in den magnetischen Kreis eingebrachtes Eisen zur Homogenisierung des Luftspalts und Verringerung des magnetischen Widerstands des Magnetkreises.

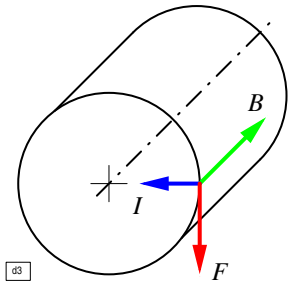


Abb. A.27: Verlauf von I radial

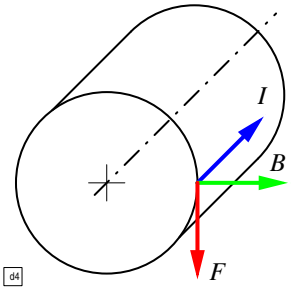


Abb. A.28: …oder axial

A.3.3 Kräfte auf ferromagnetisches Material

Will man den Luftspalt verringern, müssen die Leiter in Nuten gelegt werden. Da Eisen wegen seiner hohen Permeabilität den magnetischen Fluss besser führt als Luft, wird das Feld in den Nuten geringer. Wendet man die oben hergeleiteten Kraftgleichungen auf diese Anordnungen an, so wird auch die Kraft geringer. Aber in der Praxis zeigt sich der entgegengesetzte Effekt: das Drehmoment nimmt sogar noch etwas zu. Daraus kann man folgern, dass neben den Kräften auf stromführenden Leitern auch Kräfte auf Eisenkörper wirken müssen. Die Natur unterscheidet jedoch nicht zwischen Leiter- und Elementarströmen. Alle Kräfte werden hervorgerufen durch atomare Elektronenströme (Kreisströme), die wiederum magnetische Momente erzeugen (Bahnmoment, Spinmoment).

Für die Kraftberechnung auf ferromagnetische Materialien sind verschiedene Methoden entwickelt worden. Ein Literaturstudium zeigt, dass sich seit Generationen Wissenschaftler Gedanken über dieses Thema gemacht haben, um zufriedenstellende Erklärungen und Berechnungsmethoden zu finden.

Im Folgenden werden die wesentlichsten Verfahren beschrieben.

Ersatzströme

Bei der Methode der Ersatzströme wird das magnetische Material in einem Volumenelement ΔV entfernt und durch eine Spule ersetzt, deren Achse mit der vorherigen Magnetisierung $\vec{M}$ zusammenfällt. Diese Spule wird mit einem Ersatzstrom $\vec{J}_e$ so erregt, dass sich die gleiche Magnetisierung einstellt wie vorher (Abbildung A.29). Die Kraftdichte $\vec{f}$ auf die Ersatzströme im magnetischen Feld $\vec{B}$ erhält man aus

$$\vec{f} = \vec{J}_e \times \vec{B} \tag{A.11}$$

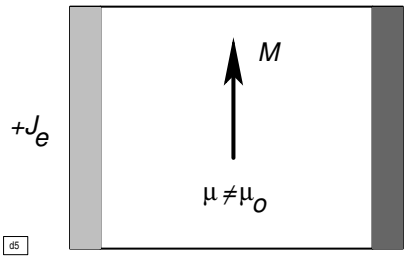


Abb. A.29: Ersatzströme

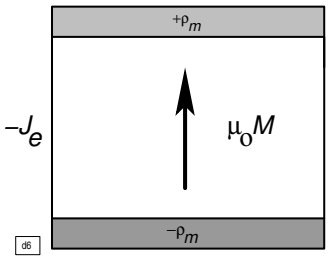


Abb. A.30: Ersatzladungen

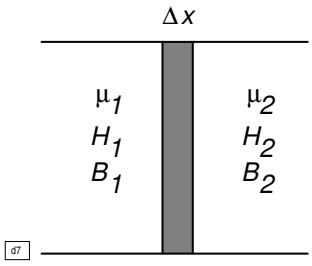


Abb. A.31: Energiesatz

Ersatzladungen

Bei der Methode der magnetischen Ersatzladungen nimmt man an, dass die magnetische Polarisation $\mu_0 M$ durch sog. magnetische Ladungen ρ_m, analog zum elektrostatischen Feld, hervorgerufen wird, die sich als dünne Schicht am oberen und unteren Ende des Volumenelementes, senkrecht zur Polarisationsrichtung befinden (magnetischer Dipol, Abbildung A.30). Die Kräfte auf diese »magnetischen Ladungen« lassen sich wie im elektrostatischen Fall herleiten.

$$\vec{f} = \rho_m \vec{H}$$

Energiesatz

Die Methode des Energiesatzes ist wohl die bekannteste. Dabei wird die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Materialien μ_1 und μ_2 um den Weg Δx verschoben, und zwar von Material 1 nach Material 2. In dem Volumen mit der Dicke Δx werden dadurch die Stoff- und Feldwerte von μ_2, H_2, B_2 nach μ_1, H_1, B_1 geändert (Abbildung A.31). Die Bewegung der Grenzfläche lässt sich in zwei Anteile zerlegen:

- parallel zum Feld (magnetischer Längszug); der Fluss durch die Grenzfläche bleibt konstant, die notwendige mechanische Arbeit muss durch die magnetische Feldenergie kompensiert werden. Wird mechanische Arbeit zugeführt, nimmt die magnetische Energie zu.
- senkrecht zum Feld (magnetischer Querdruck); der Fluss durch die Grenzfläche ändert sich. Es wird eine Spannung induziert, die eine Stromänderung und damit eine Feldänderung verursacht und durch elektrische Arbeit von außen kompensiert werden muss. Die zugeführte mechanische Arbeit wird in elektrische Arbeit umgewandelt.

Bei hartmagnetischen Stoffen muss die Vorgeschichte berücksichtigt werden.

Vergleich der Methoden

Vergleicht man die Formeln aller drei Verfahren miteinander, so sieht man, dass jedes Verfahren eine andere Grenzflächenkraftdichte liefert. Man kann deshalb daraus schließen, dass diese Grenzflächenkräfte keine physikalische Bedeutung haben. Es gibt auch keine vernünftige Erklärung, warum Kräfte nur an den Oberflächen von Werkstoffen angreifen sollen. Küpfmüller [25] hat schon in seinem Aufsatz von 1965 darauf hingewiesen, dass Oberflächenkräfte nur als Ersatz der in Wirklichkeit auf die Körperelemente verteilten Kräfte angesehen werden dürfen.

Zur Berechnung der Volumenkräfte aller drei Verfahren müssen die entsprechenden Kraftkomponenten an den Oberflächen zusammengefasst werden. Hinzu kommen auch die Volumenkräfte, die sich durch die im Volumen möglicherweise fließenden Leitungsströme ergeben. Man erhält als Volumenkraftdichten für alle drei Verfahren Formeln, die folgenden prinzipiellen Aufbau haben:

Methode	Volumenkraftdichte
Ersatzströme	$\vec{F} - \dfrac{\mu}{\mu_0} f(\vec{B}, \vec{H}, \vec{J})$
Ersatzladungen	$\vec{F} - \dfrac{\mu_0}{\mu} f(\vec{B}, \vec{H}, \vec{J})$
Energiesatz	$\vec{F} - f(\vec{B}, \vec{H}, \vec{J})$

Alle drei Formeln enthalten die Kraftdichte $\vec{F}$ und einen Zusatzterm $f(\vec{B}, \vec{H}, \vec{J})$. In diesem Zusatzterm stecken das Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A}$ und die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes $\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0$. Sind beide Gesetze erfüllt, ist dieser Zusatzterm Null und man erhält für alle drei Verfahren die gleiche Kraftdichte $\vec{F}$. Den Vektor $\vec{F}$ erhält man auch aus dem Maxwellschen Spannungstensor (siehe unten). Da analytische und numerische Feldberechnungen mit Fehlern behaftet sind und die oben erwähnten Gesetze nicht immer erfüllt sind, erhält man je nach Methode unterschiedliche Fehler. Den größten Fehler liefert die Ersatzstrom-Methode, da hier der Zusatzterm mit der Eisenpermeabilität multipliziert wird, den kleinsten Fehler erhält man aus der Ersatzladungsmethode, da hier μ im Nenner steht. Der Energiesatz liefert ein Ergebnis, dessen Genauigkeit zwischen beiden Methoden liegt. Man erkennt, dass die Genauigkeit der Kraftberechnung stark von der Genauigkeit der Feldrechnung abhängt.

Betrachtet man die in den Formeln enthaltenen Größen, so erkennt man, dass nur bei dem Maxwellschen Spannungstensor Größen enthalten sind, die an den Grenzflächen stetig sind (B_n, H_t), während bei den übrigen Verfahren unstetige Größen auftreten (μ, M). Das hat den Vorteil, dass bei der Integration der Volumenkraftdichte über das Gesamtvolumen die inneren Grenzflächenkräfte (als Rechengröße) sich aufheben und nur die Volumenelemente an der Oberfläche des Gesamtvolumens berücksichtigt werden müssen.

Als Abschätzung der auf einen Werkstoff wirkenden Kraftdichte empfiehlt sich die einfache Näherungsformel aus dem Maxwellschen Spannungstensors

$$\sigma_t = 0 \qquad \text{und} \qquad \sigma_n = \frac{1}{2\mu_0} B_n^2 \,.$$

A.3.4 Anwendungsbeispiel

Das folgende Beispiel untersucht die Verteilung der Kraftdichte in einer Nut-Zahn-Umgebung eines belasteten Turbogenerators (Abb A.32). Die Verteilung der Kraftdichten zeigt, dass die Kräfte vorwiegend am Zahnkopf und Zahngrund angreifen, während die Zahnflanken, entgegen der verbreiteten Vorstellung, weitgehend kräftefrei sind. Man kann sich die Kraftverteilung auch damit erklären, dass sich sowohl Kreisströme als auch magnetische Dipole immer zum Feldmaximum hinbewegen wollen.

A.3.5 Entwurfsgleichung

Aus Gleichung (A.10) läßt sich die allgemeine Entwurfsgleichung für elektrische Maschinen herleiten:

$$P = \omega M \qquad\qquad P \sim k \cdot B \cdot a \cdot l \cdot r^2 \cdot \omega$$

mit a als Ankerstrombelag ($[a] = 1\,\mathrm{A/m}$) und einer Konstanten k, die z. B. den Polbedeckungsfaktor und andere Nebengrößen beinhaltet. In der Praxis sind die Werte für die Luftspaltinduktion B wegen der Eisensättigung begrenzt auf etwa 0.6 – 1.1 T, der Strombelag durch die thermische Beanspruchung auf etwa $50 \ldots 90\,\mathrm{kA/m}$, bei massiver Kühlung (Grenzleistungsmaschinen) $150 \ldots 290\,\mathrm{kA/m}$ möglich. Je nach Leiterkühlung werden dabei Stromdichten bis zu $20\,\mathrm{A/mm^2}$ erreicht. Der Radius des Läufers ist begrenzt durch die Fliehkräfte und ist umgekehrt proportinal zu ω^2.

Referenzen: [2, 26, 4, 25, 3, 27, 28]

A.3.6 Formelzusammenstellung

Methode	weichmagnetisch	
	σ_t	σ_n
Ersatzstrom	$-(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)H_t B_n$	$\frac{1}{2}\mu_0(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} - 1)H_t^2$
Ersatzladung	$(1 - \frac{\mu_0}{\mu})H_t B_n$	$\frac{1}{2\mu_0}(1 - \frac{\mu_0^2}{\mu^2})B_n^2$
Energiesatz	0	$\frac{1}{2}\mu_0(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)H_t^2 + \frac{1}{2\mu_0}(1 - \frac{\mu_0}{\mu})B_n^2$
Spannungstensor	$H_t B_n$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{\mu_0}B_n^2 - \mu_0 H_t^2)$
	hartmagnetisch	
	σ_t	σ_n
Ersatzstrom	$-B_n M_t$	$\mu_0 H_t M_t + \frac{1}{2}\mu_0 M_t^2$
Ersatzladung	$\mu_0 H_t M_n$	$B_n M_n - \frac{1}{2}\mu_0 M_n^2$
Energiesatz	0	$M_n B_n + \mu_0 M_t H_t + \frac{1}{2}\mu_0 M_t^2 + c$
Spannungstensor	$H_t B_n$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{\mu_0}B_n^2 - \mu_0 H_t^2)$

Es bedeuten:

μ_0 **:** magnetische Feldkonstante für Luft (Material 1)

μ **:** Permeabilität von Material 2 ($= \mu_0 \mu_r$)

H_t **:** Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche

B_n **:** Normalkomponente der magnetischen Flussdichte an der Grenzfläche

M_n, M_t **:** Magnetisierungskomponenten des Hartmagneten

Maxwellscher Spannungstensor

Die exakte Kraft ergibt sich aus dem Maxwellschen Spannungstensor zu

$$\vec{F} = \text{div } \boldsymbol{T}$$

mit

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu_0} B_x^2 - \frac{1}{2}\mu_0 (H_y^2 + H_z^2) & B_x H_y & B_x H_z \\ B_y H_x & \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 - \frac{1}{2}\mu_0 (H_x^2 + H_z^2) & B_y H_z \\ B_z H_x & B_z H_y & \frac{1}{2\mu_0} B_z^2 - \frac{1}{2}\mu_0 (H_x^2 + H_y^2) \end{pmatrix}$$

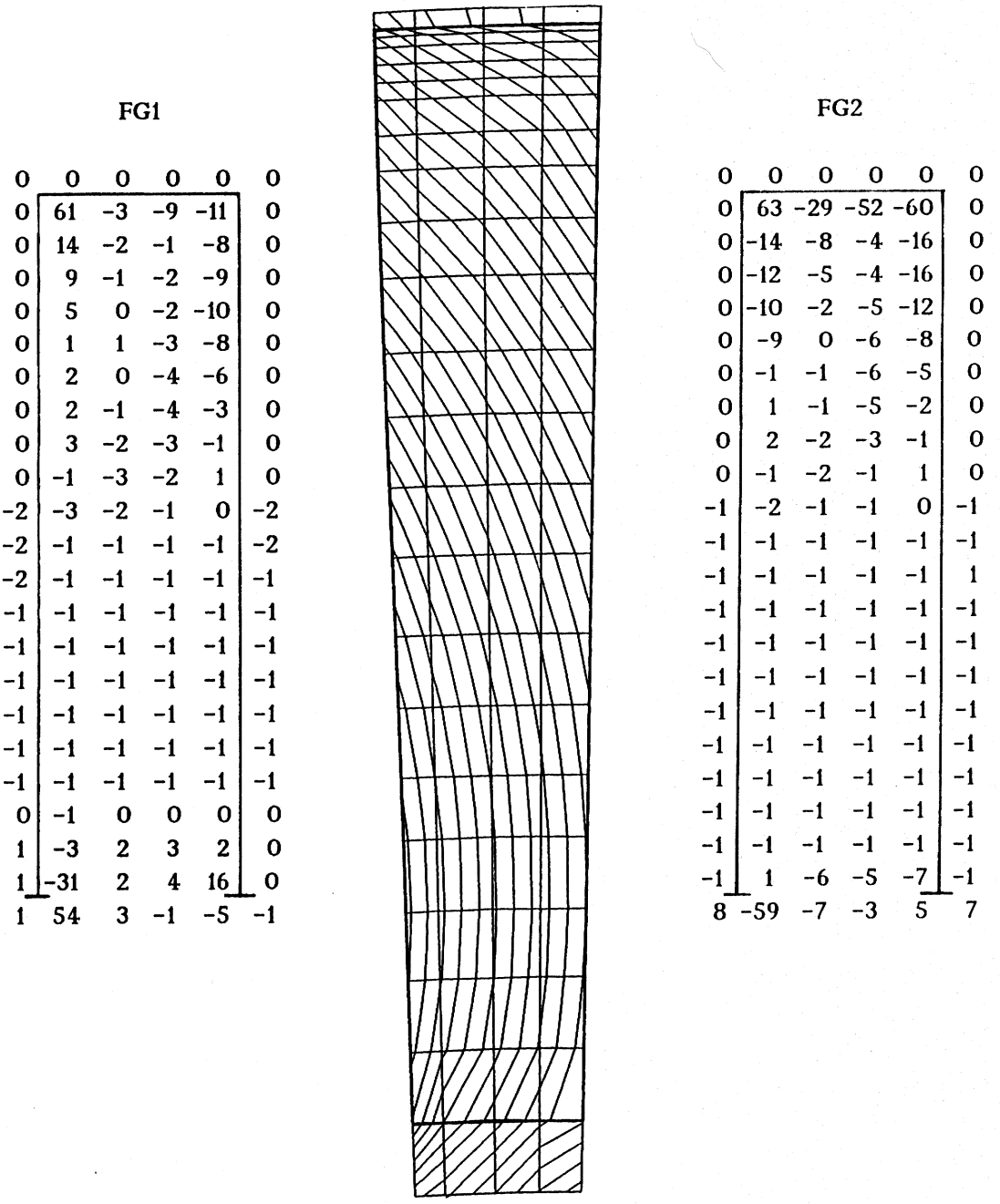


Abb. A.32: Feldlinienverlauf und Kraftverteilung in einem Rotorzahn. Es bedeuten: FG1 radiale Kraftdichte ($100 \equiv 657 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m^3}$), FG2 tangentiale Kraftdichte ($100 \equiv 569 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m^3}$)

A.4 Feldberechnung einer Gleichstrommaschine

Das folgende Beispiel zeigt den Einfluss der Ankerrückwirkung, die Wirkung einer Wendepolwicklung sowie die Bedeutung von Sättigungseffekten am Beispiel einer Gleichstrommaschine. Mit Hilfe eines numerischen Feldberechnungsprogramms[5] wurde das Feld der Maschine nach Abb. A.33 berechnet [29].

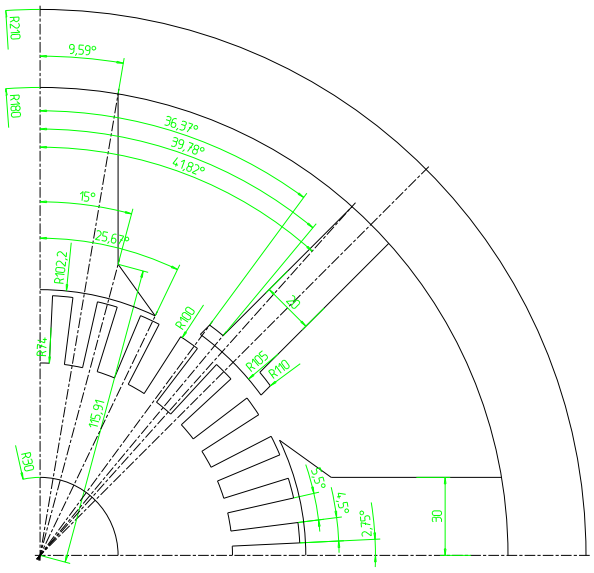


Abb. A.33: Schnitt durch die berechnete Maschine

Dazu wird der Bereich, in dem der Feldverlauf bestimmt werden soll, mit einem zwei- oder dreidimensionalen Gitternetz versehen. Für rotationssymmetrische Anordnungen bietet sich ein Polar- bzw. Zylinderkoordinatensystem an. Die Materialkonturen müssen entweder auf Gitterlinien oder Diagonalen benachbarter Gitterlinien liegen. Um den Simulationsaufwand gering zu halten, wurden für die Berechnung im Anker Radialnuten angenommen. Entsprechend wurde auch die Stromverteilung für die Erreger- und Wendepole in Sektoren mit radialen Flanken untergebracht.

Abb. A.34 zeigt den Feldverlauf der Maschine, den nur die Ströme des Ankers hervorrufen. Die Bürsten liegen in der Pollücke und sind nicht eingezeichnet. Man erkennt, dass die Ankerstromrichtung sich an den Bürsten umkehrt. Das Ankerquerfeld (AF) schließt sich über den Luftspalt und die Erregerpole, die Hauptachse des Feldes (Raumzeiger) liegt in der Pollücke. Die dazugehörigen Flussdichten im Luftspalt für eine Polteilung zeigt Abb. A.35. Sie entspricht im Prinzip dem theoretischen Verlauf bei gleichmäßigem Ankerstrombelag, strichliert eingezeichnet entsprechend Abb. 3.40, überlagert vom Einfluss der Nutung.

Betrachtet man nur die Wirkung des Erregerfeldes (EF), erhält man den Feldverlauf nach Abb. A.36. Das Feld ist ebenfalls symmetrisch zur Pollücke. Der Feldverlauf führt zu einer Induktionsverteilung längs des Luftspaltes, die in Abb. A.37 (Kurve EF) wiedergegeben ist.

Die Überlagerung beider Felder führt zu einem asymmetrischen Feldverlauf nach Abb. A.38 bzw. einer Induktionsverteilung entsprechend der Kurve AF+EF. Der Nulldurchgang der Induktion liegt nicht mehr an der Stelle, wo sich die Bürsten befinden, sondern hat sich etwa um

[5] Es wurde das Programm **PROFI** [4] verwendet. Eine ausführlichere Beschreibung zur numerischen Feldberechnung enthält das Kapitel A.1.6.

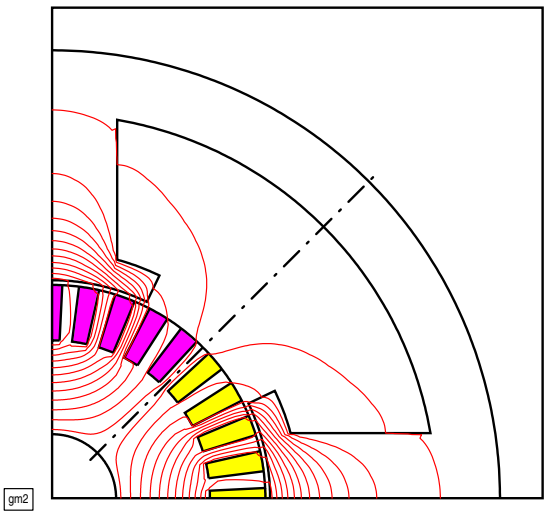


Abb. A.34: Verlauf des Ankerquerfeldes (AF)

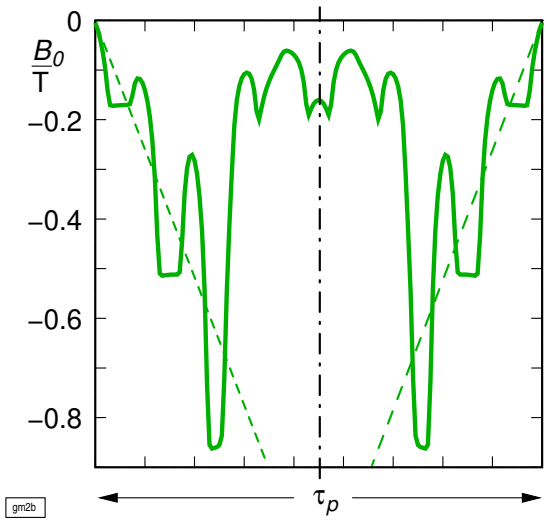


Abb. A.35: Luftspaltinduktion (nur AF)

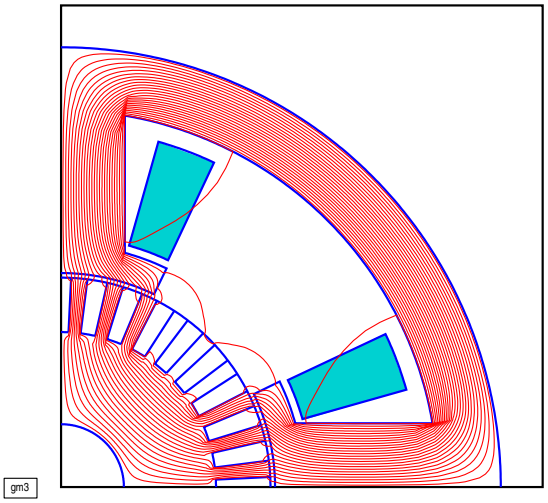


Abb. A.36: Erregerlängsfeld (EF)

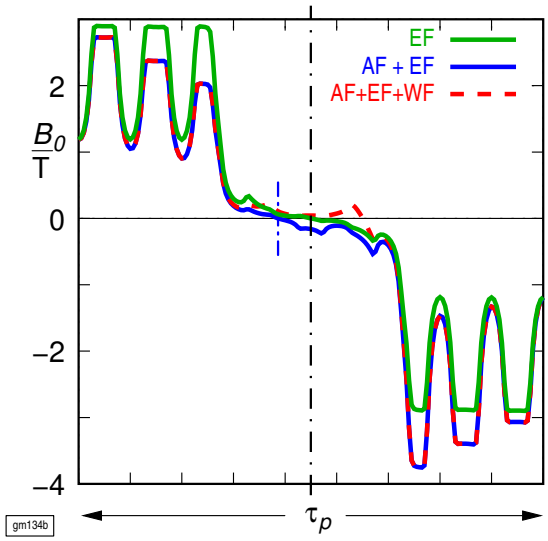


Abb. A.37: Luftspaltinduktionen

den Winkel $\beta = 5\,^\circ$ verschoben. Die Wirkung des Wendepolfeldes (WF) zeigen der Feldverlauf nach Abb. A.39 bzw. die Kurve AF+EF+WF in Abb. A.37. Der Einfluss macht sich nur in der Pollücke bemerkbar, unter den Erregerpolen ist die Induktionsverteilung identisch mit der Kurve AF+EF. Wichtig ist, dass die Stromrichtung in den Wendepolen entgegengesetzt zu den Ankerströmen sein muss, damit die Induktion im Bürstenbereich zu Null wird[6].

Die vorliegenden Berechnungen wurden linear ausgeführt. Nimmt man für alle Eisenwerkstoffe eine konstante Permeabilität von $\mu_r = 1000$ an, ergeben sich bei realistischer Stromvorgabe unrealistische Induktionswerte von bis zu knapp 4 T (Abb. A.40). Berücksichtigt man die Sättigung des Eisen durch Vorgabe einer Magnetisierungskennlinie, steigt der Berechnungsaufwand wegen der Nichtlinearität (im vorliegenden Fall um den Faktor 10), die Induktionswerte bewegen sich jetzt im üblichen Bereich von ca. 1 T.

[6] Eine Beurteilung der Induktionsverteilung wird im vorliegenden Fall durch den Einfluss der Nutung erschwert.

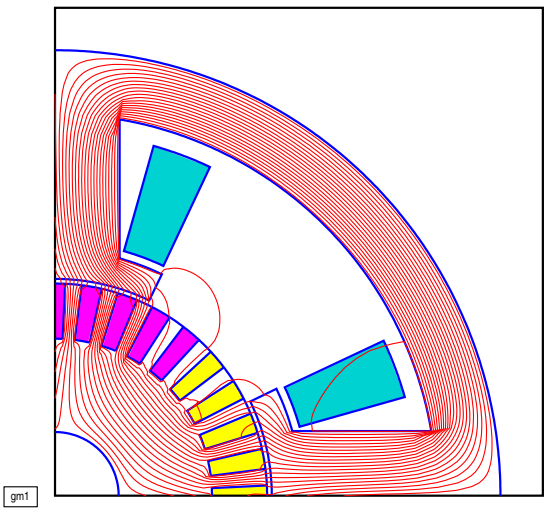


Abb. A.38: Anker- und Erregerfeld (AF+EF)

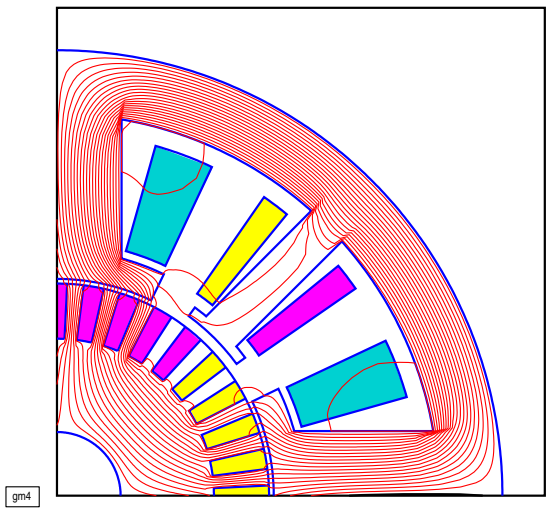


Abb. A.39: ...mit Wendepolen (AF+EF+WF)

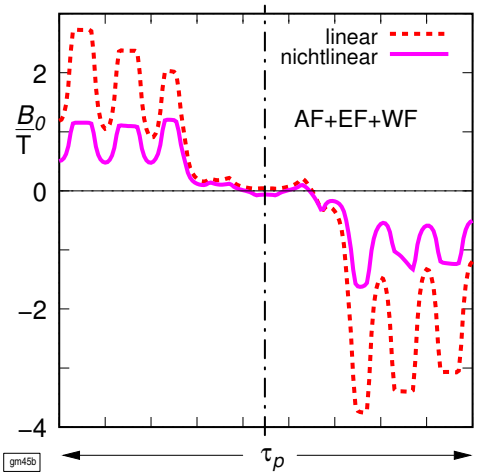


Abb. A.40: Vergleich der Ergebnisse zwischen linearer und nicht-linearer Berechnung

A.5 Simulation der Transformatorersatzschaltungen

Die abgeleiteten Ersatzschaltungen und Differentialgleichungen zum Transformator lassen sich mit mäßigem Aufwand analytisch lösen.

Zur Lösung von Systemen von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen stehen eine Reihe von Computerprogrammen zur Verfügung. Ebenso gibt es zahlreiche Programme, die lineare und nichtlineare elektrische Netzwerke berechnen können.

Hier soll stellvertretend für diese Programme das Programm **SCEPTRE** beschrieben werden, welches beide Funktionen beinhaltet[7]. Darüber hinaus kann dieses Programm auch Netzwerke sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich simulieren. Interessierte Leser finden eine ausführliche Beschreibung in [30, 12].

Zur Beschreibung der Netzwerktopologie[8] erhält jedes Element einen Namen, dessen erster Buchstabe gleichzeitig zur Klassifizierung des Elementes dient (`R`: Widerstand, `L`: Induktivität, `C`: Kapazität, `M`: Gegeninduktivität, `E`: Spannungsquelle, `J`: Stromquelle). Außerdem muss jedem Knoten im Netzwerk ein eindeutiger Name (oder Zahl) zugeordnet werden. Die Reihenfolge der Knotennamen bei der Spezifikation der Bauelemente gibt die angenommene Stromrichtung an:

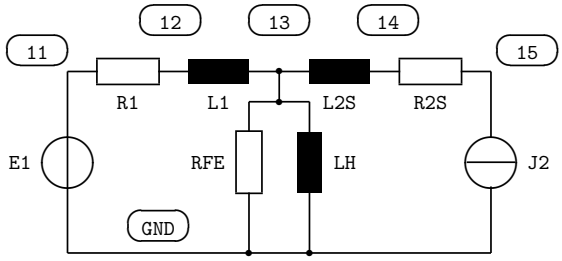
Element, Knoten1 – Knoten2 = Wert

Durch Voranstellen des Buchstabens `V` vor dem Elementname erhält man die Spannung an dem Element (`VR1,VL1,…`), der Buchstabe `I` liefert den Strom durch das Element (`IR1,ILH,…`).

A.5.1 Wechselstromanalyse (Frequenzbereich)

Am Beispiel eines 167 kVA Transformators soll die Anwendung dieses Simulationsprogrammes demonstriert werden [7, Übungsaufgaben].

Es wird das T-Ersatzschaltbild nachgebildet mit den Werten aus dem Leerlaufversuch. Abb. A.41 zeigt das für SCEPTRE aufbereitete Ersatzschaltbild und die dazugehörigen Eingabedaten. Die




```
CIRCUIT DESCRIPTION
ELEMENTS
  E1, GND - 11 = (5770.,0.)
  R1,  11 - 12 = 2.4
  L1,  12 - 13 = 0.01
  L2S, 13 - 14 = 0.01
  R2S, 14 - 15 = 2.4
  J2,  15 - GND = (0.,0.)
  RFE, 13 - GND = 50E3
  LH,  13 - GND = 16.2
OUTPUTS
  E1,VJ2,IR1,VR1,VL1,VRFE,IRFE,ILH
RUN CONTROLS
  RUN AC, FREQUENCY = 50
END
```

Abb. A.41: Schaltung und SCEPTRE-Eingabe zum Leerlaufversuch

[7] Das weitverbreitete *Open-Source*-Programm **NGSPICE** (http://ngspice.sourceforge.net/) erfüllt den gleichen Zweck. Die Syntax der Eingabedaten ist etwas anders, aber die Beschreibung des zu untersuchenden Netzwerkes geschieht in ähnlicher Weise wie in **SCEPTRE**.

[8] Lage und Anordnung der Bauelemente

Nullstromquelle J2 dient zum Berechnen der sekundären Leerlaufspannung VJ2. Die speisende Spannung E1 wird willkürlich in die reelle Achse gelegt ($\underline{E}_1 = 5770 + \mathrm{j}\,0$) und erlaubt eine einfachere Auswertung der Ergebnisse.

Die Simulation berechnet die komplexen Spannungen und Ströme. Abb. A.42 zeigt die Ausgabe der Simulation und eine Tabelle mit der Zuordnung der Programmvariablen zu den Formelvariablen (siehe Zeigerdiagramm). Bei den Simulationsergebnissen stellen die Zahlen in der ersten Spalte die Amplituden, die in der zweiten Spalte die Phasenverschiebungen in Grad bezogen auf 0° dar.

```
      AC ANALYSIS RESULTS

FREQ                      5.00000E+01
E1    (DEGREES)     5.77000E+03    0.00000E+00
VJ2   (DEGREES)     5.76616E+03    2.34034E-02
IR1   (DEGREES)     1.13883E+00   -8.41646E+01
VR1   (DEGREES)     2.73320E+00   -8.41646E+01
VL1   (DEGREES)     3.57775E+00    5.83539E+00
VRFE  (DEGREES)     5.76616E+03    2.34034E-02
IRFE  (DEGREES)     1.15323E-01    2.34034E-02
ILH   (DEGREES)     1.13298E+00   -8.99766E+01
```

Simulation	Ersatzschaltbild
E1	U_{10}
VJ2	U'_{20}
IR1	I_{10}
VR1	$I_{10}\,R_1$
VL1	$I_{10}\,X_{\sigma 1}$
VRFE	U_h
IRFE	I_{fe}
ILH	I_μ

Abb. A.42: Ergebnisse der Leerlaufsimulation mit Tabelle der Namenszuordnung

Für den Lastfall wurde ein ohmscher Lastwiderstand $R = 199\,\Omega$ angeschlossen, der ungefähr Nennstrom bewirkt. Das Netzwerk wurde um eine Nullspannungsquelle E0 erweitert, die es bequem gestattet, den komplexen Leerlaufstrom I_0 zu berechnen ($I_0 \equiv$ IE0, Abb. A.43).

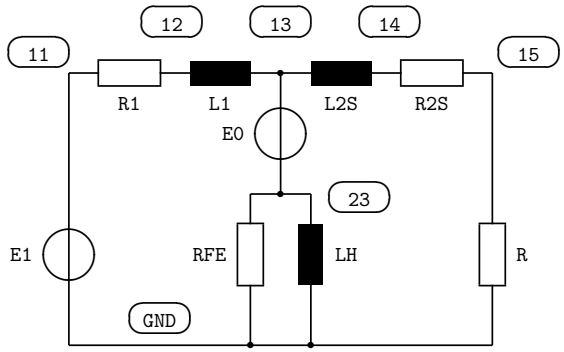


Abb. A.43: T-ESB, Lastfall

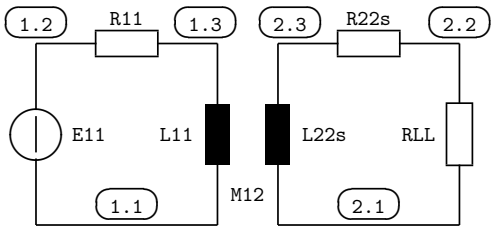


Abb. A.44: ESB mit Gegeninduktivität

Die Ergebnisse der Simulation des Lastfalls mit dem T-Ersatzschaltbild zeigt Abb. A.45.

Im Abschnitt 3.3.4 wurde der Zusammenhang zwischen dem T-Ersatzschaltbild und der Ersatzschaltung mit Gegeninduktivitäten hergeleitet.

Im Folgenden wird der 167 kVA Transformator mittels Gegeninduktivitäten beschrieben und der Lastfall simuliert, und zwar einmal mit den reduzierten ($\ddot{u} = 1:1$) und einmal mit den realen Größen $\ddot{u} = 1:25$ (Abb. A.44). Die SCEPTRE-Eingabe mit den Ergebnissen zeigen Abb. A.46. Die Schaltung wird zweimal berechnet, beim ersten Mal mit den reduzierten Größen, beim zweiten Mal (RERUN DESCRIPTION) werden die sekundären ESB-Parameter und die Gegeninduktivität M_{12} durch ihre realen Größen ersetzt. Man beachte, dass man bei den Ergebnissen nur die

```
CIRCUIT DESCRIPTION
ELEMENTS
  E1, GND - 11 = (5770.,0.)
  R1,  11 - 12 = 2.4
  L1,  12 - 13 = 0.01
  L2S, 13 - 14 = 0.01
  R2S, 14 - 15 = 2.4
  R,  15 - GND = 199
  E0,  13 - 23 = (0.,0.)
  RFE, 23 - GND = 50E3
  LH,  23 - GND = 16.2
OUTPUTS
  E1, VR, IR1,VR1,VL1, VRFE,IRFE
  IR2S,VL2S,VR2S,ILH,IE0
RUN CONTROLS
  RUN AC, FREQUENCY = 50
END
```

```
FREQ                        5.00000E+01
E1     (DEGREES)    5.77000E+03   0.00000E+00
IR1    (DEGREES)    2.84335E+01  -3.99430E+00
VR1    (DEGREES)    6.82405E+01  -3.99430E+00
VL1    (DEGREES)    8.93266E+01   8.60057E+01
VRFE   (DEGREES)    5.69633E+03  -8.48517E-01
IRFE   (DEGREES)    1.13927E-01  -8.48517E-01
ILH    (DEGREES)    1.11926E+00  -9.08485E+01
IE0    (DEGREES)    1.12504E+00  -8.50365E+01
IR2S   (DEGREES)    2.82802E+01  -1.74219E+00
VL2S   (DEGREES)    8.88449E+01   8.82578E+01
VR2S   (DEGREES)    6.78725E+01  -1.74219E+00
VR     (DEGREES)    5.62776E+03  -1.74219E+00
```

Abb. A.45: Lastfall T-ESB und Ergebnisse

```
CIRCUIT DESCRIPTION
ELEMENTS
  E11,  1.1-1.2 = (5770.,0.)
  R11,  1.2-1.3 = 2.4
  L11,  1.3-1.1 = 16.21
  L22s, 2.1-2.3 = 16.21
  R22s, 2.3-2.2 = 2.4
  RLL,  2.2-2.1 = 199
  M12,  L11-L22s = -16.2
OUTPUTS
  IR11,VR11,VL11
  IR22s,VL22s,VR22s,VRLL
RUN CONTROLS
  RUN AC,  FREQUENCY = 50
RERUN DESCRIPTION
ELEMENTS
  L22s = 0.0257565
  R22s = 3.8E-3
  RLL  = 0.316
  M12  = -0.64575
END
```

```
AC ANALYSIS RESULTS

reduziert:
FREQ                        5.00000E+01
IR11   (DEGREES)    2.83212E+01  -4.00344E+00
VR11   (DEGREES)    6.79708E+01  -4.00344E+00
VL11   (DEGREES)    5.70220E+03   4.76826E-02
IR22s  (DEGREES)    2.82816E+01  -1.73867E+00
VL22s  (DEGREES)    5.69591E+03   1.78261E+02
VR22s  (DEGREES)    6.78758E+01  -1.73867E+00
VRLL   (DEGREES)    5.62803E+03  -1.73867E+00

real:
FREQ                        5.00000E+01
IR11   (DEGREES)    2.83392E+01  -4.01966E+00
VR11   (DEGREES)    6.80141E+01  -4.01966E+00
VL11   (DEGREES)    5.70216E+03   4.79064E-02
IR22s  (DEGREES)    7.09948E+02  -1.75638E+00
VL22s  (DEGREES)    2.27041E+02   1.78244E+02
VR22s  (DEGREES)    2.69780E+00  -1.75638E+00
VRLL   (DEGREES)    2.24344E+02  -1.75638E+00
```

Abb. A.46: ESB mit Gegeninduktivität, Übersetzungsverhältnis 1:1 (reduziert) und 1:25 (real)

Spannungen und Ströme der identischen Zweipole (`R1-R11, R2s-R22s` und `R-RLL`) miteinander vergleichen darf. Abweichungen zwischen beiden Simulationen ergeben sich im Prinzip nur durch das Fehlen des Eisenverlustwiderstandes R_{fe} bei der Schaltung mit Gegeninduktivitäten.

A.5.2 Transientanalyse (Zeitbereich)

Die im Kapitel 3.3.5 hergeleiteten Differentialgleichungen (3.32) lassen sich ebenfalls mit dem Netzwerkanalyseprogramm überprüfen. Statt der Frequenzanalyse (AC) muss eine Zeit-/Transientanalyse (TR) durchgeführt werden. Die Ergebnisse lassen sich grafisch in Abhängigkeit von der Zeit darstellen.

Alle Nichtnetzwerkgrößen müssen mit dem Buchstaben `P` beginnen. Das Differential einer Variablen erhält man durch Voranstellen des Buchstaben `D` vor den Variablennamen. Mit dieser Möglichkeit lassen sich recht einfach bestimmte Integrale lösen:

`DP`*name* = *f(t)* `P`*name* = *anfangswert*

Am Ende der Simulation enthält `P`*name* das Integral

$$\texttt{P}name = \int_0^T f(t) + anfangswert\,.$$

Arithmetische Anweisungen werden durch `X`*name* `( .....)` gekennzeichnet.

Mit diesen Vorgaben lässt sich das Dgl-System (3.32) folgendermaßen beschreiben:

```
DEFINED PARAMETERS
  PHI1  = 0.,   PHI2  = 0.
  DPHI1 = X201 (PU1-PR1*(PHI2*PL2H+PHI1*(PL2H+PLsig2))/(PL1H*PLsig2+PL2H*PLsig1+PLsig2*PLsig1))
  DPHI2 = X203 ((-PR2-PRLast)*(PHI1*PL1H+PHI2*(PL1H+PLsig1))/(PL1H*PLsig2+PL2H*PLsig1+PLsig2*PLsig1))
  PI1   = X205 ((PHI2*PL2H+PHI1*(PL2H+PLsig2))/(PL1H*PLsig2+PL2H*PLsig1+PLsig2*PLsig1))
  PI2   = X206 ((PHI1*PL1H+PHI2*(PL1H+PLsig1))/(PL1H*PLsig2+PL2H*PLsig1+PLsig2*PLsig1))
```

Die zeitabhängige Eingangsspannung $u_1(t)$ wird durch die Variable `PU1` dargestellt.

Während das T-Ersatzschaltbild und die Schaltung mit Gegeninduktivitäten sowohl im Frequenzbereich als auch im Zeitbereich gültig sind, beschreibt das Dgl-System den Transformator nur im Zeitbereich.

Das folgende Beispiel soll die Richtigkeit der entwickelten Ersatzschaltungen und Differentialgleichungen zeigen. Dazu wird der bisher betrachtete Transformator mit unterschiedlichen Eingangsspannungen `PU1` gespeist und mit allen drei Methoden im Zeitbereich simuliert [12, Beispiel V060]. Alle Simulationen gehen von linearen Modellen aus, d. h. es wird *keine Magnetisierungskennlinie* berücksichtigt.

Zum Testen und Vergleichen der drei Berechnungsmethoden werden folgende Eingangsspannungen gewählt:

a) Sinusspannung, $\hat{u}_1 = \sqrt{2} \cdot 5770\,\mathrm{V}$

b) Rechteckspannung, $\hat{u}_1 = 5770\,\mathrm{V}$

c) Dreieckspannung, $\hat{u}_1 = \sqrt{2} \cdot 5770\,\mathrm{V}$

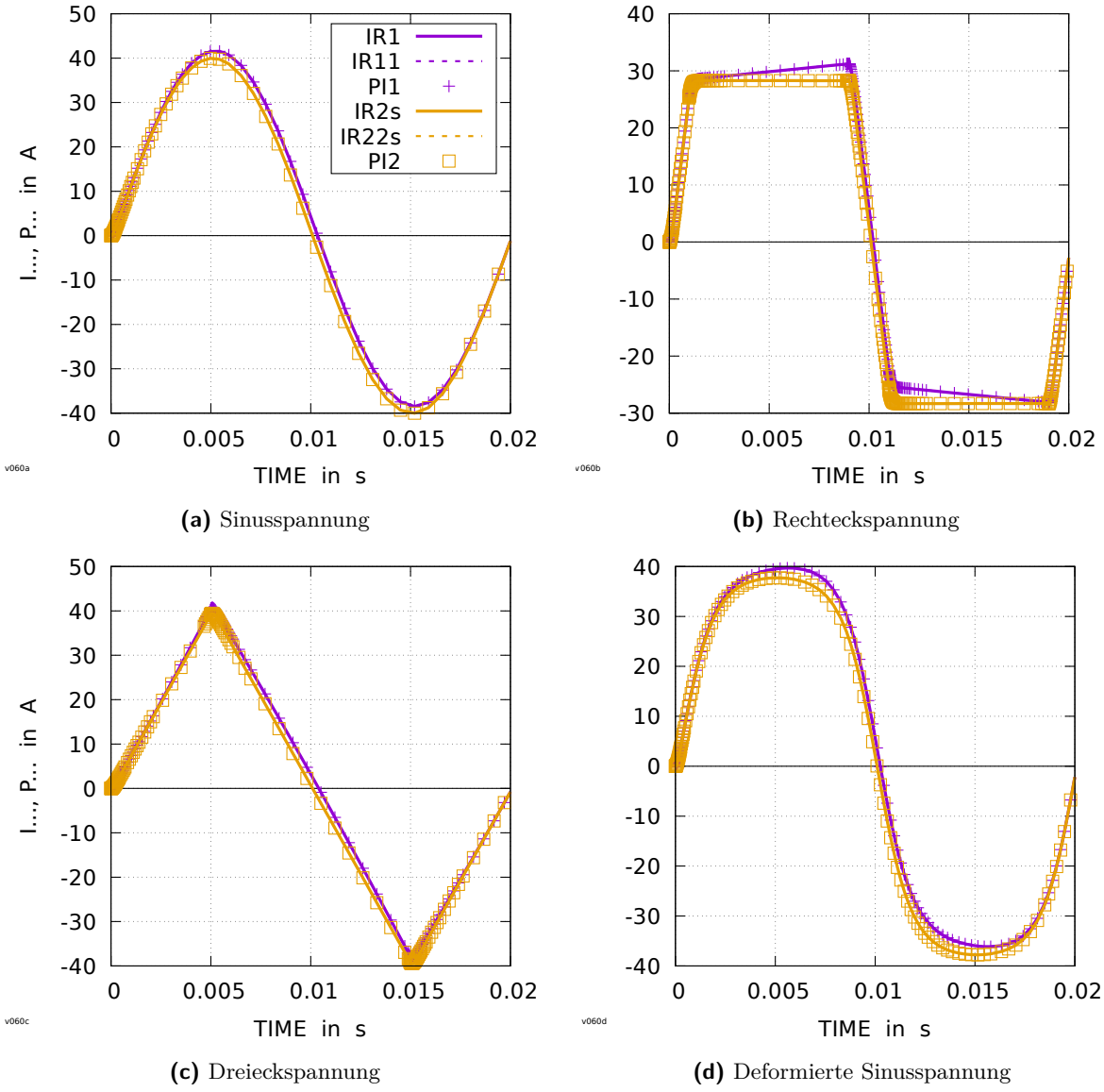
d) deformierte (abgeflachte) Sinusspannung, $\hat{u}_1 = \sqrt{2} \cdot 5770\,\mathrm{V}$.

Die Ergebnisse sind in Abb. A.47 wiedergegeben. Die Größen der Primär- und Sekundärseite werden jeweils in einer eigenen Farbe gezeichnet. Je nach Methode unterscheiden sich die Darstellungen:

- das T-Ersatzschaltbild mit den Strömen `IR1, IR2S` verwendet eine dicke, ausgezogene Linie,
- das ESB mit Gegeninduktivität und den Strömen `IR11, IR22S` benutzt eine dünne strichlierte Linie,

- die Ströme des Dgl.-Systems `PI1, PI2` sind nur mit Punkten markiert. Die Häufigkeit/-Dichte der Punkte entspricht den benötigten Integrationsschritten zur Lösung der Differentialgleichungen.

Die Abbildungen zeigen deutlich, dass die Verfahren exakt die gleichen Lösungen liefern. Die Verläufe der Primär- und Sekundärströme sind je nach Art der Eingangsspannung unterschiedlich. Bei allen Methoden erkennt man mehr oder weniger ausgeprägt die Phasenverschiebung (Fehl-



(a) Sinusspannung

(b) Rechteckspannung

(c) Dreieckspannung

(d) Deformierte Sinusspannung

Abb. A.47: Primär- und Sekundärströme bei unterschiedlichen Formen der Primärspannungen

winkel) zwischen Primär- und Sekundärstrom sowie den Spannungsabfall mit zunehmendem Strom. Bei der Rechteckspannung baut sich ein zusätzlicher Strom auf im Bereich konstanter Spannung.

A.6 Betriebsverhalten der ASM

Im Folgenden wird untersucht, wie sich das Betriebsverhalten der ASM in Abhängigkeit der Ersatzschaltbildparameter verändert. Eine Zuordnung dieser Parameter zu den konstruktiven Teilen der Maschine wurde bereits bei Herleitung des Ersatzschaltbildes gemacht.

A.6.1 Läufer

Der Läufer wird durch einen schlupfabhängigen, ohmschen Widerstand R'_2/s und einem Streublindwiderstand $X'_{2\sigma}$ dargestellt. Aus der Wirkungsweise ergibt sich, dass der Läufer nur mit der Schlupffrequenz $s \cdot f_1$ magnetisiert wird, also sehr niederfrequent. Damit könnte man den Läufer aus massivem Eisen herstellen (*Massivläufer*)[9]. Aus wirtschaftlichen Gründen blecht man auch den Läufer, da Läufer- und Ständerblech aus einer Blechtafel gestanzt werden können.

Läuferwiderstand R'_2

Variiert man den ohmschen Anteil R'_2, so erkennt man, dass mit wachsendem R'_2 der Kippschlupf größer, das Maximum des Leistungsfaktors gleich bleibt, aber sich zu kleineren Drehzahlen hin verschiebt und die Anlaufströme kleiner werden (Abb. A.48). Durch geeignete Wahl von R'_2 ist es

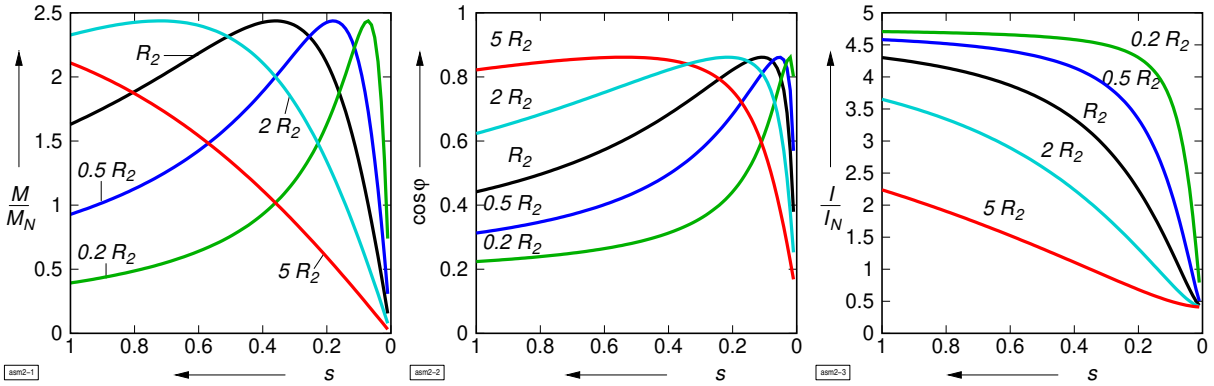


Abb. A.48: Variation des Läuferwiderstandes R'_2

möglich, das Kippmoment zum Anlaufmoment werden zu lassen. Das Kippmoment selber ändert sich wegen der Gleichungen (3.60) und (3.61) nicht. Der Nennschlupf wird mit wachsendem R'_2 ebenfalls größer, der dazugehörende Leistungsfaktor und die Nennströme bleiben etwa gleich.

Durch R'_2 wird nur die Schlupfeinteilung des Heylandkreises beeinflußt, Lage und Durchmesser des Kreises bleiben unverändert.

Läuferreaktanz $X'_{2\sigma}$

Verkleinert man die Läuferreaktanz $X'_{2\sigma}$, vergrößert sich das Kippmoment und der Kippschlupf entsprechend der Gleichungen (3.60) und (3.61), der Leistungsfaktor verbessert sich ebenfalls, vor allem bei kleinen Drehzahlen und die Anlaufströme nehmen zu (Abb. A.49). Die Änderungen

[9] Massivläufer werden eigentlich nur für schweranlaufende Antriebe aus thermischen Gründen und für höchste Drehzahlen aus Gründen der Festigkeit gebaut.

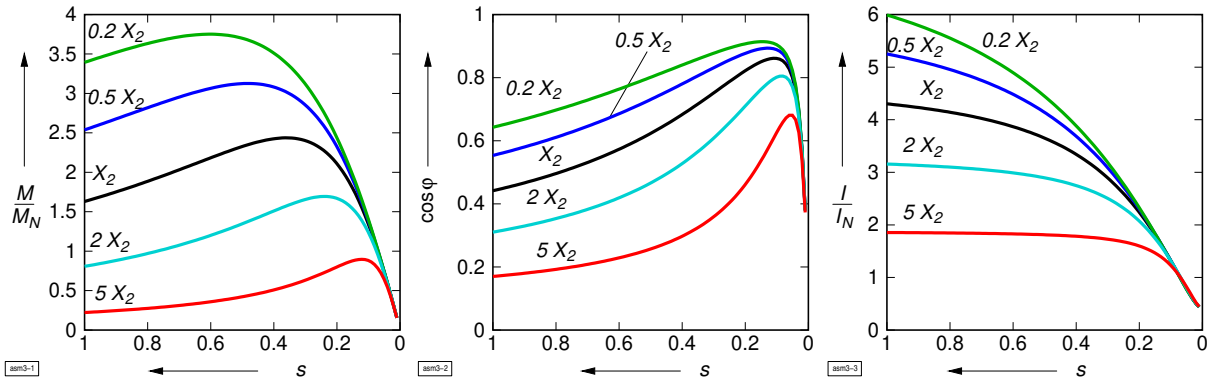


Abb. A.49: Variation des Läuferreaktanz $X'_{2\sigma}$

der Läuferreaktanz haben nur Einfluss auf den Anlaufvorgang, für den Nennbetrieb ändern sich Schlupf, Ständerstrom und Leistungsfaktor kaum.

Für das Kreisdiagramm bedeutet die Verkleinerung von $X'_{2\sigma}$ eine Verschiebung des Kreismittelpunktes in Richtung der imaginären Achse, der Leerlaufpunkt ($s = 0$) bleibt erhalten, d. h. der Durchmesser des Kreises wächst.

Die Beeinflussung von R'_2 und $X'_{2\sigma}$ geschieht je nach Läuferart unterschiedlich.

Schleifringläufer

Beim Schleifringläufer kann man auf einfache Art den Läuferwiderstand durch einen externen Vorwiderstand R'_{2V} vergrößern. Im Ersatzschaltbild ersetzt man R'_2/s durch $(R'_2+R'_{2V})/s$. Durch diesen Vorwiderstand lässt sich die Lage des Kippschlupfes verändern und dem Antriebsproblem dynamisch anpassen. Die Läuferreaktanz erfährt dadurch keine Änderungen, so dass das Kippmoment sich nicht ändert.

Der Schleifringläufer besitzt Läufernuten, in denen die 3-phasige Läuferwicklung eingelegt wird. Für die Wicklung verwendet man die Sternschaltung. Ihre Enden werden auf Schleifringe geführt. Die Form der Läufernuten beeinflusst die Läuferstreureaktanz. Je »geschlossener« eine Nut ist, desto größer wird die Streureaktanz, desto kleiner werden das Kippmoment und der Kippschlupf sowie die Zusatzverluste (siehe X_h).

Mit einer »Bürstenabhebevorrichtung« können Abnutzung und Reibungsverluste durch die Schleifringe vermindert werden, der Wirkungsgrad steigt geringfügig.

Kurzschlußläufer

Beim Kurzschlußläufer besteht die Läuferwicklung aus einzelnen Leitern oder Stäben, die an den axialen Enden des Läufers durch Kurzschlussringe verbunden sind. Wegen der Form bezeichnet man diesen Läufer auch als *Käfigläufer*. Die Leiter können unterschiedliche Querschnitte haben und bestehen aus Kupfer, Bronze, Messing oder Aluminium. Anzahl und Querschnitt der Leiter sowie das Leitermaterial legen im Prinzip den Wert von R'_2 fest. Um den magnetischen Kreis der Maschine zu schließen, werden die Hohlräume im Käfig mit Eisen ausgefüllt. In der Praxis werden bei großen Maschinen die Läuferstäbe in die Läufernuten möglichst spielfrei eingeschlagen und an den Enden mit den Kurzschlussringen hartverlötet oder geschweißt. Bei kleineren und mittleren

Maschinen gießt man die Stäbe und Ringe aus einem Stück in das Läufereisen (Druckguss, Niederdruckguss, Kokillenguss).

Durch diese Bauform ist die Läuferwicklung nicht mehr zugänglich, eine externe Änderung der Läuferparameter nicht mehr möglich. Für einen dünnen Leiter ergibt sich somit der Läuferwiderstand R_2' aus dem ohmschen Widerstand des Leiters, die Läuferreaktanz $X_{2\sigma}'$ berechnet sich aus den geometrischen Abmessungen der Läufernut (Nutstreuung) und der Kurzschlußringe (Stirnstreuung).

A.6.2 Hauptinduktivität X_h

Die Hauptreaktanz X_h hängt vorwiegend vom gewählten Luftspalt δ ab und im geringeren Maße von der Hauptspannung U_h (sättigungsabhängig). Sie wächst mit kleiner werdendem Luftspalt. Der Magnetisierungsstrom I_μ ist abhängig von der Hauptreaktanz X_h und macht den überwiegenden Teil des Leerlaufstromes aus (Abb. A.50). Wegen des funktionsbedingten Luftspaltes und des damit verbundenen höheren Duchflutungsbedarfes ist der Leerlaufstrom relativ hoch (25 – 60 % I_N). Prinzipiell wird man natürlich versuchen, den Luftspalt so gering wie möglich zu

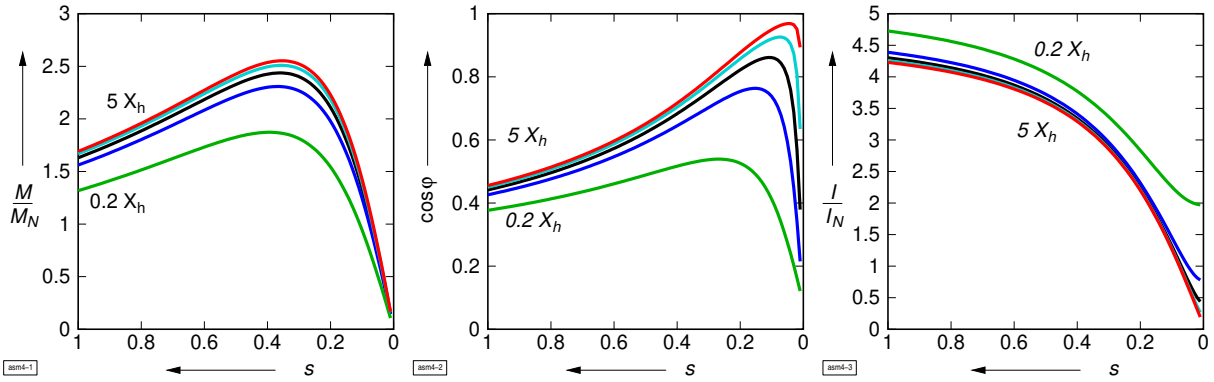


Abb. A.50: Variation der Hauptinduktivität X_h

machen, um den Magnetisierungstrom so klein wie möglich zu halten und den Leistungsfaktor zu verbessern. Zur Wahrung der Betriebssicherheit sind dem konstruktive Grenzen gesetzt (Auslaufen von Lagern, Durchbiegung der Welle und des Gehäuses). Für Maschinen bis ca. 200 kW sind Mindestmaße für den Luftspalt vorgeschrieben.

Mit kleiner werdendem Luftspalt machen sich die örtlich schwankenden Luftspaltinduktionen bemerkbar, die von den wechselnden, gegenseitigen Ständer- und Läuferzähnen (Schleifringläufer) herrühren und zusätzliche *Pulsationsverluste* hervorrufen. Dieser Effekt kann durch halbgeschlossene Nuten geschwächt werden.

Ein größerer Luftspalt führt zu einem größeren Magnetisierungsstrom und verschlechtert den Leistungsfaktor.

Kleine Luftspaltänderungen haben nur geringen Einfluss auf das Drehmomentverhalten der Maschine.

Änderungen von X_h, d. h. vom Luftspalt, verschieben den Heylandkreis nur in Richtung der Imaginärachse.

A.6.3 Eisenverlustwiderstand R_{Fe}

Der Einfluß des Eisenverlustwiderstandes kann vor allem bei großen Maschinen vernachlässigt werden. Das Betriebsverhalten der Maschine wird nicht verändert. Die Eisenverluste treten jedoch — ähnlich wie beim Transformator — als Wirkverluste während der Einschaltdauer der Maschine auf und erzeugen Wärme. Der Wirkanteil des Ständerstromes nimmt um den Betrag von I_{Rfe} zu.

Im Kreisdiagramm bedeutet dies eine Verschiebung des Heylandkreises um den Betrag U_1/R_{fe} in Richtung der reellen Achse.

Versuch A.6.1 *Kennlinienaufnahme eines Schleifringläufers bei verschiedenen Läuferwiderständen.*

A.7 Mathematisches Modell einer Synchronmaschine

Referenz: [22]

A.7.1 Grundlagen

Die Simulation 3-phasiger Maschinen lässt sich vereinfachen, wenn man die Raumvektoren $\vec{u}, \vec{i}$ und $\vec{\psi}$ in einem 2-phasigen System beschreibt. Auf dieses System kann man die komplexe Rechnung anwenden.

Transformation 3-phasig $\Longrightarrow$ 2-phasig

$$\vec{u} = \left[\frac{2}{3}\,u_u - \frac{1}{3}\,u_v - \frac{1}{3}\,u_w\right] + \mathrm{j}\,\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,u_v - \frac{1}{\sqrt{3}}\,u_w\right] = u_x + \mathrm{j}\,u_y \tag{A.12}$$

mit u_u, u_v und u_w als Phasenspannungen (Abb. A.51). Die Transformation gilt sinngemäß auch für $\vec{i}$ und $\vec{\psi}$.

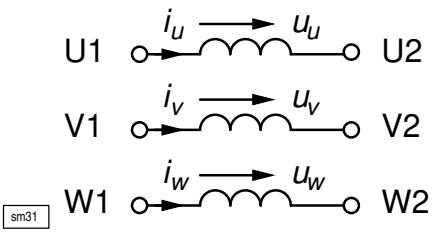


Abb. A.51: Spannungen und Ströme

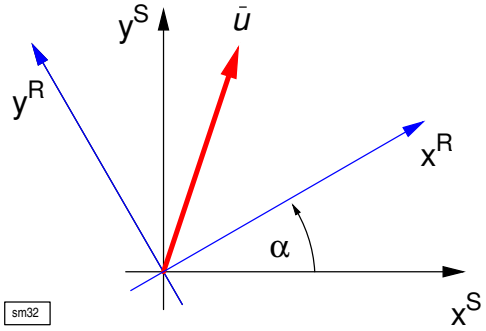


Abb. A.52: Koordinatensysteme

Nullsystem

Ein Nullsystem kann sich ausbilden, wenn die Wicklungen der Maschine in Stern geschaltet sind und der N-Leiter herausgeführt wird.

$$u_0 = \frac{u_u + u_v + u_w}{3} \qquad i_0 = \frac{i_u + i_v + i_w}{3} \qquad \psi_0 = \frac{\psi_u + \psi_v + \psi_w}{3} \tag{A.13}$$

Transformation 3-phasig $\Longleftarrow$ 2-phasig

$$u_1 = u_x + u_0 \qquad u_2 = -\frac{1}{2}\,u_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,u_y + u_0 \qquad u_3 = -\frac{1}{2}\,u_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,u_y + u_0 \tag{A.14}$$

Diese Transformation gilt sinngemäß auch für die Komponenten von $\vec{i}$ und $\vec{\psi}$.

Koordinatentransformation

Für die Synchronmaschine kommen praktisch zwei Koordinatensysteme in Frage: *rotorfest* und *statorfest*. Im folgenden beschreiben die Hochindizes ^{R} und ^{S} das Koordinatensystem, in dem die Größe gilt. Ist das rotorfeste Koordinatensystem um den Winkel α gegenüber dem statorfesten Koordinatensystem verdreht, gelten für die Komponenten des Vektors $\vec{u}$ im rotorfesten Koordinatensystem (Abb. A.52):

$$\begin{aligned} u_x^R &= u_x^S \cdot \cos\alpha + u_y^S \cdot \sin\alpha \\ u_y^R &= -u_x^S \cdot \sin\alpha + u_y^S \cdot \cos\alpha \ . \end{aligned} \tag{A.15}$$

Im statorfesten Koordinatensystem lauten die Komponenten von $\vec{u}$:

$$\begin{aligned} u_x^S &= u_x^R \cdot \cos\alpha - u_y^R \cdot \sin\alpha \\ u_y^S &= u_x^R \cdot \sin\alpha + u_y^R \cdot \cos\alpha \ . \end{aligned} \tag{A.16}$$

Für die Spannung an einer Spule gilt die Differentialgleichung

$$\vec{u} = R \cdot \vec{i} + \frac{\mathrm{d}\vec{\psi}}{\mathrm{d}t} \tag{A.17}$$

mit den Raumvektoren $\vec{u}, \vec{i}$ und $\vec{\psi}$.

Beschreibt man Gleichung (A.17) in einem um den Winkel α gedrehten Koordinatensystem, müssen die Raumvektoren $\vec{u}, \vec{i}$ und $\vec{\psi}$ entsprechend der Vorschrift (A.15) transformiert werden. Man erhält mit den Hochindizes ^{R} für die Vektoren im gedrehten Koordinatensystem eine neue Differentialgleichung

$$\vec{u}^R = R \cdot \vec{i}^R + \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\ \vec{\psi}^R + \frac{\mathrm{d}\vec{\psi}^R}{\mathrm{d}t}\ , \tag{A.18}$$

die zusätzlich noch einen Term enthält, der proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha} = \omega$ ist und als *Rotationsspannung* bezeichnet wird.

A.7.2 Drehstromsynchronmaschine als Motor

Die Klemmen der Synchronmaschine (Abb. A.51) werden mit einem symmetrischen Drehstromnetz verbunden:

$$\begin{aligned} u_u(t) &= \hat{u}\ \sin(\omega t + 90°) \\ u_v(t) &= \hat{u}\ \sin(\omega t - 30°) \\ u_w(t) &= \hat{u}\ \sin(\omega t - 150°)\ . \end{aligned}$$

Die drei Phasenspannungen bilden ein Drehfeld, welches sich durch eine zweiphasige Ständerspannung (Index $_S$) entsprechend Gleichung (A.12) ersetzen lässt mit den *statorfesten* Koordinaten

$$\begin{aligned} u_{Sx}^S &= \frac{2}{3}\ u_u - \frac{1}{3}\ u_v - \frac{1}{3}\ u_w \\ u_{Sy}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}}\ (u_v - u_w)\ . \end{aligned}$$

Die Magnetflüsse der Statorwicklung sind von der Rotorstellung abhängig. Diesen Umstand vermeidet man, wenn man die Flusskomponenten im rotorfesten Koordinatensystem berechnet und die Ergebnisse anschließend in das statorfeste Koordinatensystem zurücktransformiert.

Nach Gleichung A.15 ergibt sich für die Ständerspannung in *rotorfesten* Koordinaten

$$\begin{aligned} u_{Sx}^{R} &= u_{Sx}^{S} \cdot \cos\alpha + u_{Sy}^{S} \cdot \sin\alpha \\ u_{Sy}^{R} &= -u_{Sx}^{S} \cdot \sin\alpha + u_{Sy}^{S} \cdot \cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Für die Ständerwicklung im *statorfesten* Koordinatensystem gilt mit Gleichung (A.17)

$$\vec{u}_S^{\,S} = R_S \cdot \vec{i}_S^{\,S} + \frac{\mathrm{d}\vec{\psi}_S^{\,S}}{\mathrm{d}t} \ .$$

Daraus wird im mit $\omega = \dot{\alpha}$ rotierenden Koordinatensystem nach Gleichung (A.18)

$$\vec{u}_S^{\,R} = R_S \cdot \vec{i}_S^{\,R} + \mathrm{j}\,\omega \cdot \psi_S^{R} + \frac{\mathrm{d}\vec{\psi}_S^{\,R}}{\mathrm{d}t}$$

oder in der Komponentenschreibweise unter Berücksichtigung der Polpaarzahl p

$$\begin{aligned} u_{Sx}^{R} &= R_S \cdot i_{Sx}^{R} - p \cdot \omega \cdot \psi_{Sy}^{R} + \frac{\mathrm{d}\psi_{Sx}^{R}}{\mathrm{d}t} \\ u_{Sy}^{R} &= R_S \cdot i_{Sy}^{R} + p \cdot \omega \cdot \psi_{Sx}^{R} + \frac{\mathrm{d}\psi_{Sy}^{R}}{\mathrm{d}t} \ . \end{aligned} \tag{A.19}$$

Dabei entspricht der x-Achse die d-Achse, der y-Achse die q-Achse.

Die Spannungsgleichung des rotorfesten Erregerfeldes lautet

$$u_E = R_E \cdot i_E + \frac{\mathrm{d}\psi_E}{\mathrm{d}t} \tag{A.20}$$

und hat nur eine Komponente in Richtung der d-Achse. Die im rotorfesten Koordinatensystem induzierten Magnetfelder des Dämpferkäfigs lassen sich in zwei Anteile zerlegen:

$$\begin{aligned} 0 &= R_{Dx} \cdot i_{Dx} + \frac{\mathrm{d}\psi_{Dx}}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= R_{Dy} \cdot i_{Dy} + \frac{\mathrm{d}\psi_{Dy}}{\mathrm{d}t} \ . \end{aligned} \tag{A.21}$$

Die in den Gleichungen (A.19), (A.20) und (A.21) hergeleiteten Feldkomponenten lassen sich den d- und q-Achsen des Rotors zuordnen (Abb. A.53).

Jeder Flusskomponente kann einer Induktivität zugeordnet werden, die sich in einen Haupt- und einen Streuanteil aufspalten lässt:

$$L = L_h + L_\sigma = L_h \ (1 + \sigma) \ .$$

Die Hauptinduktivität jeder Achse ist für die zugehörigen Feldanteile gleich, die Streuung ist unterschiedlich. Da die Achsen senkrecht aufeinander stehen, sind die jeweiligen Felder entkoppelt.

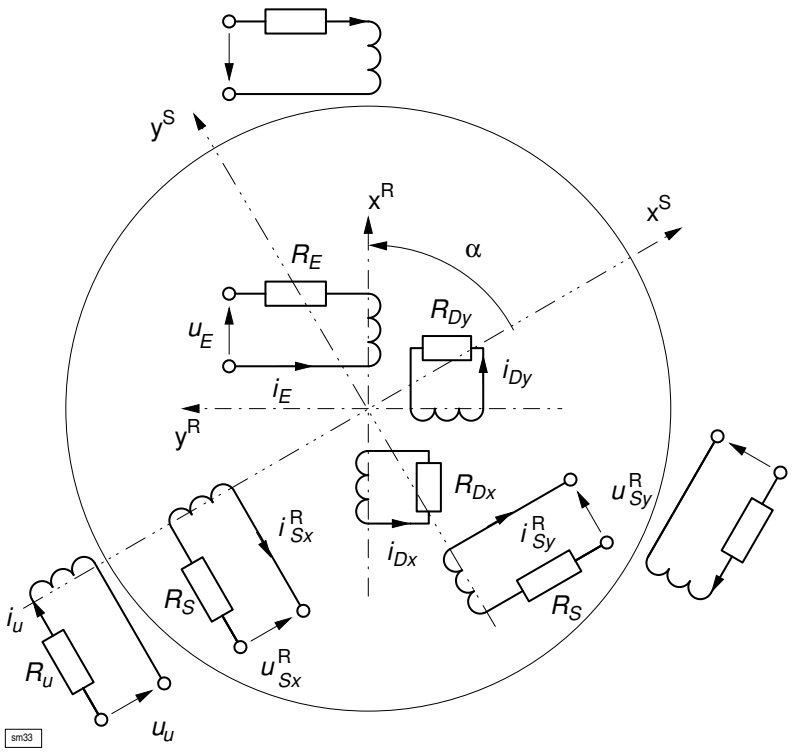


Abb. A.53: Koordinatensysteme und Feldkomponenten der Synchronmaschine

Man kann deshalb zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme aufstellen, die die Ströme über die Induktivitäten mit den Flüssen verknüpfen:

$$\begin{pmatrix} \psi^R_{Sx} \\ \psi_E \\ \psi_{Dx} \end{pmatrix} = L_{hd} \begin{pmatrix} 1+\sigma_{Sd} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sigma_E & 1 \\ 1 & 1 & 1+\sigma_{Dx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i^R_{Sx} \\ i_E \\ i_{Dx} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi^R_{Sy} \\ \psi_{Dy} \end{pmatrix} = L_{hq} \begin{pmatrix} 1+\sigma_{Sq} & 1 \\ 1 & 1+\sigma_{Dy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i^R_{Sy} \\ i_{Dy} \end{pmatrix}$$

Löst man diese Gleichungssysteme nach den Strömen auf, kann man die Gleichungen (A.19), (A.20) und (A.21) als ein gekoppeltes Dgl.-System der Form $\dot{\vec{\psi}} = (\vec{u}, \vec{i}, \vec{\psi})$ schreiben:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi^R_{Sx}} &= u^R_{Sx} - R_S \cdot i^R_{Sx} + p \cdot \omega \cdot \psi^R_{Sy} \\
\dot{\psi^R_{Sy}} &= u^R_{Sy} - R_S \cdot i^R_{Sy} - p \cdot \omega \cdot \psi^R_{Sx} \\
\dot{\psi_E} &= u_E - R_E \cdot i_E \\
\dot{\psi_{Dx}} &= -R_{Dx} \cdot i_{Dx} \\
\dot{\psi_{Dy}} &= -R_{Dy} \cdot i_{Dy} \, .
\end{aligned}$$

Aus den Strömen kann man das Drehmoment berechnen:

$$M = \frac{3}{2}\, p \left[L_{hd} \left(i^R_{Sx} + i_E + i_{Dx} \right) i^R_{Sy} - L_{hq} \left(i^R_{Sy} + i_{Dy} \right) i^R_{Sx} \right]$$

und daraus die Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} \left(M - M_{Last} \right)$$

mit dem Trägheitsmoment J und einem Lastmoment M_{Last}. Den Verdrehungswinkel α erhält man durch Integration der Winkelgeschwindigkeit ω unter Berücksichtigung der Polpaarzahl p:

$$\dot{\alpha} = \omega \cdot p \ .$$

Die realen Ständerströme i_u, i_v und i_w ergeben sich dadurch, dass man den im rotorfesten Koordinatensystem beschriebenen Ständerstrom $\vec{i}_S^R$ mittels Transformation entsprechend Gleichung (A.16) in das statorfeste Koordinatensystem überführt und anschließend, wie es Gleichung (A.14) vorschreibt, in das Dreiphasensystem umwandelt. Dabei muss man nach Gleichung (A.13) den Einfluss des Nullsystems berücksichtigen, für das ebenfalls Gleichung (A.17) gilt:

$$u_0 = R_0 \cdot i_0 + L_0 \ \frac{\mathrm{d}i_0}{\mathrm{d}t} \ ,$$

wozu man eine weitere Differentialgleichung lösen muss:

$$\dot{i}_0 = \frac{1}{L_0} \ (u_0 - R_0 \cdot i_0)$$

mit L_0 und R_0 als Nullimpedanz. Insgesamt erhält man für die zweiphasigen Komponenten des Ständerstromes:

$$\begin{aligned} i_{Sx}^S &= i_{Sx}^R \cdot \cos\alpha - i_{Sy}^R \cdot \sin\alpha \\ i_{Sy}^S &= i_{Sy}^R \cdot \sin\alpha + i_{Sy}^R \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

und schließlich für die Phasenströme in den Ständerwicklungen

$$\begin{aligned} i_u &= i_{Sx}^S + i_0 \\ i_v &= -\frac{1}{2} \ i_{Sx}^S + \frac{\sqrt{3}}{2} \ i_{Sy}^S + i_0 \\ i_w &= -\frac{1}{2} \ i_{Sx}^S - \frac{\sqrt{3}}{2} \ i_{Sy}^S + i_0 \end{aligned} \tag{A.22}$$

Beispiel siehe [12]

A.8 GNUPLOT Simulationen und Demonstrationen

Das Programm GNUPLOT gehört zur Klasse der *Open-Source*-Programme und wird für verschiedene Betriebssysteme angeboten. Es kann kostenlos aus dem Internet heruntergeladen werden[10]. Es dient in erster Linie zum Zeichnen und Berechnen mathematischer Funktionen und zur Darstellung externer Daten. Das Rechnen mit komplexen Variablen gestaltet sich sehr einfach (siehe Beispiel Simulation der ASM — Betriebsverhalten, Kreisdiagramm).

A.8.1 Simulation eines Drehfeldes

Bei 50 Hz beträgt die Periodendauer 20 ms. Zum Nachweis, dass sich das Feld genau einmal in dieser Zeit dreht, wird die Orstkurve des Feldvektors nur im Bereich $0 < t < 19\,\text{ms}$ gezeichnet (Abb. A.54, A.55).

Man beachte, dass die Amplitude des Feldvektors im kartesischen Koordinatensystem $\frac{3}{2}$mal so groß ist wie im Dreiphasensystem.

Durch unterschiedliche Amplituden $\hat{A}, \hat{B}$ lassen sich unsymmetrische Netze erzeugen und sich auch der Ausfall einzelner Phasen simulieren (elliptisches Drehfeld, Wechselfeld).

```
A = 1.;  B = 1.;   C = 1.;   f = 50.
omega = 2*pi*f
set grid; set zeroaxis lt -1; set dummy t
set param; set size square; set size ratio -1
set trange [0:0.019]

# Sinusströme:
u(t)=A*sin(omega*t)
v(t)=B*sin(omega*t+2*pi/3.)
w(t)=C*sin(omega*t-2*pi/3.)
Y(t)=u(t)-v(t)*sin(pi/6.)-w(t)*sin(pi/6.)
X(t)=-v(t)*cos(pi/6.)+w(t)*cos(pi/6.)

plot X(t),Y(t) lw 3 lt 7
pause -1
```

Ersetzt man die Sinusfunktion durch eine Rechteckfunktion, wie sie bei getakteten Maschinen auftreten, geht der Kreis in ein Sechseck über (Abb. A.55). Dazu wandelt man den Sinusverlauf mit Hilfe der `SGN`-Funktion, die je nach Vorzeichen ihres Arguments den Wert +1 oder -1 liefert, in ein alternierendes Rechtecksignal gleicher Amplitude und Periodendauer um.

```
# Rechteckströme:
u(t)=A*sgn(sin(omega*t))
v(t)=B*sgn(sin(omega*t+2*pi/3.))
w(t)=C*sgn(sin(omega*t-2*pi/3.))
```

Die folgende GNUPLOT Kommandos erzeugen eine bewegte Grafik, aus der man das Zusammenspiel zwischen Wechsel- und resultierendem Fluss (Raumzeiger) noch besser erkennen kann.

[10] www.gnuplot.info, https://sourceforge.net/projects/gnuplot/

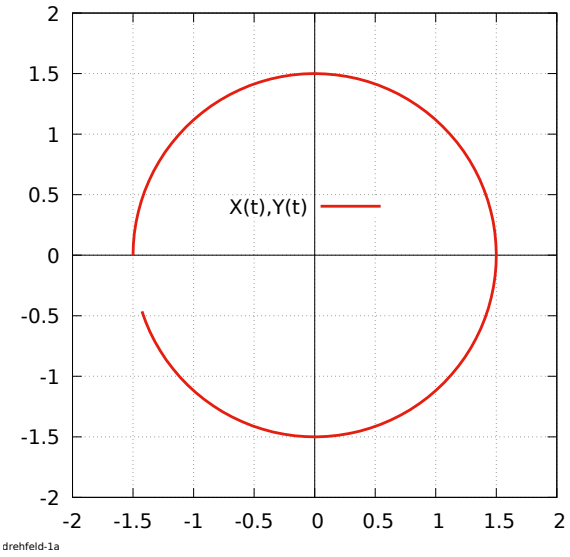


Abb. A.54: Sinusförmige Ströme

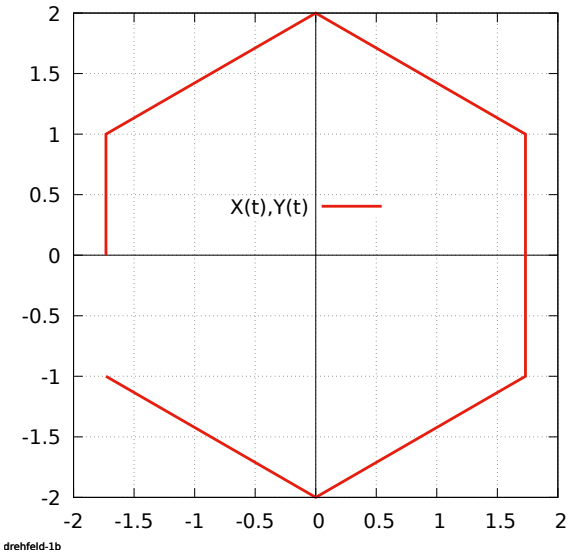


Abb. A.55: Rechteckförmige Ströme

Die Kommandos müssen auf zwei Dateien aufgeteilt werden[11]. Die Hauptdatei, die von GNUPLOT ausgeführt werden muss, enthält folgende Anweisungen:

```
1  u(t) = U*sin(t)
2  v(t) = V*sin(t+2*pi/3.)
3  w(t) = W*sin(t-2*pi/3.)
4  set xrange [-1.5:1.5]; set yrange [-1.5:1.5]
5  set size ratio -1; set zeroaxis lt -1; set grid
6  plot 0 notitle
7  t = 0
8  U=1; V=1; W=1
9  load "zweite.rot"
10 pause -1
11 exit
```

Die Datei `zweite.rot` enthält die Anweisungen zum Zeichnen der Vektoren:

```
1  t = t + pi/180.*5
2  ux(t) = 0;                      uy(t) = u(t)
3  vx(t) = -v(t)*0.866;            vy(t) = -v(t)*0.5
4  wx(t) = w(t)*0.866;             wy(t) = -w(t)*0.5
5  X(t) = ux(t)+vx(t)+wx(t);       Y(t) = uy(t)+vy(t)+wy(t)
6  set arrow 1 from 0,0 to ux(t),uy(t) lt 2 lw 2
7  set arrow 2 from 0,0 to vx(t),vy(t) lt 3 lw 2
8  set arrow 3 from 0,0 to wx(t),wy(t) lt 1 lw 2
9  set arrow 4 from 0,0 to X(t),Y(t) lt 7 lw 3
10 replot
11 system "sleep 0.1"
12 if (t<15.1) reread
```

[11] In neueren GNUPLOT Versionen (ab 5.0) gibt es Schleifenanweisungen, die das Aufteilen in zwei Dateien überflüssig macht.

Die Anweisung »`system "sleep 0.1"`« verlangsamt den Bewegungsablauf zwecks besserer Anschauung. Die Anweisung »`if (t<15.1) reread`« bestimmt die Simulationsdauer.

A.8.2 Simulation der ASM — Betriebsverhalten, Kreisdiagramm

Sind die Parameter des T-Ersatzschaltbildes bekannt, lässt sich daraus das Betriebsverhalten der Asynchronmaschine mit GNUPLOT simulieren.

```
# asm-simulation:
# Nenndaten:

U1=230. ; I1N=9.2 ; nD=1500. ; MN=31.5 ; PN=6000

# Aus Kurzschluss und Leerlaufversuch ermittelte Daten:

R1=0.833;          R2(s)=1.887/s;       RF=583.
X1={0.,2.645};     X2={0.,2.645};       Xh={0.,58.96}

Z1(s)=R1+X1
Z2(s)=R2(s)+X2
Z0(s)=RF*Xh/(RF+Xh)
Z(s)=Z1(s)+Z2(s)*Z0(s)/(Z2(s)+Z0(s))
I1(s)=U1/Z(s)
cosphi(s)=cos (atan (imag(I1(s))/real(I1(s)) ) )
I2(s)=U1*Z0(s)/(Z(s)*(Z0(s)+Z2(s)))
Pd(s)=3*abs(I2(s))**2*R2(s)
Mi(s)=Pd(s)*60./(2*pi*nD)
Pi(s)=Pd(s)*(1.-s)
P1(s)=3*U1*real(I1(s))
eta(s)=Pi(s)/P1(s)
n(s)=nD*(1-s)
pause -1 "Betriebskennlinien ..."

# Nenndaten:

set dummy s
set xlabel "s"
set xrange [1:-0.1]
set x2range [1:-0.1]
set ylabel "M / M_N, I / I_N"
set yrange [0:4.5]
set y2label "cos {/Symbol j, h}"
set y2range [0:1]
set y2tics
set ytics nomirror
set key bottom center
set grid; set zeroaxis lt -1
plot abs(I1(s))/I1N title "I / I_N" lw 3,\
    Mi(s)/MN title "M_i / M_N" lw 3, \
    cosphi(s) axes x1y2 title "cos {/Symbol j}" lw 3, \
    eta(s)    axes x1y2 title "{/Symbol h}" lw 3

pause -1 "Kreisdiagramm: ..."

```

```
47 set para
48 set dummy s
49 set xrange [-50:0]
50 set yrange [-25:25]
51 set noy2tics
52 set size square
53 set xlabel "Im\\{I_1\\}"
54 set ylabel "Re\\{I_1\\}"
55 set key top right
56 set y2label ""
57 set zeroaxis lt -1; set grid
58 plot [-1:1] imag(I1(s)),real(I1(s)) title "I_1(s)" lw 3
59 pause -1 "Belastungskennlinien ..."
60
61 # Belastungskennlinien:
62
63 set para
64 set dummy s
65 set xrange [0:1.2]
66 set yrange [0:1.2]
67 set key bottom
68 set xlabel "M_i/M_N"
69 set samples 1000
70 plot [1:0] Mi(s)/MN, n(s)/nD title "n(s) / n_D" lw 3, \
71       Mi(s)/MN, abs(I1(s))/I1N title "|I_1(s)| / I_N" lw 3, \
72       Mi(s)/MN, P1(s)/PN title "P_1 / P_N" lw 3, \
73       Mi(s)/MN, cosphi(s) title "cos {/Symbol j}(s)" lw 3, \
74       Mi(s)/MN, eta(s) title "{/Symbol h}" lw 3, \
75       Mi(s)/MN, Pi(s)/PN title "P_i / P_N" lw 3
76 pause -1
77 exit
```

Ein sehr großer Vorteil von GNUPLOT liegt in der sehr einfachen Berechnung *komplexer* Gleichungen (Zeilen 11 – 23). Komplexe Konstanten werden mit Real- und Imaginärteil, durch Komma getrennt, in geschweiften Klammern deklariert (z. B. Zeile 9). Den komplexen Operator `j` definiert man mit `{0,1}`. Ist der Imaginärteil gleich Null, kann man auf die geschweifte Klammer verzichten (siehe z. B. Variable `U1` in Zeile 4 und Zeile 15).

A.8.3 Auswerten externer Daten, Fitfunktion

Bei der Bestimmung der Eisen- und Reibungsverluste $P_{\mathrm{F+R}}$ einer Gleichstrommaschine wird der Motor mit konstanter Erregung (Parameter) bei verschiedenen Ankerspannungen U_{A0} im Leerlauf betrieben. Gemessen werden die Drehzahl n, die Ankerspannung U_{A0} und der Ankerstrom I_{A0}. Bei bekannter Bürstenübergangsspannung $2\,U_B$ und Ankerwiderstand R_A lässt sich daraus die Kurve $P_{\mathrm{F+R}} = f(n)$ zeichnen (Abb. 4.3 in Kapitel Leerlaufversuch). Mit den Messwerten lässt sich eine Fitfunktion $y = ax^2 + bx + c$ finden, die es erlaubt, $P_{\mathrm{F+R}}$ auch zwischen den Messpunkten zu berechnen.

Für die Auswertung wird angenommen, dass die Messwerte n, U_{A0}, I_{A0} als dreispaltige Tabelle in einer Datei *dateiname* abgespeichert sind. In GNUPLOT stehen die Variablen `$1, $2, $3` für die Werte n, U_{A0}, I_{A0} aus der Datei *dateiname*. Zum Zeichnen und zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c der Fitfunktion führt man die folgenden GNUPLOT-Anweisungen aus:

```
PFR(UA,IA)=UA*IA-2*UB*IA-IA*IA*RAK
pfr(x)=a*x*x+b*x+c # Fitfunktion
fit pfr(x) "dateiname" using ($1):(PFR($2,$3)) via a,b,c
plot "" using ($1):(PFR($2,$3)) title "gemessene Werte" lw 3 pt 3 ps 1,\
        pfr(x) title "Fitfunktion" lw 3
```

Eine weitere nützliche Anwendung ist die Bestimmung der Fitfunktion für die Leerlaufkennlinie einer Synchronmaschine $U_p = f(I_E)$ (Abb. 4.11 in Leerlaufversuch):

```
up(x)=a1*x+a3*x**3+a5*x**5+a7*x**7
fit up(x) "dateiname-2" using 1:2 via a1,a3,a5,a7
plot ""  using 1:2 title "U_{1p} gemessen" lw 3 ps 2,\
         up(x) title "U_{1p} Fitfunktion" lw 3
```

Die Datei *dateiname-2* muss für jeden Messpunkt in der ersten Spalte den Erregerstrom I_E, in der zweiten Spalte die Leerlaufspannung (Polradspannung) U_p enthalten. Die Funktion $u_p(x)$ erlaubt es, für jeden Erregerstrom die Polradspannung zu berechnen. Sicherheitshalber sollte man immer die Übereinstimmung von Messpunkten und Fitfunktion überprüfen. Vorsicht ist geboten bei der Extrapolation der Leerlaufkennlinie.

A.9 Wärmeableitung

Referenz: [31, 32]

> Hinweis: um Verwechselungen zu vermeiden und zur Wahrung eines einheitlichen Schriftbildes werden in diesem Abschnitt alle Dezimalzahlen mit Dezimalpunkt gesetzt und Aufzählungen durch Kommata getrennt.

Abgesehen von der bewussten Wärmeerzeugung (industrielle Wärme, Prozesswärme) entsteht Wärme in der Elektrotechnik als Folge von elektrischen und mechanischen Verlusten. Diese *Verlustwärme* ist unerwünscht. Ursachen sind in erster Linie

- elektrische Verluste in Widerstandsmaterialien (ohmsche Verluste, Kupferverluste);
- mechanische Verluste durch Reibung (Gleitreibung, Luftreibung).

Eine Ableitung dieser Verlustwärme ist erforderlich, um die Betriebssicherheit der Betriebsmittel zu gewährleisten.

A.9.1 Grundlagen, Definitionen

Die Wärme ist ein Maß für die kinetische Energie der Moleküle und entspricht der *Temperatur* eines Körpers. Die Temperatur ist der menschlichen Empfindung direkt zugänglich.

Zwischen Körpern verschiedener Temperaturen findet ein *Temperaturausgleich* statt. Ein System befindet sich im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn alle Bestandteile des Systems dieselbe Temperatur haben (nullter Hauptsatz der Thermodynamik).

Die physikalische Einheit für die absolute Temperatur heißt K(elvin). Die Temperaturskala beginnt beim *absoluten Nullpunkt* 0 K. Als weiteren Bezugspunkt definiert man den *Tripelpunkt*[12] von Wasser (= 0.01 °C) mit 273,16 K. Die Kelvin-Skala hat die gleiche Teilung wie die Celsius-Skala, beginnt aber beim absoluten Nullpunkt.

Umrechnung:

$$\frac{\vartheta}{^\circ\mathrm{C}} = \frac{T}{\mathrm{K}} - 273.15$$

Wärme ist eine Energie, die aufgrund eines Temperaturunterschiedes zwischen zwei Systemen übertragen wird. Diese Energieübertragung hat eine eindeutige Richtung. Die Wärme fließt stets in Richtung der niedrigeren Temperatur. Wärmezu- oder abfuhr bedeutet Temperaturänderung:

$$\Delta Q = C_w\ \Delta T \qquad \text{mit} \quad C_w = c_w\ m$$

ΔQ : Wärmemenge, Einheit 1 J(oule) = 1 Ws = 1 Nm, Aussprache [Ju:l]

ΔT : Temperaturänderung, Einheit 1 K (= 1 °C)

C_w : Wärmekapazität, Einheit 1 J/K

c_w : spezifische Wärmekapazität, Einheit 1 J/(kg K), im allg. nicht konstant, $c_w = c_w(T)$

m : Masse, Einheit 1 kg

[12] Der Tripelpunkt ist der Zustand, bei dem in einem Gefäß der feste, flüssige und gasförmige Aggregatzustand miteinander im Gleichgewicht sind.

Beispiel:

Welche Wärme muss einem Bauteil aus Eisen mit der Masse $m = 0.8\,\mathrm{kg}$ zugeführt werden, damit es sich von 20 °C auf 400 °C erwärmt? ($c_w = 540\,\mathrm{J/(kg\ K)}$)

$$\Delta Q = 540\,\mathrm{J/(kg\ K)} \cdot 0.8\,\mathrm{kg} \cdot (400 - 20)\,\mathrm{K} = 164\,\mathrm{kJ} = 164 \cdot 10^3\,\mathrm{Ws}\ .$$

Der Temperaturausgleich geschieht über den *Wärmestrom*:

$$\Phi = \frac{Q}{t} \qquad \text{mit} \quad [Q] = 1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}}\ .$$

Aus der Einheit erkennt man schon, dass man den Wärmestrom mit der elektrischen Leistung P gleichsetzen kann. Genau genommen gilt:

$$\text{elektrische Leistung } P_v \Longrightarrow \frac{\text{thermische Energie}}{\text{Zeiteinheit}} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Aufheizung (instationär)} \\ \text{Wärmestrom } \Phi \text{ (stationär)} \end{cases}$$

Im stationären Fall und bei konstanter Umgebungstemperatur gilt: $P_v = \Phi$.

A.9.2 Wärmedurchgang

Wärme wird von einem System höherer Energie (Temperatur) an das System niedrigerer Temperatur abgegeben. Dieser *Wärmedurchgang* lässt sich in drei Übertragungsmechanismen einteilen:

Wärmeleitung Energieübertragung gekoppelter Gitterschwingungen (Phononentransport) und durch bewegliche Ladungsträger (freie Elektronenbewegung)

Konvektion Wärmeübertragung durch freie oder erzwungene Strömung von Materie (Massentransport), Durchmischung von Flüssigkeiten und Gasen

Wärmestrahlung Energieübertragung durch elektromagnetische Strahlung (Photonentransport), alleiniger Mechanismus bei Vakuum.

A.9.3 Wärmeleitung

Die Wärmeleitung ist temperaturabhängig. Vereinfacht gilt (Abb. A.56):

$$\Phi = \lambda\ \frac{A}{d}\ (T_1 - T_2)$$

mit

d **:** Wanddicke

A **:** Fläche

λ **:** Wärmeleitfähigkeit, Einheit $[\lambda] = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$

Da die Wärme auch durch bewegliche Ladungsträger geleitet wird (Elektronenbewegung), folgt daraus, dass elektrisch gut leitende Metalle auch gute Wärmeleiter sind. Bei nicht zu tiefen Temperaturen ist die Wärmeleitung λ proportional zur elektrischen Leitfähigkeit κ.

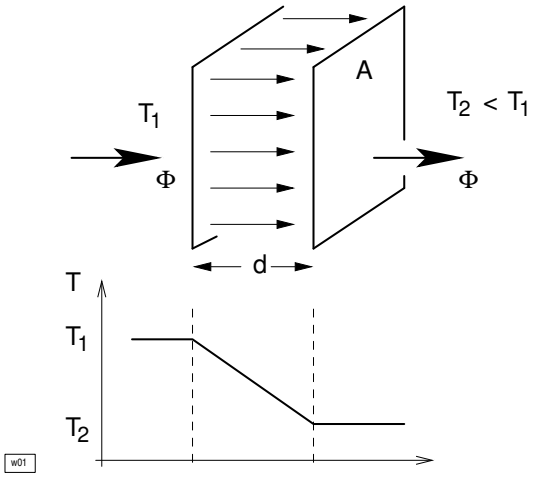


Abb. A.56: Wärmeleitung

A.9.4 Konvektion

Beim konvektiven Wärmeübergang findet die Wärmeübertragung zwischen zwei thermodynamischen Systemen statt, die sich relativ zueinander bewegen, z. B. Flüssigkeiten, Gase an einer Wand (Abb. A.57). Entsteht die Strömung durch innere Ursachen (eigene Auftriebskräfte), spricht man von *freier Konvektion*. Entsteht eine Zwangsströmung durch äußere Kräfte, handelt es sich um *erzwungene Konvektion*.

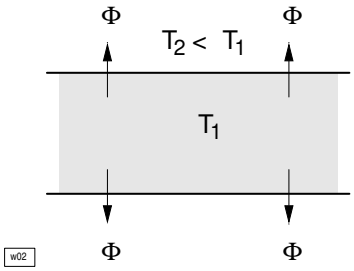


Abb. A.57: Konvektion

$$\Phi = \alpha_k \; A \; (T_1 - T_2) \quad \text{mit} \tag{A.23}$$

A **:** Fläche

α_k **:** Wärmeübergangskoeffizient, Einheit $[\alpha_k] = 1 \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \, K}}$

α_k berücksichtigt die unterschiedlichen Arten der Konvektion.

A.9.5 Wärmestrahlung

Die Wärmestrahlung hängt von der Oberflächenbeschaffenheit (Farbe, Rauhigkeit) des *Temperaturstrahlers* ab. Nach Abb. A.58 unterscheidet man folgende Größen:

Reflexionsgrad: $\rho = \dfrac{\Phi_r}{\Phi_e}$

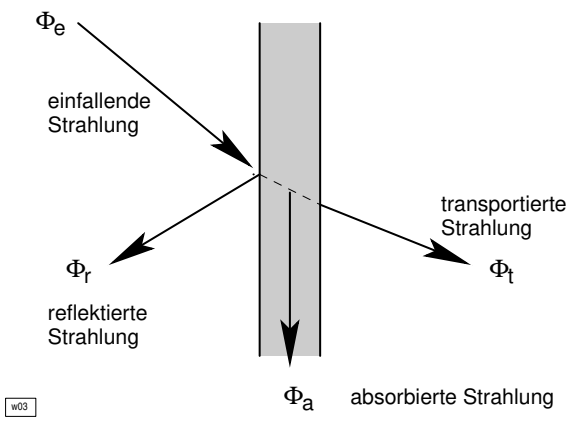


Abb. A.58: Wärmestrahlung

Absorptionsgrad: $\alpha = \dfrac{\Phi_a}{\Phi_e}$

Emssionsgrad: $\epsilon = \alpha$ (Kirchhoffsches Strahlungsgesetz)

Transmissionsgrad: $\tau = \dfrac{\Phi_t}{\Phi_e}$

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$\rho + \tau + \alpha = 1 \qquad \text{oder} \qquad \Phi_e = \Phi_r + \Phi_t + \Phi_a \ .$$

Den Absorptions-/Emissionsgrad erhält man durch Vergleich mit einem absolut schwarzen Körper, für den gilt $\alpha = \epsilon = 1$.

Die Wärmestrahlung ist temperaturabhängig: $\Phi = f(T^4)$.

A.9.6 Analogien zum elektrischen Strömungsfeld

Die physikalischen Vorgänge lassen sich durch ein elektrisches Netzwerk nachbilden. Die thermischen Größen lassen sich den elektrischen Größen entsprechend Tabelle A.1 zuordnen. Bildet man analog zum Ohmschen Gesetz den Quotient aus Temperatur und Wärmestrom, erhält man den *Wärmewiderstand* R_{th} mit der Einheit $[R_{\text{th}}] = 1\ \frac{\text{K}}{\text{W}}$.

Tabelle A.1: Analogien zwischen thermischen und elektrischen Größen

thermische Größe	elektrische Größe
Temperatur T	Spannung U
Wärmestrom Φ	Strom I
Wärmekapazität C_w	Kapazität C
Wärmewiderstand R_{th}	Widerstand R

Der Wärmewiderstand enthält bereits die bei der Wärmeübertragung entstehenden »Temperaturverluste« (Wärmeleitung, -strahlung, Konvektion) und ist eine praktische Größe, die man aus

Tabellen und Datenblätter direkt entnehmen kann. Damit vereinfachen sich die Temperaturberechnungen erheblich.

Zwischen Temperatur, Wärmewiderstand und Wärmequelle besteht analog zum Ohmschen Gesetz der einfache Zusammenhang

$$R_{\mathrm{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{\Delta T}{P_v} \,.$$

Untersucht man stationäre Zustände, haben die Wärmekapazitäten keinen Einfluss auf die Temperaturen (wie bei einem Gleichstromkreis). Bei instationären Vorgängen und einem *Einkörpersystem* bilden Wärmewiderstand und Wärmekapazität eine *thermische Zeitkonstante*, der Temperaturverlauf (Aufheizung, Abkühlung) muss über eine Differentialgleichung berechnet werden. Bei Anordnungen, die aus mehreren Einzelteilen bestehen (*Mehrkörpersystem*), führt die Berechnung zu einem gekoppelten Differentialgleichungssystem mit mehreren Zeitkonstanten.

Die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität lässt sich mit spannungsabhängigen Kapazitäten, wie man sie auch bei der Berechnung von Halbleiterersatzschaltbildern verwendet, nachbilden.

Anordnungen mit Nichtlinearitäten und Mehrkörpersysteme lassen sich im allg. nur numerisch berechnen.

A.9.7 Beispiele

Transistor, stationär

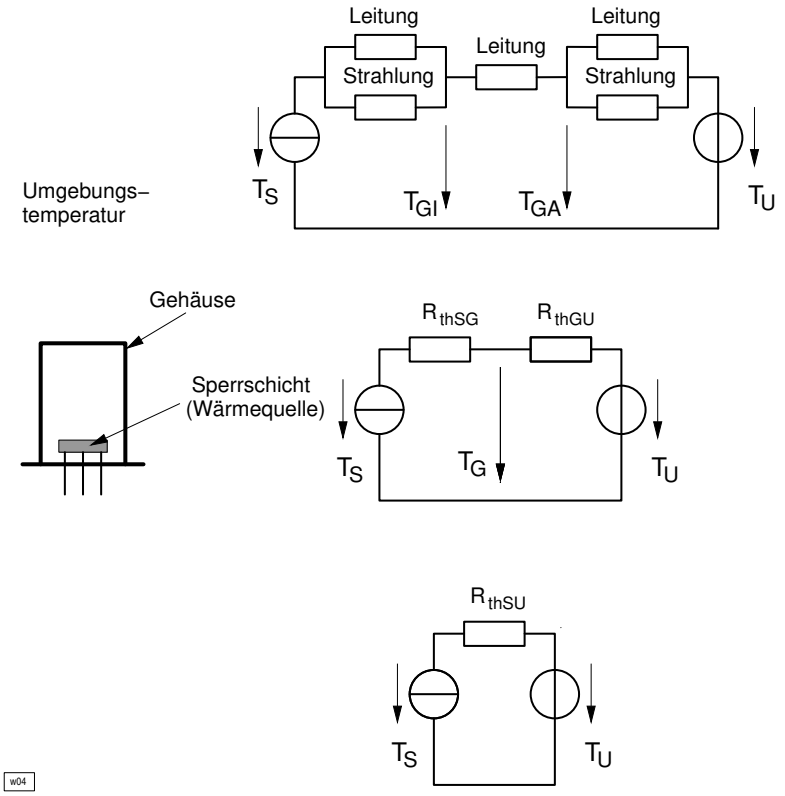


Abb. A.59: Stationäre Erwärmung eines Transistors

Abb. A.59 zeigt thermische Ersatzschaltbilder eines Transistors. Die Wärme (Verlustleistung) entsteht in der Sperrschicht, hier dargestellt als eine ideale Stromquelle und wird an die Umgebung mit der Temperatur T_U abgegeben (ideale Spannungsquelle). Durch die unterschiedlichen Wärmewiderstände stellen sich die Sperrschichttemperatur T_S, Gehäusetemperaturen T_{GI} (innen) und T_{GA} (außen) ein. Datenblätter der Hersteller geben im allg. den inneren Wärmewiderstand R_{thSG} und den äußeren R_{thGU} oder noch einfacher den Gesamtwärmewiderstand R_{thSU} an.

Für den Schaltungsentwickler ist die maximale Verlustleistung wichtig, die ein Transistor entwickeln darf, damit er seine Sperrschichttemperatur nicht überschreitet.

Zahlenbeispiel

Umgebungstemperatur $T_U = 30\,^{\circ}\mathrm{C}, R_{\mathrm{thSG}} = 140\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}, R_{\mathrm{thGU}} = 60\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$
maximale Sperrschichttemperatur $T_S = 150\,^{\circ}\mathrm{C}$

Wie groß darf die maximale Verlustleistung im Transistor sein?

$$P_v = \frac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}} = \frac{T_G - T_U}{R_{\mathrm{thSG}} + R_{\mathrm{thGU}}} = \frac{(150-30)\,\mathrm{K}}{(140+60)\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}} = 0.6\,\mathrm{W}$$

Welche Gehäusetemperatur stellt sich bei dieser Verlustleistung ein?

$$T_S - T_G = R_{\mathrm{thSG}}\ P_v \quad \longrightarrow \quad T_G = T_S - R_{\mathrm{thSG}}\ P_v = (150 - 140 \cdot 0.6)\,^{\circ}\mathrm{C} = 66\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Transistor, instationär

Abbildung A.60 zeigt einen Transistor im TO5-Gehäuse sowie das thermische Ersatzschaltbild. Laut Datenblatt beträgt der innere Wärmewiderstand $R_{TI} = 180\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$, der Widerstand zwischen dem TO5-Gehäuse und der Umgebungsluft beträgt etwa $R_{TA} = 300\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$. Durch den Sockel wird ebenfalls Wärme auf die Platine übertragen mit $R_{TP} = 120\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$. Die Umgebungsluft wird mit $T_L = 25\,^{\circ}\mathrm{C}$, die Temperatur der Platine wegen der Erwärmung durch andere Bauelemente mit $T_P = 35\,^{\circ}\mathrm{C}$ angenommen. Wegen des instationären Vorgangs müssen die Wärmekapazitäten der Sperrschicht und des Gehäuses berücksichtigt werden. Für die Sperrschicht wird ein Wert $C_S = 0.75\,\frac{\mathrm{W\,s}}{\mathrm{K}}$ eingesetzt, für das Gehäuse C_G wird der 10-fache Wert angenommen. Gehäuse und Sperrschicht haben vor dem Einschalten Umgebungstemperatur.

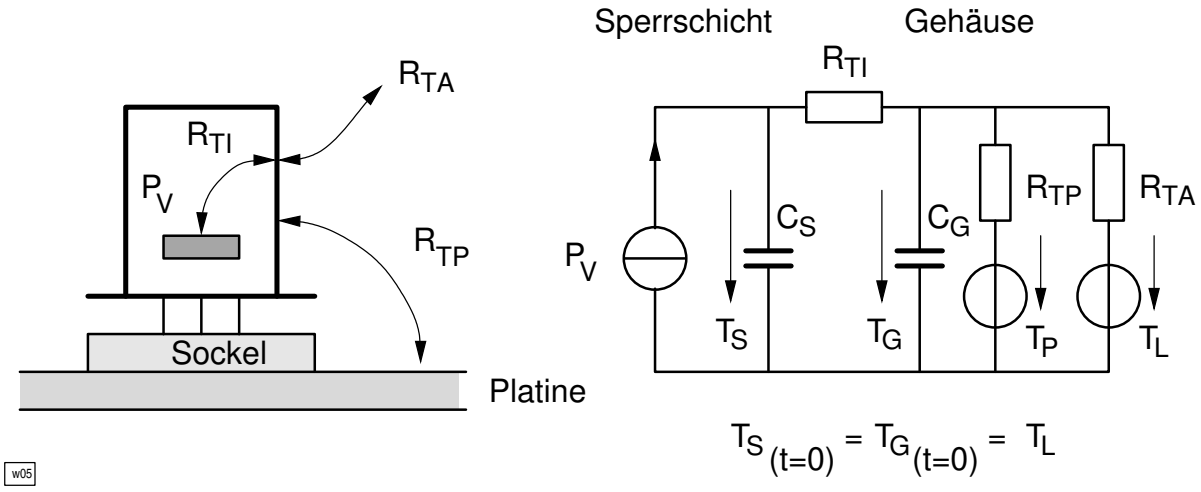


Abb. A.60: Instationäre Erwärmung eines Transistors

Hier handelt es sich um ein lineares Zwei-Körper-Problem. Es wird ein kombinierter Ein- und Ausschaltvorgang untersucht. Der Transistor wird für 1000 s eingeschaltet und erzeugt während dieser Zeit in seiner Sperrschicht eine konstante Verlustleistung $P_v = 0.5\,\mathrm{W}$. Abbildung A.61

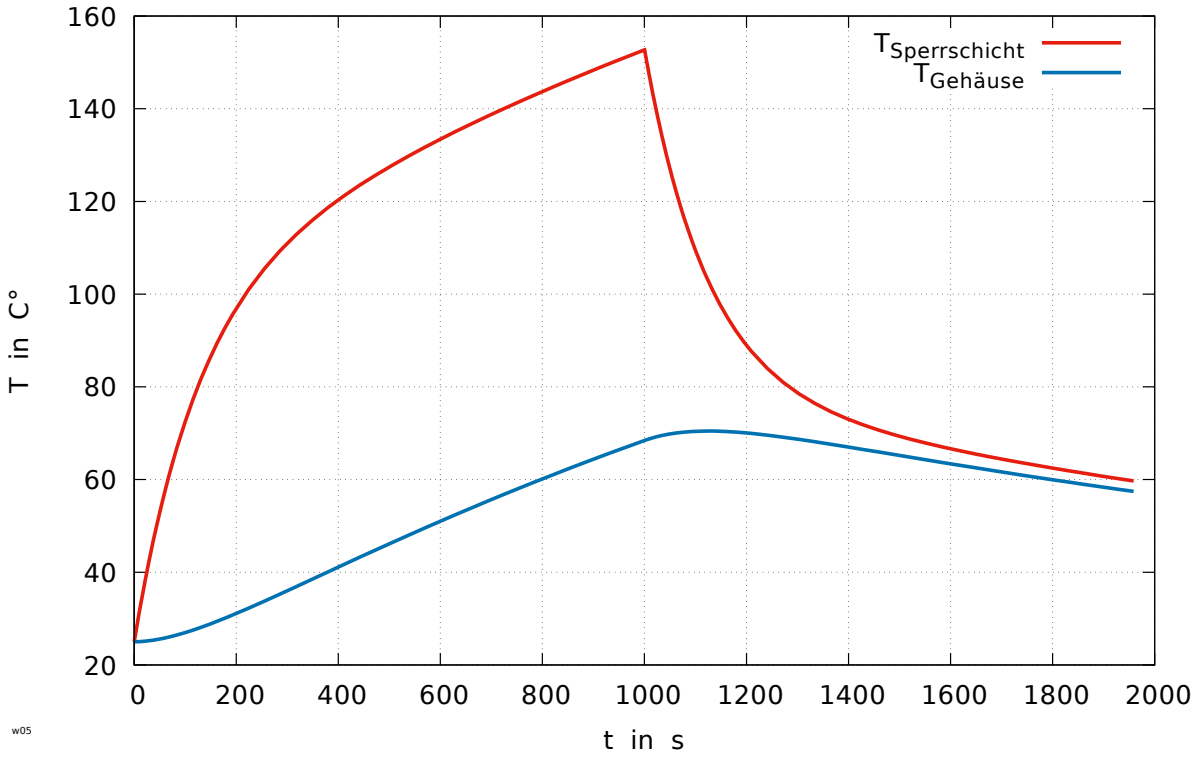


Abb. A.61: Sperrschicht- und Gehäusetemperatur

zeigt den zeitlichen Verlauf der Sperrschicht- und Gehäusetemperatur. Man erkennt deutlich, dass nach dem Ausschalten die Gehäusetemperatur noch ansteigt (Gefahr des Wärmestaus).

A.10 Ähnlichkeitsgesetze

Referenz: [33]

Will man eine Baureihe[13] oder Baukästen[14] entwickeln, stellt sich die Frage, ob eine geometrische Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Grundkonstruktion zweckmäßig und richtig ist (*Storchschnabelprinzip*).

Beispiel: Tragfähigkeit der Eigengewichte von Drahtseilen mit unterschiedlichen Querschnitten

Physikalische Vorgänge laufen immer dann ähnlich ab, wenn die vorhandenen Grundgrößen (Tabelle A.2) in einem festen Verhältnis zueinander stehen.

Tabelle A.2: Grundgrößen

Größe	Maßstabsfaktor
Länge	φ_L
Zeit	φ_t
Kraft	φ_F
Temperatur	φ_T
el. Ladung	φ_q
Lichtstärke	φ_B

☞ Abgeleitete Größen sind im allg. nicht ähnlich.

Es gibt kombinierte Ähnlichkeiten:

kinematisch: $\varphi_L, \varphi_t = \text{const}$

statisch: $\varphi_L, \varphi_F = \text{const}$

dynamisch: $\varphi_L, \varphi_F, \varphi_t = \text{const}$

thermisch: $\varphi_L, \varphi_T(, \varphi_t) = \text{const}$.

Um eine bestimmte Ähnlichkeit zu erhalten, kann das durch Anpassung mittels der nicht ähnlichen Größen geschehen.

A.10.1 Geometrische Ähnlichkeit

Sie liegt vor, wenn das Verhältnis der Abstände jeweils zweier entsprechender Punkte in der Grundkonstruktion und der neuen Konstruktion gleich ist.

Beispiel: Eisenkerne von Kleintransformatoren

Maßstab (*Stufensprung*): φ

- Grundabmessungen: a_0, l_0
- neue Abmessungen: $a_1 = a_0\varphi, l_1 = l_0\varphi$

[13] eine Funktion des Gerätes in mehreren Größenstufen
[14] mehrere Funktionen in mehreren Größenstufen

- Längenmaßstab: $\varphi_L = \dfrac{l_1}{l_0} = \dfrac{a_1}{a_0} = \text{const}$
- Flächenmaßstab: $\varphi_A = \dfrac{A_1}{A_0} = \dfrac{l_1 a_1}{l_0 a_0} = \dfrac{l_0 \varphi_L a_0 \varphi_L}{l_0 a_0} = \varphi_L^2$
- Volumenmaßstab: $\varphi_V = \dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{l_1 a_1 a_1}{l_0 a_0 a_0} = \varphi_L^3$
- Gewichtsmaßstab: $\varphi_G = \dfrac{G_1}{G_0} = \dfrac{\rho V_1 g}{\rho V_0 g} = \varphi_L^3$

Der Gewichtsmaßstab lässt sich durch Verwendung unterschiedlicher Werkstoffe (ρ_1, ρ_0) verändern:

$$\varphi_G = \varphi_L^3 \varphi_\rho \quad \text{mit} \quad \varphi_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

☞ Eine rein geometrische Vergrößerung oder Verkleinerung führt zu Veränderungen der Beanspruchungsverhältnisse.

A.10.2 Zeitliche Ähnlichkeit

Sie liegt vor, wenn bei einem Vorgang zwischen der Grundkonstruktion und der neuen Ausführung sich die Zeiten in festen Verhältnissen zuordnen lassen.

Zeitmaßstab: $\varphi_t = \dfrac{t_1}{t_0} = \text{const}$

Bei gleichzeitig ähnlicher Geometrie $(\varphi_L \neq 1)$ erhält man:

- Geschwindigkeit: $\varphi_v = \dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{l_1}{t_1}\dfrac{t_0}{l_0} = \dfrac{l_1}{l_0}\dfrac{t_0}{t_1} = \dfrac{\varphi_L}{\varphi_t}$
- Beschleunigung: $\varphi_b = \dfrac{b_1}{b_0} = \dfrac{l_1^2}{t_1^2}\dfrac{t_0^2}{l_0^2} = \dfrac{l_1^2}{l_0^2}\dfrac{t_0^2}{t_1^2} = \dfrac{\varphi_L}{\varphi_t^2}$

Wird die Geometrie beibehalten, muss in den o. a. Beziehungen $\varphi_L = 1$ gesetzt werden.

Beispiel: Gerät für unterschiedliche Drehzahlen bei gleicher Baugröße.

A.10.3 Dynamische Ähnlichkeit

Für viele Entwicklungen muss dynamische Ähnlichkeit erreicht werden, d. h. für jeden Entwurf müssen z. B. die eingeprägten Kräfte mit den Trägheitskräften in einem festen Verhältnis stehen.

Kraftmaßstab: $\varphi_F = \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{m_1 b_1}{m_0 b_0} = \dfrac{\rho_1 V_1 b_1}{\rho_0 V_0 b_0} = \varphi_\rho \varphi_L^3 \dfrac{\varphi_L}{\varphi_t^2} = \dfrac{\varphi_\rho \varphi_L^4}{\varphi_t^2}$

Anpassung lässt sich durch Änderungen der Werkstoffe ρ, der geometrischen Abmessungen l und der Geschwindigkeiten v erreichen.

Die *Newton Kennzahl* **Ne** ergibt sich aus

$$\mathrm{Ne} = \frac{F_1}{\rho_1 l_1^2 v_1^2} = \frac{F_0}{\rho_0 l_0^2 v_0^2} = \frac{\text{eingeprägte Kräfte}}{\text{Trägheitskräfte}}$$

und ist *konstant* bei dynamischer Ähnlichkeit.

A.10.4 Ähnlichkeit bei gleicher Beanspruchung

Maßstab der Normalspannung: $\varphi_\sigma = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_0} = 1$ (Forderung!!)

Man erreicht diese Forderung durch folgende Maßnahmen:

- Maßstab der Elastizitätsmodule $\varphi_E = E_1/E_0 = 1$, d. h. gleiche Werkstoffe benutzen.
- Daraus folgt, dass alle elastischen Verformungen Δl geometrisch ähnlich sein müssen: $\Delta l_1/\Delta l_0 = \varphi_L$.
- Über den Kraftmaßstab φ_F ergibt sich die *Hooke Kennzahl* **Ho**

  $$\mathrm{Ho} = \frac{F_1}{E_1 L_1^2} = \frac{F_0}{E_0 L_0^2} \,,$$

  die die Verformung beschreibt und *konstant* sein muss.
- Der Kraftmaßtab φ_F der Trägheitskraft und der elastischen Kraft muss gleich sein. Daraus folgt bei gleichem Werkstoff für den Geschwindigkeitsmaßstab: $\varphi_v = 1$. Allgemein wird diese Forderung durch die *Cauchy Kennzahl* **Ca** beschrieben

  $$\mathrm{Ca} = \frac{\rho_1 v_1^2}{E_1} = \frac{\rho_0 v_0^2}{E_0} \,,$$

  die *konstant* sein muss.

Setzt man die Bedingungen von Cauchy und Newton voraus, lassen sich daraus die Maßstabsfaktoren anderer physikalischer Größen ableiten (Tabelle A.3).

Tabelle A.3: Änderungen bei geometrischer Ähnlichkeit *und* gleicher Beanspruchung

Drehzahlen	φ_L^{-1}
Dehnungen, Spannungen σ, Flächenpressungen infolge Trägheits- und elastischer Kräfte, Geschwindigkeiten	φ_L^0
Federsteife, elastische Verformungen, infolge Schwerkraft: Dehnungen, Spannungen, Flächenpressungen	φ_L^1
Kräfte, Leistungen	φ_L^2
Gewichte, Drehmomente, Torsionssteifigkeit, Widerstandsmomente	φ_L^3
Flächenträgheitsmomente	φ_L^4
Massenträgheitsmomente	φ_L^5

A.10.5 Thermische Ähnlichkeit

Bei thermischer Ähnlichkeit muss φ_T konstant sein.

Für den Wärmestrom $\dot{Q}$ gilt

$$\dot{Q} = \overbrace{c\,m\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}}^{\text{Wärmespeicher}} = \overbrace{\alpha\,A\,\Delta T}^{\text{Wärmeübergang}} = \overbrace{\frac{\lambda}{s}\,A^*\,\Delta T^*}^{\text{Wärmeleitung}} .$$

Für den Wärmemengenmaßstab erhält man dann

$$\varphi_{\dot{Q}} = \frac{c_1\rho_1 V_1 \mathrm{d}T_1 \mathrm{d}t_0}{c_0\rho_0 V_0 \mathrm{d}T_0 \mathrm{d}t_1} = \frac{\alpha_1 A_1 \Delta T_1}{\alpha_0 A_0 \Delta T_0} = \frac{\lambda_1 s_0 A_1^* \Delta T_1^*}{\lambda_0 s_1 A_0^* \Delta T_0^*}$$

und ausgedrückt durch Maßstabsfaktoren

$$\varphi_{\dot{Q}} = \varphi_c \varphi_\rho \varphi_L^3 \varphi_T \frac{1}{\varphi_t} = \varphi_\alpha \varphi_L^2 \varphi_T = \varphi_\lambda \frac{1}{\varphi_L} \varphi_L^2 \varphi_T \,.$$

Aus dem Verhältnis von geleiteter Wärmemenge zu gespeicherter Wärmemenge erhält man die *Fourier Kennzahl* **Fo**

$$\mathrm{Fo} = \frac{\lambda_1 t_1}{c_1 \rho_1 L_1^2} = \frac{\lambda_0 t_0}{c_0 \rho_0 L_0^2} \,,$$

die *konstant* sein muss. Der Ausdruck $\lambda/c\rho$ ist eine Stoffkonstante und beschreibt die Temperaturleitfähigkeit. Man erkennt, dass bei geforderter geometrischer Ähnlichkeit keine thermische Ähnlichkeit aufgrund instationärer Vorgänge möglich ist. Die Fourier Kennzahl wird zum Vergleich instationärer Vorgänge herangezogen.

Das Verhältnis Wärmeübergang zu Wärmeleitung liefert die *Biot Kennzahl* **Bi**

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha_1 L_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_0 L_0}{\lambda_0} \,,$$

die *konstant* sein muss. Bei gleichem Werkstoff ($\lambda_1 = \lambda_0, \alpha_1 = \alpha_0$) und geometrischer Ähnlichkeit ($L_1 \neq L_0$) ist keine thermische Ähnlichkeit gegeben.

☞ In der Elektrotechnik tritt Wärme meistens als Verlustwärme auf. Deshalb ist eine thermische Ähnlichkeit bei geometrischer Ähnlichkeit sogar unerwünscht.

A.11 Wachstumsgesetze

Referenz: [34]

Bei der Projektierung neuer Geräte interessiert den Konstrukteur, wie sich dieses Gerät hinsichtlich seiner physikalischen Eigenschaften verhalten wird bei vorgegebenen Randbedingungen.

Eine solche »Voraussage« liefern eingeschränkt die *Wachstumsgesetze*. Sie lassen sich herleiten aus den Ähnlichkeitsgesetzen (siehe Ähnlichkeitsgesetze). Im allgemeinen benutzt man als Parameter die Länge und geht von einer geometrischen Ähnlichkeit aus. Als Randbedingungen fordert man zum Beispiel, dass die elektromagnetischen und mechanischen Beanspruchungen konstant bleiben sollen, da diesen Größen im allg. Grenzen gesetzt sind, die man ohne großen, technologischen Aufwand kaum überschreiten wird.

In den folgenden Herleitungen werden folgende Annahmen getroffen:

☛ Die elektrische Stromdichte S[15] und die magnetische Flussdichte (Induktion) B sollen konstant bleiben.

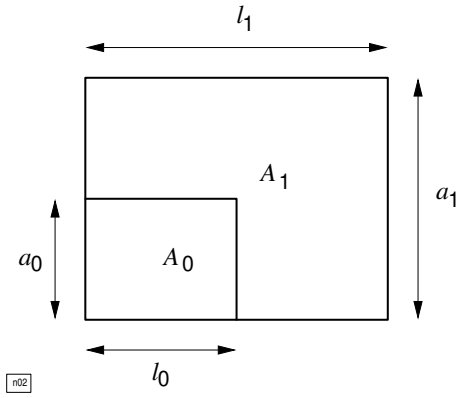
Der Längenmaßtab φ_L ist definiert als Quotient der Grundabmessungen a_0, l_0 und den neuen Abmessungen a_1, l_1, also

$$\varphi_L = \frac{l_1}{l_0} = \frac{a_1}{a_0} \; .$$

Daraus folgt

$$l_1 = l_0 \; \varphi_L \qquad \text{bzw.} \qquad a1 = a_0 \; \varphi_L$$

Fläche A



$$A_0 = a_0 \; l_0$$
$$A_1 = a_1 \; l_1 = a_0 \; \varphi_L \; l_0 \; \varphi_L = A_0 \; \varphi_L^2$$

$$A \sim \varphi_L^2$$

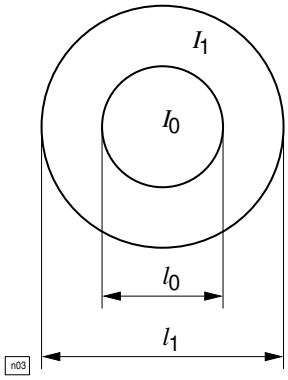
Spannung U

$$U_0 = \frac{\Phi_0}{t} = \frac{BA_0}{t} = \frac{B}{t} \; l_0 \; a_0$$
$$U_1 = \frac{B}{t} \; l_1 \; a_1 = \frac{B}{t} \; \varphi_L^2 \; a_0 \; l_0 = U_0 \; \varphi_L^2$$

$U \sim \varphi_L^2$ falls t konstant bleibt

[15] Für die Stromdichte wird an anderer Stelle meistens die Formelgröße J verwendet. Damit es nicht zu Verwechselungen mit dem Trägheitsmoment J kommt, wird in diesem Kapitel die Stromdichte mit dem Buchstaben S gekennzeichnet.

Strom I



$$I_0 = S\ A_0 = S\ \frac{l_0^2}{4}\ \pi$$
$$I_1 = S\ A_1 = S\ \frac{l_1^2}{4}\ \pi = S\ \frac{(\varphi_L\ l_0)^2}{4}\ \pi = S\ A_0\ \varphi_L^2$$

$I \sim \varphi_L^2$

Widerstand R

$$R_0 = \frac{l_0}{A_0}\ \rho$$
$$R_1 = \frac{l_1}{A_1}\ \rho = \frac{\varphi_L\ l_0}{A_0\ \varphi_L^2}\ \rho = R_0\ \frac{1}{\varphi_L}$$

$R \sim \varphi_L^{-1}$

Leistung P

$$P_0 = U_0\ I_0$$
$$P_1 = U_1\ I_1 = U_0\ \varphi_L^2\ I_0\ \varphi_L^2 = P_0\ \varphi_L^4$$

$P \sim \varphi_L^4$

Verlustleistung P_V

$$P_{V0} = I_0^2\ R_0$$
$$P_{V1} = I_1^2\ R_1 = (I_0\ \varphi_L^2)^2\ R_0\ \varphi_L^{-1} = P_{V0}\ \varphi^3$$

$P_V \sim \varphi_L^3$

Masse m

$m \sim \varphi_L^3$ bei gleichem Werkstoff

Massenträgheitsmoment J

$$J = \int r^2\ \mathrm{d}m \sim \varphi_L^2\ \varphi_L^3$$

$J \sim \varphi_L^5$

Drehmoment einer elektrischen Maschine M

$$M = k\ \Phi\ I \sim \varphi_L^2\ \varphi_L^2$$

$$M \sim \varphi_L^4$$

Wirkungsgrad η

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{zu} - P_v}{P_{zu}} = 1 - \frac{P_v}{P_{zu}} \sim 1 - \frac{\varphi_L^3}{\varphi_L^4}$$

$$\eta \sim 1 - \tfrac{1}{\varphi_L}$$

Endtemperatur T_e

Geht man davon aus, dass im stationären Betrieb die gesamte Verlustwärme über die Oberfläche durch Konvektion abgeführt wird, lässt sich für die Endtemperatur T_e entsprechend der Gleichung (A.23) schreiben

$$T_e \approx \frac{P_v}{\alpha\ A} \sim \frac{\varphi_L^3}{\varphi_L^2}$$

$$T_e \sim \varphi_L$$

Thermische Zeitkonstante τ

Für ein Einkörpersystem vollzieht sich die Erwärmung nach einer e-Funktion:

$$T(t) = T_e\ (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad \text{mit der thermischen Zeitkonstanten} \qquad \tau = \frac{c\ m}{\alpha\ A} \sim \frac{\varphi_L^3}{\varphi_L^2}$$

$$\tau \sim \varphi_L$$

Die Wachstumsgesetze in der vorliegenden Form liefern nur eingeschränkte Aussagen über die zu erwartenden physikalischen Eigenschaften. Viele Einflussgrößen wurden vernachlässigt (z. B. Eisenverluste). Man erkennt aber prinzipielle Tendenzen: mit wachsenden Abmessungen nimmt die umgesetzte Leistung zu. Da die Oberflächen langsamer zunehmen als die Verluste, steigt die Endtemperatur des Gerätes. Entsprechend muß man die Kühlung intensivieren und/oder z. B. auf höhere Isolierstoffklassen umsteigen.

In der Praxis wird man u. U. andere Kriterien anwenden und auf andere verzichten (z. B. gleiche Endtemperatur bei veränderlicher Drehzahl). Dies führt im allg. zu etwas anderen Gesetzmäßigkeiten.

A.12 Normzahlen

Referenzen: [33, 35]

> Hinweis: um Verwechselungen zu vermeiden und zur Wahrung eines einheitlichen Schriftbildes werden in diesem Abschnitt alle Dezimalzahlen mit Dezimalpunkt gesetzt und Aufzählungen durch Kommata getrennt.

Zur Vermeidung willkürlicher Abstufungen bei der Entwicklung technischer, physikalischer und ökonomischer Größen (siehe Ähnlichkeitsgesetze) führt man Normzahlen (Vorzugszahlen) ein. Sie entstehen, indem man einen Zahlenbereich so aufteilt, dass das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Zahlen konstant ist (geometrische Reihe). Als sinnvoller Zahlenbereich erweist sich eine volle Dekade

$$10^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; .$$

Die Normzahlen zu einer Dekade erhält man aus

$$a_0 = 10^k, \quad a_1 = a_0\varphi, \quad a_2 = a_0\varphi^2, \quad \ldots, \quad a_n = a_0\varphi^n = 10^{k+1}$$

mit dem *Stufensprung* $\varphi = \sqrt[n]{10}$, der Stufenzahl n und der Gliederzahl $n+1$.

> Beispiel: Mit $n = 10$ erhält man den Stufensprung $\varphi = \sqrt[10]{10} = 1.2589\ldots$ (Genauwert), gewählt wird $\varphi = 1.25$ (Hauptwert). Dies ergibt die Reihe R10 (nach DIN 323):
>
> 1 1.25 1.6 2 2.5 3.15 4 5 6.3 8 10 .

Standardisiert sind die *Grundreihen* R5, R10, R20 und R40.

Können die Hauptwerte aus praktischen Gründen nicht eingehalten werden (z. B. wegen Berücksichtigung handelsüblicher Größen), darf man auf *Rundwertreihen* R′ und R″ übergehen.

Benutzt man nur jeden p-ten Wert der Grundreihe Rn, ergibt sich der Stufensprung zu

$$\varphi' = \varphi^p = (\sqrt[n]{10})^p = 10^{\frac{p}{n}}$$

und man erhält die *abgeleitete Reihe* Rn/p.

> Beispiel: Die Reihe R20/3 hat den Stufensprung $\varphi' = 1.12^3 \approx 1.4$ und man erhält die Werte 1.0, 1.4, 2.0, 2.8, 5.6 und 8.0. Dies entspricht z. B. der Abstufung für die Blendenwerte einer fotografischen Kamera.
>
> Welcher abgeleiteten Reihe entstammen unsere Geldabstufungen (1, 2, 5, 10,…)?
>
> Lösung: $\varphi' = \sqrt[3]{10} = 2.15$ entspricht der Reihe **R10/3**.

Erfolgt die Abstufung nach einer geometrischen Reihe, empfindet man gefühlsmäßig eine gleichmäßige Abstufung (Licht-/Lautstärke, Größe).

☞ »Ein physiologischer Reiz muss etwa geometrisch wachsen, um als arithmetisch gesteigert empfunden zu werden.« (*Weber-Fechnersches Gesetz, 1846*)

Grobe Abstufungen erhöhen die Stückzahlen je Größe und erlauben damit eine wirtschaftliche Gestaltung von Serienprodukten. Die Lagerhaltung von Ersatz- und Zulieferteilen vereinfacht sich, man spart Arbeitsmittel der Fertigung ein (Werkzeuge, Lehren).

Bei der Dimensionierung von Konstruktionselementen verwendet man die Normzahlen der Rundwertreihe R' als *Normmaße*, z. B. bei der Auswahl der Hauptabmessungen, bei Anschlussmaßen (wegen der Austauschbarkeit), bei Passungen (wegen der Anzahl der Lehren).

Beim *Rechnen* mit Normzahlen gelten folgende Regeln:

- Liegt der Länge die Reihe Rn mit dem Stufensprung φ zugrunde, ergeben sich
  - für die Fläche die Reihe R$n/2$ mit φ^2
  - für das Volumen die Reihe R$n/3$ mit φ^3 und
  - für das Flächenträgheitsmoment die Reihe R$n/4$ mit φ^4.
- Produkte, Quotienten und ganzzahlige Potenzen von Normzahlen ergeben wieder Normzahlen.
- Summen und Differenzen ergeben im allg. keine Normzahlen.

Elektrische Bauelemente, wie Widerstände und Kondensatoren, werden nach der *internationalen E-Reihe* gestuft, bei der die Stufenzahlen n=3, 6, 12, 24 und 48 festgelegt ist (E3, E6, E12, E24, E48). Die Fertigungstoleranz entscheidet über die Klasseneinteilung. Es gilt:

E3 ($> \pm 20\,\%$) 1.0, 2.2, 4.7

E6 ($\pm 20\,\%$) 1.0, 1.5, 2.2, 3.3, 4.7, 6.8

E12 ($\pm 10\,\%$) 1.0, 1.2, 1.5, 1.8, 2.2, 2.7, 3.3, 3.9, 4.7, 5.6, 6.8, 8.2

E24 ($\pm 5\,\%$) ...

E48 ($< \pm 2\,\%$) ...

Die Kennzeichnung erfolgt im allg. durch Farbringe.

> Beispiel: Für die Entwicklung einer Baureihe von Getriebemotoren mit unterschiedlicher Übersetzung sind vorgegeben: 8 Baugrößen, kleinste Drehzahl 1 min^{-1} bei einem Drehmoment von 1 Nm. Die weiteren Drehzahlen sollen sich nach der Reihe R10/3 und die abnehmenden Drehmomente nach der Grundreihe R10 orientieren. Gesucht ist weiterhin die Leistungen der Baureihe.
>
> Lösung: Stufensprung der abgeleiteten Reihe R10/3 für die Drehzahlen: $\varphi_n = 10^{\frac{3}{10}} \approx 2$. Daraus ergibt sich die Drehzahlreihe n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 und 128 min^{-1}. Zur Momentenberechnung benötigt man den Stufensprung der Grundreihe R10: $\varphi_M = 10^{\frac{1}{10}} \approx 1.25$ und damit die Momentenreihe M = 1, 0.8, 0.64, 0.512, 0.41, 0.32, 0.262 und 0.21 Nm. Die Leistung berechnet sich aus der Formel $P = \omega\ M = \frac{2\pi}{60} n\ M$. Mit den entsprechenden Drehzahlen und Drehmomenten erhält man die Leistungsreihe P = 0.1, 0.16, 0.268, 0.429, 0.687, 1.07, 1.76 und 2.81 W. Mit $a_0 = 0.1, a_7 = 2.81$ und n = 7 ergibt sich der Stufensprung der Leistung zu $\varphi_P^7 = \frac{2.81}{0.1}$ und daraus $\varphi_P = 28.1^{\frac{1}{7}} = 1.61$. Dies entspricht der Grundreihe R5.
>
> Beispiel: Für die Fertigung einer Lötkolbenreihe soll die Anschlussleistung nach der Reihe R5/2 gestuft werden. Der kleinste Lötkolben hat eine Leistung von 10 W. Es sollen 5 Leistungsstufen angeboten werden. Welche Leistungen sind dies?
>
> Lösung: Stufensprung der Leistung: $\varphi_L = \left(\sqrt[5]{10}\right)^2$. Daraus folgt die Leistungsreihe P = 10, 25, 63, 160 und 400 W.

Für die Baugrößen elektrischer Maschinen existiert eine Auswahlreihe, die sich auf die Achshöhe bezieht und genormt ist (siehe [5, Anbaumaße] und Kapitel Baugröße).

Literatur

[1] Wolf-Rainer Novender. „Elektrische Maschinen. Vorlesungsskript“. https://www.thm.de/iem/novender/skripte-novender. TH Mittelhessen, Fachbereich IEM, 2021.

[2] W. Müller. „Comparison of Different Methods of Force Calculations“. In: *IEEE Trans. on Magn.* Vol. 26.No. 2 (1990), S. 1058–1061.

[3] K. Humburg. „Die Entstehung des Drehmoments in elektrischen Maschinen“. In: *ETZ* 71.Heft 12 (1950), S. 311–313.

[4] Wilhelm Müller, Werner Fritz und Wolf-Rainer Novender. *Numerische Feldberechnung*. Hrsg. von Wolf-Rainer Novender. https://www.thm.de/iem/novender/profi: Verlag Deutsches Elektronen-Synchrotron, 2016. ISBN: 978-3-945931-05-9.

[5] Herbert Rentzsch. *Handbuch für Elektromotoren*. Hrsg. von BBC Mannheim. 3. Aufl. BBC Fachbuchreihe. Essen: Giradet, 1980.

[6] Eberhard Kallenbach und Gerhard Bögelsack. *Gerätetechnische Antriebe*. München und Wien: Carl Hanser Verlag, 1991.

[7] Wolf-Rainer Novender. „Grundlagen Wechsel-/Drehstrom. Vorlesungsskript und Übungsaufgaben zur Vorlesung ET4 (2009, Peppel)“. https://www.thm.de/iem/novender/skripte-novender. TH Mittelhessen, Fachbereich IEM, 2021.

[8] Georg Bosse. *Grundlagen der Elektrotechnik II*. Bd. 183. BI Hochschultaschenbücher. Mannheim, Wien und Zürich: Bibliographisches Institut, 1978.

[9] R. Boll. *Weichmagnetische Werkstoffe*. 4. Auflage, 1990. VACUUMSCHMELZE GmbH (Hanau). ISBN: 3-8009-1546-4.

[10] Wilfried Weißgerber. *Elektrotechnik für Ingenieure 1*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1992.

[11] Joseph A. Edminister. *Elektrische Netzwerke. Überblicke, Aufgaben*. Schaum's Outline. London, New York: McGraw-Hill Book Company, 1991.

[12] Wolf-Rainer Novender. „SCEPTRE — Ein Programm zur Analyse und Simulation nichtlinearer elektrischer Netzwerke und dynamischer Systeme“. Anwendungsbeispiele. https://www.thm.de/iem/novender/sceptre, 2018.

[13] Wolf-Rainer Novender. „Grundlagen zur Elektrotechnik. Begleitmaterial mit durchgerechneten Beispielen zur Vorlesung ET4 (1992)“. https://www.thm.de/iem/novender/skripte-novender. TH Mittelhessen, Fachbereich IEM, 2021.

[14] Germar Müller. *Elektrische Maschinen. Theorie rotierender elektrischer Maschinen*. 2. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik, 1966.

[15] P. Boer, H. Jordan und W. Freise. *Wechselstrommaschinen*. Vieweg, 1968.

[16] *EBG-Elektroblech-Katalog*. D-44706 Bochum: Gesellschaft für elektromagnetische Werkstoffe mbH, März 1995.

[17] Rolf Tzscheutschler, Helmut Olbrisch und Wolfgang Jordan. *Technologie des Elektromaschinenbaus*. 1. Aufl. Berlin: Verlag Technik GmbH, 1990. ISBN: 3-341-00851-9.

[18] Hans Gath. *Berechnung und Bau von Netztransformatoren*. Stuttgart: Frech-Verlag, 1982.

[19] Rolf Fischer. *Elektrische Maschinen*. Vieweg Verlag, 1992.

[20] Werner Fritz. *Elektrische Maschinen und Antriebe*. Vorlesungsskript. Universität Duisburg, 1997.

[21] Werner Fritz. Private Mitteilungen. Universität Duisburg.

[22] O. Justus. *Dynamisches Verhalten elektrischer Maschinen. Eine Einführung in die Modellierung mit PSPICE*. 2. Auflage. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag, 1993. ISBN: 3-528-14917-5.

[23] Eugen Philippow. *Taschenbuch Elektrotechnik*. Starkstromtechnik. Bd. 2. Berlin: VEB Verlag Technik, 1965.

[24] Eckhard Spring. *Elektrische Maschinen. Eine Einführung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1998. ISBN: 3-540-63423-1.

[25] K. Küpfmüller. „Die magnetischen Feldkräfte an Eisenkörpern“. In: *Archiv für Elektrotechnik* 50.3 (1965), S. 133–143. ISSN: 1432-0487. DOI: 10.1007/BF01574800.

[26] W. Müller. „Kräfteeinwirkung auf Hartmagnete“. Beitrag zum Symposium der Arbeitsgemeinschaft MAGNETISMUS. Bad Nauheim: Deutsche Gesellschaft für Materialkunde e. V., Okt. 1990.

[27] C. Vogel. „Numerische Berechnung der Kraftdichte im Läufer eines Turbogenerators“. Diplomarbeit Nr. 519. TH Darmstadt: FB 17/EW, 1990.

[28] G. Neidhöfer. *Ausgewählte Kapitel des Elektromaschinenbaus*. Vorlesungsskript. Technische Hochschule Darmstadt, 1971.

[29] Joseph Reiser. *Elektrische Maschinen. Gleichstrommaschinen*. Bd. 3. München: Carl Hanser Verlag, 1971.

[30] Wolf-Rainer Novender. „SCEPTRE — Ein Programm zur Analyse und Simulation nichtlinearer elektrischer Netzwerke und dynamischer Systeme“. Benutzerhandbuch. https://www.thm.de/iem/novender/sceptre, 2018.

[31] Ekbert Hering u. a. *Physik für Ingenieure*. ger. 2. Aufl. Düsseldorf: VDI-Verl., 1989. ISBN: 3-18-400903-3.

[32] H. Spiro. *Simulation integrierter Schaltungen durch universelle Rechnerprogramme. Verfahren und Praxis der rechnergestützten Simulation nichtlinearer Schaltungen*. München: Verlag Oldenbourg, 1985.

[33] Gerhard Pahl. *Höhere Konstruktionslehre*. Vorlesungsskript. Technische Hochschule Darmstadt, 1970.

[34] P. F. Brosch. *Moderne Stromrichterantriebe*. Vogel Verlag, 1992.

[35] E. Bürger u. a. *Konstruktionselemente der Feinmechanik*. Hrsg. von Werner Krause. 2. Aufl. München und Wien: Carl-Hanser Verlag, 1993. ISBN: 3-446-16530-4.

Index

Achshöhe, 18
Ankerrückwirkung, 115, 203
Anlaufkondensator, 192
Anlaufkäfig, 181
Anlaufmoment, 70
Anwurfmotor, 191
Arbeitskäfig, 181
Arbeitswicklung, 191
asynchron, 61
asynchrone Oberfeldmomente, 177
Ausgleichswicklung, 140
Ausnutzungsfaktor, 142
Ausnutzungszahl, 147
Auswahlreihe, 18
Außenpolmaschine, 17, 55

Bahnmoment, 260
Barlowsches Rad, 260
Baugröße, 18
Betriebskondensator, 192
Betriebskäfig, 181
Bezugsleistung, 23
Biot Kennzahl, 298
Blech
    kornorientiert, 141
Blechung, 11
Bohrungsstab, 169
Brechnungsgesetz, magnetisch, 96
Bremsmotor, 81
Bruchlochwicklung, 162
Bürde, 53, 154
Bürstenabhebevorrichtung, 63
Bürstenfeuer, 120

Carterscher Faktor, 106, 116
Cauchy Kennzahl, 297

d-q-System, 201
Dahlanderschaltung, 78
Dauerkurzschlussstrom, 203
Diskretisierung, 242
Doppelkondensator, 192
Doppelkäfigläufer, 181
Doppelsternschaltung YY, 186
Drehfeldleistung, 66
Drehmomentlinie, 174
Drehrichtung, 76
Drehstromlichtmaschine, 86
Dunkelschaltung, 87
Durchflutungsgesetz, 6
Durchgangsleistung, 152
Durchmesserspule, 58
Durchmesserwicklung, 109, 163
dynamoelektrisches Prinzip, 37
Dämpfer-
    käfig, 83
    wicklung, 83

Einschichtwicklung, 109
Eisenverlusten, 8
Entwurfsgröße, 145
Erregerfeldkurve, 116
Esson'sche Zahl, 148
Evolventenwicklung, 109

Fehlwinkel, 154
Feldkurve, 159
Feldschwächbetrieb, 79
Feldverdrängung, 179
Fluss
    verketteter, 10
Fourier Kennzahl, 298
Frequenzumformer, 64

Ganzlochwicklung, 162, 169
Gauss-Seidel Methode, 252
Gegeninduktivität, 12
Gleichstromvormagnetisierung, 100
Gleitreibung, 22
Grundreihe, 302

Haftreibung, 22
Heylandkreis, 173
Hilfswicklung, 191

Hochstabläufer, 181
Hooke Kennzahl, 297
Hysterese, 8

Induktionsherd, 11
induktives Härten, 11
Innenpolmaschine, 17, 55
innere(s)
    Drehmoment, 66
    Leistung, 66
Inselbetrieb, 86, 190
IR-Anpassung, 79
IR-Kompensation, 188
Iterationsparameter, 252

Kappsches Dreieck, 49, 133
Kippmoment, 181
Kippschlupf, 73
Klauenpolmaschine, 83
Klingeltrafo, 53
Koerzitivfeldstärke, 8
Kollektorschritt, 114
Kondensatormotor, 192
Kranformel, 14
Kreisstrom, 150
Kurzstator, 189
Kusa-Schaltung, 76

Lagenspannungen, 44
Lamellenspannung, 118
Lamellierung, 11
Langstator, 190
Lastfaktor, 214
Leerlauf-Kurzschlussverhältnis, 203
Leistungslinie
    elektrisch, 174
    mechanische, 174
Lenzsche Regel, 10
Leonard-Umformer, 37
Linearantrieb, 58
Lochzahl, 162
Lorentz-Kraft, 259
Losbrechmoment, 22
Luftspaltgerade, 85, 103
Luftspaltleistung, 66
Längsachse, 201, 206
Längsreaktanz X_d, 206
Läuferstillstandsspannung, 63
Lösungsverfahren
    direkt, 251
    iterativ, 251

Magnetisierung
    Dreh-, 141
    Wechsel-, 141
Magnetostriktion, 19
Maschinentransformator, 53
Massivläufer, 62, 274
Maxwellscher Spannungstensor, 254

Nennschlupf, 64
neutrale Zone, 117
Newton Kennzahl, 297
Niveaufläche, 236
Normmaße, 303
Nutenspannungsstern, 199
Nutquerfeld, 179
Nutungsharmonische, 178

Oberstab, 169

Parallelwicklung, 151
Permanentmagnet, 8
Permeabilität
    Anfangs-, 100
    differentielle, 99
    gescherte, 102
Phasenschieber, 72
Piezoeffekt, 19
Polbedeckungsfaktor, 165
Polebedeckungsfaktor, 116
Polrad, 59, 83
Polradwinkel, 84
Polteilung, 11
Pulsationsverluste, 62, 108
Pulssteuerung, 184

Quellenfeld, 238
Querachse, 201, 206
Querreaktanz X_q, 206

Randbedingung
    Dirichlet'sche, 246
    Neumannsche, 246
Raumzeiger, 54, 56, 161
Reaktionsmoment, 207
Rechte-Hand-Regel, 6
Regulierkennlinie, 87, 233
Reihenwicklung, 151
Reluktanzmaschine, 207
Remanenzspannung, 223

Respektabstand, 91
Ringanker, 27
Ringkern, 142
Ringwicklung, 112
Roebelstab, 109
Rotationsspannung, 279
Rotorstillstandsspannung, 63
Rundwertreihe, 302
Rush-Effekt, 153
Rückenstab, 169

Schaltschritt, 114
Scheibenläufer, 260
Scheibenwicklung, 143
Schleifenwicklung, 113
Schlupf, 61
Schlupfgerade, 175
Schlupfmotor, 77
Schlupfwiderstand, 77
Schnittbandkern, 142
Schrägung, 179
Schweißtransformator, 53
Sehnungsfaktor, 163
Selbsterregung, 37, 190
Senkbremsung, 80
SOR-Verfahren, 252
Spannungswandler, 53
Sparschaltung, 152
Spinmoment, 260
Spulengruppe, 162
Stabilitätsgrenze, 91
Stapelfaktor, 102
Stegspannung, 118
Steinmetzschaltung, 192
Step-lap Schichtung, 142
Sternpunktsverlagerung, 140
Storchschnabelprinzip, 295
Stoßkurzschluss, 204
Stromverdrängung, 73
Stromvergrängungsfaktoren, 180
Stromwandler, 53
Stromwenderschritt, 114
Stromwendespannung, 29
Stufensprung, 302
subtransiente Reaktanz X''_d, 204
synchrones Moment, 178
synchronisieren, 87
Synchronoskop, 88
Synchronreaktanz
    gesättigt, 85
    ungesättigt, 85
Systemvariable, 243

TAB, 72
Tempeltyp, 57
Temperatur, 288
Transformatorbank, 50, 135
transiente Reaktanz X'_d, 205
Trenntransformator, 53
Trommelanker, 27
Trommelwicklung, 112
Träufelwicklung, 62, 108

U/f-Steuerung, 79, 188
Unterspannungsauslösung, 72
Unterstab, 169

V-Kurven, 92
Vektorpotential, 95
Verlustwärme, 288
Verteilertransformator, 53
Vollschaltung, 151

Wanderfeld, 58
Weber-Fechnersches Gesetz, 302
Wechselfeld, 160
Wellenhöhe, 18
Wellenwicklung, 114
Wickelfenster, 146
Wickelkopf, 109
Wicklung, 108
    Durchmesser-, 113
    gesehnt, 113, 163
Widerstandshilfsphase, 192
Widerstandsläufer, 77
Wirbelfeld, 238
Wirbelstrom, 11
Wirbelstrombremse, 11
Wärmestrom, 289

Zonenfaktor, 162
Zonenplan, 168
Zweischichtwicklung, 109, 113
Zylinderwicklung, 142

Äquipotentialfläche, 236
Äquipotentiallinie, 240